第 19 卷 第 3 期 上海大学学报(自然科学版) Vol. 19 No. 3
2013年6月 JOURNAL OF SHANGHAI UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Jun. 2013
DOI: 10.3969/j.issn.1007-2861.2013.03.019

平面上凸曲线组合流

黄平亮, 周蓓蓓
(上海大学 理学院, 上海 200444)

摘要: 主要研究了两种新的平面凸曲率流: 一种是由保面积流和保长度流组合而成, 这种曲率流在演化过程中缩短了曲线的周长, 增大了曲线所围成的面积; 另一种是两种保长度流的“凸组合”, 这种曲率流的周长是常数, 而面积不断增大. 两种曲率流都具有全局存在性, 并且当时间趋于无穷大时, 曲线在 $\boldsymbol{C}^\infty$ 范数下收敛到有限圆.

关键词: 曲率流; $\boldsymbol{C}^\infty$ 范数; 凸曲线; 支撑函数
中图分类号: O 175.29 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2861(2013)03-0319-05

Convex Curve Combination Flow on a Plane

HUANG Ping-liang, ZHOU Bei-bei
(College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: Two kinds of convex curve flows on a plane were studies. One is combination of an area-preserving curve flow proposed and a length-preserving curve flow proposed, this flow reduces the curve length but increases the enclosed area in the evolution process, the other is convex combination of the length-preserving curve flows, it keeps the length constant and expands the area. The two curvature flows exist globally and converge to a circle in the $\boldsymbol{C}^\infty$ metric as time goes to infinity.

Key words: curvature flow; $\boldsymbol{C}^\infty$ metric; convex curve; support function

近年来, 出于对各种物理现象和现实问题的研究需要, 几何学者们开始研究曲线和曲面. 曲线和曲面受各种外力的影响会产生相应的流, 相关研究尤其是针对沿着曲线或曲面的法线方向、以主曲率的函数为速度的曲线的研究已经引起了广泛关注, 其中最简单的曲率流是Gage等[1-3]研究的平面曲线缩短流. 随后, 研究者重点关注了能保持某些几何量不变的曲率流. Ma 等[4]发现了一种保面积曲率流, 这种流与 Gage 等[3] 的平面曲线缩短流虽然形式不一样, 但是性质非常相似, 它们在演化过程中都保持面积不变, 曲线长度缩短, 一直保持曲线的凸性, 并且最终收敛到一个圆. Huisken 等[5]提出了一种保体积曲率流, 考虑一致凸的超曲面 $M_0^n(n \geqslant 2)$ 能长时间存在, 且保持体积不变, 最终当时间 $t \to +\infty$ 时, 在 $\boldsymbol{C}^\infty$ 范数下收敛到一个圆球. Athanassenas[6]研究了旋转对称曲面的保体积平均曲率流, 认为若初始曲面是凸的且旋转对称, 那么曲面最后可演化成常平均曲率曲面. McCoy[7]发现了保表面积曲率流, 如果 M_0 是光滑嵌入到 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的紧的严格凸的 n 维超曲面, 则随着时间 $t \to +\infty$, 这种曲率流会收敛到一个与 M_0 具有相同表面积的球. 文献[8-11]介绍了 4 种不同类型的保长度曲率流, 它们在演化过程中都保持曲线的周长不变, 而曲线所围成的面积越来越大, 曲线始终是凸的, 随着时间 $t \to +\infty$, 最终收敛到一个圆.

岳文权[12]将保面积流和一般的收缩流进行组合, 得到一种新的曲率流. 基于此, 本研究考虑能否将那些能保持某一个几何量不变的曲率流进行组合, 观察它们是否保持原有的一些特性. 本研究将保面积流[4]和保长度流[9]进行组合得到一种新的曲率流:

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_t = \Big(\dfrac{\alpha}{L}\displaystyle\int_0^L \dfrac{1}{\kappa}\mathrm{d}s + (1-\alpha)\dfrac{L}{2\pi} - \dfrac{1}{\kappa}\Big)\boldsymbol{N}, \\ \qquad (\lambda, t) \in [a,b] \times [0, +\infty), \\ \boldsymbol{X}(\lambda, 0) = \boldsymbol{X}_0(\lambda), \quad \lambda \in [a,b], \quad t = 0, \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期: 2012-06-21
基金项目: 上海市教委重点学科建设资助项目(J50101)
通信作者: 黄平亮(1979—), 男, 讲师, 博士, 研究方向为微分几何. E-mail: huangpingliang@shu.edu.cn

