

动脉壁的动力响应特性

沈佳铖, 任九生

(1. 上海大学 理学院, 上海 200444; 2. 上海大学 上海市应用数学与力学研究所, 上海 200444)

摘要: 基于纤维加强各向异性不可压超弹性复合材料两层厚壁圆筒模型, 应用连续介质力学有限变形理论和非线性动力学理论, 建立脉动压作用下动脉壁的动力学模型, 考虑动脉壁中残余应力、平滑肌主动作用以及纤维分散的影响, 通过数值计算得到动脉壁的时程曲线、频谱图、相图和庞加莱截面图及应力分布曲线, 利用非线性动力学理论分析了动脉壁的动力学响应特性, 讨论了脉动压大小和频率的影响.

关键词: 连续介质力学; 平滑肌; 残余应力; 纤维分散; 非线性动力学

中图分类号: O 343

文献标志码: A

文章编号: 1007-2861(2012)06-0622-05

Dynamical Analysis of Arterial Wall

SHEN Jia-cheng^{1,2}, REN Jiu-sheng^{1,2}

(1. College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 204444, China;

2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

Abstract: A dynamical differential model for the arterial wall under pulse pressure is established based on a fiber-reinforced two-layer composite heterogeneous hyper-elastic tube within the finite deformation theories of continuum mechanics. Effects of the residual stress, smooth muscle activity and fiber dispersion are discussed. Time-history curves, frequency spectra, phase diagrams, Poincare maps and stress distribution curves are obtained through numerical computation. Dynamical response of the arterial wall taking into account the effects of the value and frequency of the pressure are discussed based on the nonlinear dynamical theory.

Key words: continuum mechanics; smooth muscle; residual stress; fiber dispersion; nonlinear dynamical theory

近年来心血管疾病已成为危害人类生命健康的最严重的疾病之一, 其患病率和死亡率均居各类疾病之首^[1]. 探讨心血管疾病的发病机制以达到有效的治疗已成为世界各国共同关注的话题. 关于动脉瘤等血管疾病的发病机理, 有一些理论解释尚无定论, 而其中普遍认可的是力学因素起着不可缺少的作

用^[1-2]. 因此, 研究分析动脉壁的力学特性非常关键.

动脉壁的微观组织结构非常复杂, 是由内层、中层和外层三部分构成的多级分层结构^[3-4]. 目前, 对动脉壁的生物力学的分析^[1,5-6]还不多, 并且已有的一些理论模型大多是将动脉壁作为各向同性的单层圆筒, 应变能函数多为均匀的. 另外, 动脉壁主要承

受周期性的脉动压作用,但现有的分析大多为准静态问题,对动力学特性的分析还远远不够.本研究的目的是在大变形超弹性理论框架下应用非线性动力学理论研究脉动压作用下动脉壁的动力学响应特性,建立纤维加强各向异性不可压超弹性复合材料两层厚壁圆筒模型,考虑平滑肌、纤维分散的影响,通过对动力学微分方程的数值计算得到脉动压作用下动脉壁的时程曲线、频谱图、相图和庞加莱截面图及应力分布曲线,并分析动脉壁的动力学响应特性.

1 基本方程

考虑到残余应力,假定动脉壁零应力状态的参考构型、变形后构型分别由柱坐标系 (R, Θ, Z) 和 (r, θ, z) 描述,动脉壁受脉动压作用的变形模式为

$$r = r(R, t) > 0, \quad \theta = k\Theta, \quad z = Z, \quad (1)$$

式中, $k = \frac{\pi}{\Theta_0}$, Θ_0 为管壁张开角. 相应的变形主伸长为

$$\lambda_r = \frac{\partial r}{\partial R}, \quad \lambda_\theta = \frac{r}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} = k \frac{r}{R}, \quad \lambda_z = 1. \quad (2)$$

动脉壁中层弹性蛋白纤维和胶原蛋白纤维是成簇分布的,可模拟为四族纤维加强的超弹性复合材料.因此,应变能函数可表示为^[5]

$$W = W_M + W_F + W_A, \quad (3)$$

式中, $W_M = \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i^{(m)}}{\alpha_i} (\lambda_r^{\alpha_i} + \lambda_\theta^{\alpha_i} + \lambda_z^{\alpha_i} - 3)$ 为基体材料的应变能函数^[7],材料参数 $\alpha_1 = 1.3$, $\alpha_2 = 5.0$, $\alpha_3 = -2.0$, $\mu_1 = 1.491 \mu^m$, $\mu_2 = 0.003 \mu^m$, $\mu_3 = -0.023 \mu^m$,其中 μ^m 为中层的剪切模量. $W_F = \sum_{k=1}^4 \frac{c_{1(k)}}{4c_{2(k)}} (e^{c_{2(k)}(I_{4(k)}^* - 1)^2} - 1)$ 为纤维的应变能函数^[5],其中参数 $c_{1(k)}$ 为第 k 族纤维的强度, $c_{2(k)}$ 描述第 k 族纤维的非线性程度; $I_{4(k)}^* = KI_1 + (1 - 3K)I_4$, 其中不变量 $I_1 = \lambda_r^2 + \lambda_\theta^2 + \lambda_z^2$, $I_{4(k)} = \mathbf{M}_{\alpha(k)} (\mathbf{C} \mathbf{M}_{\alpha(k)})$, \mathbf{C} 为右 Cauchy-Green 变形张量, $\mathbf{M}_{\alpha(k)} = [0, \sin \alpha(k), \cos \alpha(k)]$ 为参考构型中纤维的方向矢量, $\alpha(k)$ 为第 k 族纤维方向和动脉壁轴向夹角. 在管壁中层,对轴向纤维 $\alpha(1) = 0^\circ$,对环向纤维 $\alpha(2) = 90^\circ$,对两族斜向纤维 $\alpha(3) = \alpha^m$, $\alpha(4) = -\alpha^m$. $W_A = T_m \left(\tilde{\lambda}_\theta + \frac{1}{3} \frac{(\lambda_m - \tilde{\lambda}_\theta)^3}{(\lambda_m - \lambda_0)^2} \right)$ 为平滑肌的应变能函数^[5], T_m 表示平滑肌主动作用的程度, λ_m 为平滑肌最大伸长, λ_0 为主动作用产生折痕时的伸

长.管壁外层的密度能函数只有式(3)中的前两项,且纤维的应变能函数用两族纤维模型表示.

动脉壁各层的运动方程为

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = \rho \dot{r}. \quad (4)$$

动脉壁承受脉动压 $p(t) = p_1 + p_2 \cdot \sin(2\pi\omega t)$ 的边界条件可表示为

$$\sigma_{rr}^m = -p(t), \quad r = r_i, \quad \sigma_{rr}^a = 0, \quad r = r_0, \quad (5)$$

式中, $\sigma_{rr}^m, \sigma_{\theta\theta}^m, \sigma_{zz}^m$ 表示管壁中层的 Cauchy 应力分量, $\sigma_{rr}^a, \sigma_{\theta\theta}^a, \sigma_{zz}^a$ 表示管壁外层的 Cauchy 应力分量. 本工作中,上标 m 表示与管壁中层有关的量,上标 a 表示与管壁外层有关的量. r_i, r_0 分别表示变形后管壁的内、外半径. 动脉壁运动的初始条件为

$$r(R, t) = R, \quad t = 0, \quad \dot{r}(R, t) = 0, \quad t = 0. \quad (6)$$

假定动脉壁中各层界面处径向位移和径向应力连续,则连续性条件可表示为

$$r^m = r^a, \quad \sigma_{rr}^m = \sigma_{rr}^a, \quad r = r_m, \quad (7)$$

式中, r_m 表示变形后内外层界面处半径.