式中, $0<\alpha<1$, $L,\kappa,\boldsymbol{N}$ 分别表示曲线的长度、曲率和单位内法向量. 上述新的曲率流不再具备保面积或保长度的特性, 但是如果将组合后的保长度曲率流[9,11]按下列方程演化:

$$\begin{cases}\boldsymbol{Y}_t=\left(\dfrac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\dfrac{1}{\kappa}\right)\boldsymbol{N},\\ \qquad (\mu,t)\in[c,d]\times[0,+\infty),\\ \boldsymbol{Y}(\mu,0)=\boldsymbol{Y}_0(\mu),\quad \mu\in[c,d],\quad t=0,\end{cases}\tag{2}$$

则该新的曲率流保长度不变, 其中 h 为曲线的支撑函数.

定理 1 一条平面闭凸曲线按照式 (1) 演化, 则在演化过程中曲线保持凸性, 曲线的周长缩短, 但由曲线围成的面积增大, 当时间 $t\to+\infty$ 趋于无穷大时, 曲线在 $\boldsymbol{C}^\infty$ 范数下收敛到一个有限圆.

定理 2 假设 $\boldsymbol{Y}(\mu,t):[a,b]\times(0,+\infty)\to\mathbf{R}^2$ 是平面上的一族闭凸曲线, 若按式 (2) 演化, 则演化曲线将保持凸性, 曲线的周长保持不变, 但是曲线围成的面积增大, 且曲线在演化过程中变得越来越圆, 最终在 $\boldsymbol{C}^\infty$ 范数下收敛为一个半径为 $\frac{L}{2\pi}$ 的圆.

1 几何量的演化

由于演化方程中的切分量只影响曲线的参数化而不影响曲线的几何形状[3,13], 因此可以考虑与式 (2) 等价的演化方程:

$$\begin{cases}\boldsymbol{Y}_t=\left(\dfrac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\dfrac{1}{\kappa}\right)\boldsymbol{N}+\xi\boldsymbol{T},\\ \qquad (\mu,t)\in[c,d]\times(0,+\infty),\\ \boldsymbol{Y}(\mu,0)=\boldsymbol{Y}_0(\mu),\quad \mu\in[c,d],\quad t=0.\end{cases}\tag{3}$$

若曲线 $\boldsymbol{Y}(\mu,t)=(x(\mu,t),\ y(\mu,t))$, 则弧长 $s(\mu,t)=\int_0^\mu\nu(\omega,t)\mathrm{d}\omega$, 这里 $\nu(\mu,t)=|\frac{\partial\boldsymbol{Y}}{\partial\mu}|=\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial\mu})^2+(\frac{\partial y}{\partial\mu})^2}$ 为演化曲线的度量, 那么弧长微元可以表示为

$$\mathrm{d}s=\nu(\mu,t)\mathrm{d}\mu,\quad \frac{\partial}{\partial s}=\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial\mu}.$$

假设 θ 是切向量与 x 轴的夹角, 则单位切向量 $\boldsymbol{T}$、单位外法向量 $\boldsymbol{N}$、方向角 θ、曲线的周长 L、曲线所围成的面积 A 及曲率 κ 的演化方程[13]分别为

$$\frac{\partial\nu}{\partial t}=\frac{\partial\xi}{\partial\mu}-\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right)\kappa\nu,\tag{4}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial t}=\left(\xi\kappa+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right)\right)\boldsymbol{N},\tag{5}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial t}=-\left(\xi\kappa+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right)\right)\boldsymbol{T},\tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=-\int\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right)\kappa\mathrm{d}s,\tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=-\int\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right)\mathrm{d}s,\tag{8}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\xi\kappa+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right),\tag{9}$$

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t}=\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right)+\xi\frac{\partial\kappa}{\partial s}+\kappa^2\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right).\tag{10}$$