2 求解

由材料的不可压条件 $\lambda_r \lambda_\theta \lambda_z = 1$, 可得

$$\lambda_\theta = h, \quad \lambda_r = h^{-1}, \quad (8)$$

式中, $h = h(r, t) = k \frac{r(t)}{R(r)} = k \left(k \left(1 - \frac{r^2(R_i, t)}{r^2(R, t)} \right) + \frac{R_i^2}{r(R, t)} \right)^{-\frac{1}{2}}$. 动脉壁中层的非零 Cauchy 应力分量为

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^m(r, t) &= -p^m(r, t) + \sum_{i=1}^3 \mu_i^m h^{-\alpha_i}, \\ \sigma_{\theta\theta}^m(r, t) &= -p^m(r, t) + \sum_{i=1}^3 \mu_i^m h^{\alpha_i} + \\ &\sum_{k=1}^4 c_{1(k)}^m (I_{4(k)}^* - 1) e^{(c_{2(k)}^m (I_{4(k)}^* - 1)^2)} \sin^2 \alpha(k) h^2 + \\ &T_m h \left[1 - \left(\frac{\lambda_m - h}{\lambda_m - \lambda_0} \right)^2 \right], \\ \sigma_{zz}^m(r, t) &= -p^m(r, t) + \sum_{i=1}^3 \mu_i^m + \\ &\sum_{k=1}^4 c_{1(k)}^m (I_{4(k)}^* - 1) e^{(c_{2(k)}^m (I_{4(k)}^* - 1)^2)} \cos^2 \alpha(k). \quad (9) \end{aligned}$$

管壁外层的非零 Cauchy 应力分量为

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^a(r, t) &= -p^a(r, t) + \sum_{i=1}^3 \mu_i^a h^{-\alpha_i}, \\ \sigma_{\theta\theta}^a(r, t) &= -p^a(r, t) + \sum_{i=1}^3 \mu_i^a h^{\alpha_i} + \end{aligned}$$

$$2 \sum_{k=1}^2 c_{1(k)}^a (I_{4(k)}^* - 1) e^{(c_{2(k)}^a (I_{4(k)}^* - 1)^2)} \sin^2 \alpha(k) h^2,$$

$$\sigma_{zz}^a(r, t) = -p^a(r, t) + \sum_{i=1}^3 \mu_i^a +$$

$$2 \sum_{k=1}^2 c_{1(k)}^a (I_{4(k)}^* - 1) e^{(c_{2(k)}^a (I_{4(k)}^* - 1)^2)} \cos^2 \alpha(k). \quad (10)$$

将式(9)和式(10)代入式(4),并利用式(5)及式(7),可得

$$p(t) = \rho R_i^2 \dot{x}^2 \left[\frac{-\delta}{2(x^2 + \delta)} + \ln \sqrt{1 + \frac{\delta}{x^2}} \right] +$$

$$\rho R_i^2 x \dot{x} \ln \sqrt{1 + \frac{\delta}{x^2}} - J^a(r_0), \quad (11)$$

式中, $\delta = \frac{R_0^2}{R_i^2} - 1$, $x = k \frac{r_i}{R_i} = k \frac{r(R_i, t)}{R_i} = h(r_i, t)$,

$$J^{(a)}(r) = \int_{r_i}^{r_m} \left(\sum_{i=1}^3 \mu_i^m h^{-\alpha_i} - \sum_{i=1}^3 \mu_i^m h^{\alpha_i} \right) \frac{dr}{r} +$$

$$\int_{r_m}^r \left[\sum_{i=1}^3 \mu_i^a (h^{-\alpha_i} - h^{\alpha_i}) \right] \frac{dr}{r} -$$

$$\int_{r_i}^{r_m} \left[\sum_{k=1}^4 c_{1(k)}^m (I_{4(k)}^* - 1) e^{(c_{2(k)}^m (I_{4(k)}^* - 1)^2)} \sin^2 \alpha(k) h^2 \right] \frac{dr}{r} -$$

$$\int_{r_i}^{r_m} T_m h \left[1 - \left(\frac{\lambda_m - h}{\lambda_m - \lambda_0} \right)^2 \right] \frac{dr}{r} -$$

$$\int_{r_m}^r \left[2 \sum_{k=1}^2 c_{1(k)}^a (I_{4(k)}^* - 1) e^{(c_{2(k)}^a (I_{4(k)}^* - 1)^2)} \sin^2 \alpha(k) h^2 \right] \frac{dr}{r}.$$

引入变换 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$, 有

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{x_1 \ln \sqrt{1 + \frac{\delta}{x_1^2}}} \left[\frac{p(t) + J^{(a)}(r_0)}{\rho R_i^2} - x_2^2 \left(\frac{-\delta}{2(x_1^2 + \delta)} + \ln \sqrt{1 + \frac{\delta}{x_1^2}} \right) \right], \quad (12)$$

相应的初始条件为

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 0. \quad (13)$$

3 结果分析

计算中用到的几何参数、材料常数及载荷常数^[8]如下:

$$R_i = 3.302 \text{ mm}, R_m = 3.795 \text{ mm}, R_0 = 4.042 \text{ mm},$$

$$\mu^m = 43.48 \text{ kPa}, \mu^a = 2.7 \text{ kPa}, c_{1(1,3,4)}^m = 22.84 \text{ kPa},$$

$$c_{2(1,3,4)}^m = 13.20, c_{1(2)}^m = 11.76 \text{ kPa},$$

$$c_{2(2)}^m = 12.29 \text{ kPa}, c_{1(1,2)}^a = 5.1 \text{ kPa},$$

$$c_{2(1,2)}^a = 15.4 \text{ kPa}, \Theta_0 = 130.9^\circ, \alpha^m = 51.2^\circ,$$

$$\alpha^a = 40^\circ, T_m = 49.89 \text{ kPa}, \lambda_0 = 0.89, \lambda_m = 1.62.$$

对微分方程组(12)和式(13),利用龙格-库塔方法数值求解,可以得到不同脉动压 $p(t) = p_1 + p_2 \cdot \sin(2\pi\omega t)$ 下的时程曲线、频谱图、相图和庞加莱截面图(见图1~5).

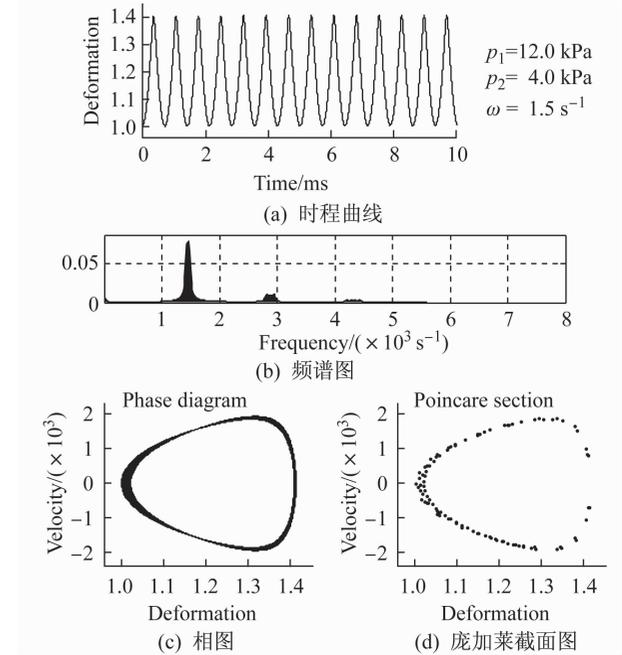


图1 正常情况下的图形

Fig.1 Graphics under the normal condition

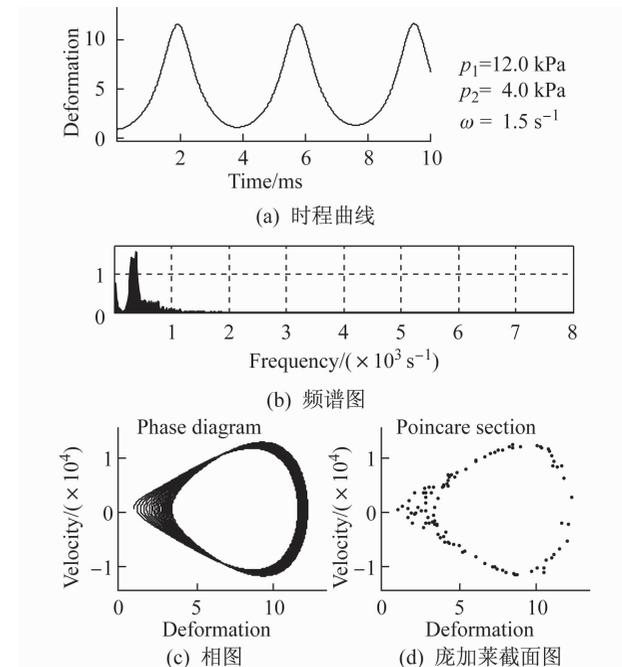


图2 不考虑纤维、平滑肌和残余应力时的图形

Fig.2 Graphics without the fiber, the residual stress and the smooth muscle activity

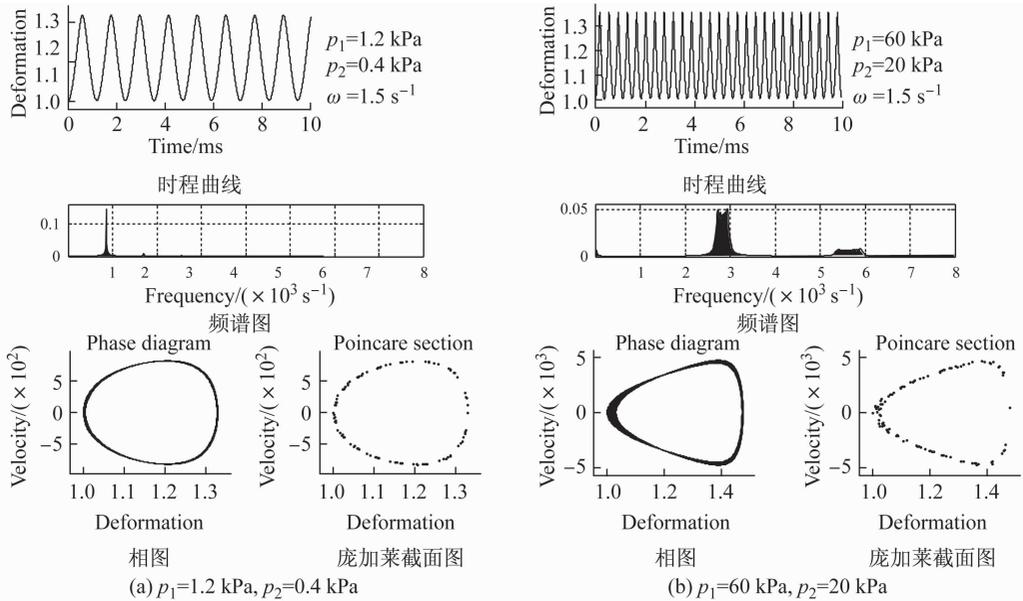


图 3 不同脉动压时正常情况下的图形

Fig. 3 Graphics under the normal condition with different pulse pressure

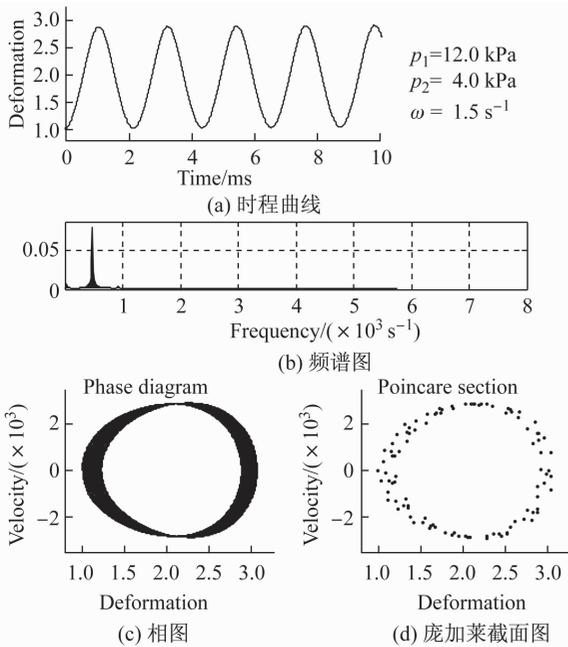


图 4 纤维角度的影响

Fig. 4 Effect of the fiber angle

由图 1~2 可知,如果不考虑纤维的影响,动脉壁时程曲线的振幅变大,周期变大,相图的不规则性越来越明显,管壁的运动由周期运动向准周期运动变化,这表明动脉壁中的纤维对于动脉壁的力学特性有至关重要的影响.平滑肌对动脉壁力学特性有一定的影响,不考虑平滑肌的影响时,运动时程曲线的周期变大,但影响有限.不考虑残余应力时,时程曲线的周期变大,相图变得不规则.

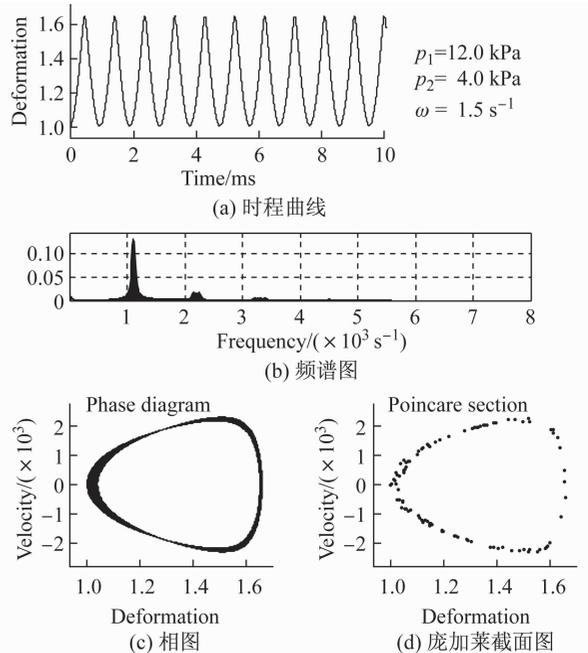


图 5 外层纤维分散的影响

Fig. 5 Effect of the fiber dispersion of the adventitia

由图 1 和图 3~5 可知,当血压值减小时,时程曲线的振幅变小,周期变大,其中相图表明此时的运动为接近周期运动的准周期运动.当血压值增大时,振幅变大,周期变小,动脉壁的运动逐渐趋向不规则程度增加的准周期运动.纤维强度变小,纤维分布角度变小,材料剪切模量变小时,时程曲线的振幅和周期变大,动脉壁的运动逐渐偏离稳定的周期运动,而趋向不规则程度增加的准周期运动.另外,可以发

现纤维分布角度的影响最大,其次是纤维强度的影响,剪切模量的影响最小.纤维发散对管壁的运动影响很小,可忽略不计.

由式(9)、(10)可求得动脉壁中的应力分布情况.特定情况下,动脉壁变形最大时的应力分布如图6和图7所示.

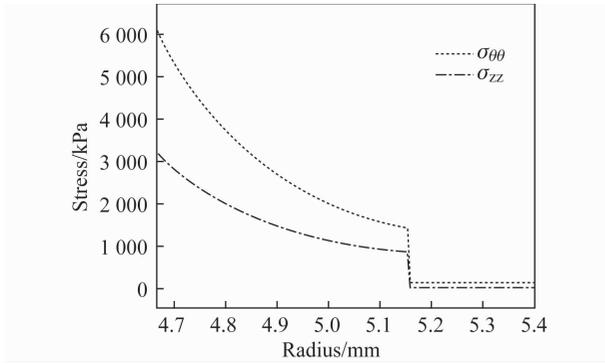


图6 正常情况下动脉壁中的应力分布

Fig.6 Stress distribution under the normal condition of the arterial wall

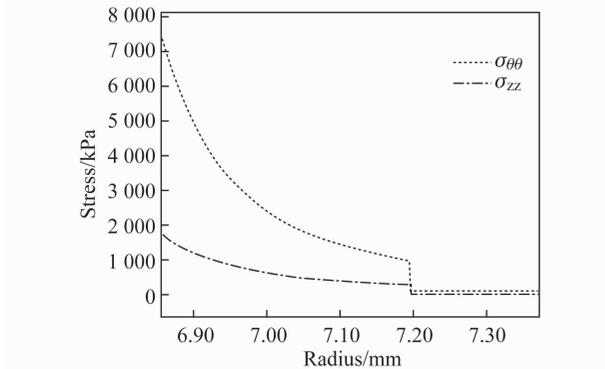


图7 纤维强度减小时动脉壁中的应力分布

Fig.7 Stress distribution for the decreased fiber of the arterial wall

由图6和图7可以看出,在脉动压作用下产生拟周期性振动的血管壁中各层的应力分量均随动脉壁的运动而变化,动脉壁的变形越大,相应的应力分量值越大,且均以环向应力分量为最大;中层的应力分量值远大于外层的相应应力分量值,即纤维和平滑肌加强的动脉壁中层为主要持力层,且以环向应力分量控制着动脉壁的力度.

对于给定的时刻,环向应力分量和径向应力分量均随半径的增加而减小,两层界面处应力分量不连续.如果纤维强度减少,相应的应力分量均变大,且对于给定的脉动压频率,载荷的平均压力值越大,

相应的应力分量值越大;对给定的脉动压平均压力值,脉动压频率越大,相应的应力分量值越大.

4 结束语

本研究应用连续介质力学有限变形理论和非线性动力学理论,建立了脉动压作用下动脉壁的动力学模型,通过数值计算得到动脉壁的时程曲线、频谱图、相图和庞加莱截面图及应力分布曲线,分析了血管壁的动力学响应特性.计算结果表明,不考虑纤维、平滑肌和残余应力的影响时,动脉壁的时程曲线的振幅变大,周期变大,相图的不规则性越来越明显,管壁的运动由周期运动向准周期运动变化.纤维强度变小、纤维分布角度变小和材料剪切模量变小时,时程曲线的振幅和周期变大,动脉壁的运动逐渐偏离稳定的周期运动,而趋向不规则程度增加的准周期运动.

参考文献:

- [1] HUMPHREY J D. Continuum biomechanics of soft biological tissues [J]. Proc R Soc A, 2003, 459(1):1-44.
- [2] 姜宗来,樊瑜波.生物力学—从基础到前沿[M].北京:科学出版社,2010.
- [3] GASSER T C, OGDEN R W, HOLZAPFEL G A. Hyperelastic modeling of arterial layers with distributed collagen fiber orientations [J]. J R Soc Interface, 2006, 3(1):15-35.
- [4] DAVID G, HUMPHREY J D. Further evidence for the dynamic stability of intracranial saccular aneurysms [J]. J Biomech, 2003, 36(7):1043-1150.
- [5] MASSON I, BOUTOUYRIE P, LAURENT S, et al. Characterization of arterial wall mechanical behavior and stresses from human clinical data [J]. J Biomech, 2008, 41(12):2618-2627.
- [6] 任九生,袁学刚.人体动脉瘤生成与破裂的力学分析[J].应用数学和力学,2010,31(5):561-572.
- [7] HAUGHTON D M, OGDEN R W. On the incremental equations in non-linear elasticity-II: bifurcation of pressurized spherical shells [J]. J Mech Phys Solids, 1978, 26(1):111-138.
- [8] HOLZAPFEL G A, GASSER T C. Computational stress-deformation analysis of arterial wall including high-pressure response [J]. Int J of Cardiology, 2007, 116(1):78-85.