通常情况下, θ 是关于 μ 和 t 的函数, 为了使 θ 与 t 独立, 由式 (9) 可知, 只需将 ξ 取为 $-\frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa})$. 为了简化分析过程, 用参数 (θ,ϖ) 替换参数 (μ,t), 这里 $\varpi=t$. 下面将在新参数下讨论曲率流(式 (3)). 由式 (5) 和 (6) 可知, $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 都与 t 无关, 且 $\boldsymbol{T}(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta),\boldsymbol{N}(\theta)=(-\sin\theta,\cos\theta)$.

引理 1 假设 $\boldsymbol{Y}(\theta,\varpi)$ 为平面上一族曲线, 则

(1) $\boldsymbol{Y}(\theta,\varpi)=-h(\theta,\varpi)\boldsymbol{N}(\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}h(\theta,\varpi)\boldsymbol{T}(\theta)$,

(2) $\kappa(\theta,\varpi)=\frac{1}{h(\theta,\varpi)+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}h(\theta,\varpi)}$.

证明 (1)由支撑函数的定义 $h(\theta,\varpi)=-\langle\boldsymbol{Y}(\theta,\varpi),\boldsymbol{N}(\theta)\rangle$, 可得

$$\frac{\partial h}{\partial\theta}=-\left\langle\frac{\partial\boldsymbol{Y}}{\partial\theta},\boldsymbol{N}\right\rangle-\left\langle\boldsymbol{Y},\frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial\theta}\right\rangle=\langle\boldsymbol{Y}(\theta,\varpi),\boldsymbol{T}(\theta)\rangle,$$

从而证得

$$\boldsymbol{Y}(\theta,\varpi)=-h(\theta,\varpi)\boldsymbol{N}(\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}h(\theta,\varpi)\boldsymbol{T}(\theta).\tag{11}$$

(2) 由式 (1) 及弧长元素的定义, 可知

$$\frac{\partial\boldsymbol{Y}}{\partial\theta}=-\frac{\partial h}{\partial\theta}\boldsymbol{N}+h\boldsymbol{T}+\frac{\partial^2h}{\partial\theta^2}\boldsymbol{T}+\frac{\partial h}{\partial\theta}\boldsymbol{N}=h\boldsymbol{T}+\frac{\partial^2h}{\partial\theta^2}\boldsymbol{T}.$$

$$\kappa(\theta,\varpi)=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=\left|\frac{\partial\boldsymbol{Y}}{\partial\theta}\right|^{-1}=\frac{1}{h+\frac{\partial^2h}{\partial\theta^2}}.$$

命题得证.

将 $\xi=-\frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa})$ 代入式 (10), 可得曲率 κ 在参数 (θ,ϖ) 下的演化方程为

$$\frac{\partial\kappa}{\partial\varpi}=\kappa^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right)+\kappa^2\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right).\tag{12}$$

2 演化曲线保持凸性

曲率的演化方程 (式(12)) 并不简单, 但是可以通过变换转化为标准的热传导方程.

引理 2 记 $Z=(\frac{1}{\kappa}-\frac{L}{2\pi})\mathrm{e}^{-\beta\varpi}$, 则可得如下热传导方程:

$$\begin{cases} Z_{\varpi}=Z_{\theta\theta}, \quad (\theta,\varpi)\in[0,2\pi]\times(0,+\infty), \\ Z(\theta,0)=\dfrac{1}{\kappa(\theta,0)}-\dfrac{L_0}{2\pi}, \quad \theta\in[0,2\pi], \end{cases}$$

其中 Z 在区间 $[0,2\pi]\times[0,+\infty)$ 上存在解 $Z(\theta,\varpi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi\varpi}}\mathrm{e}^{-\frac{(\theta-\varphi)^2}{4\varpi}}Z(\theta,0)\mathrm{d}\varphi$.

证明　由 $\int h\kappa\mathrm{d}s=L^{[2]}$可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\varpi}&=-\int\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right)\kappa\mathrm{d}s= \\ &-\int\left(\frac{\beta L\kappa}{2\pi}+(1-\beta)h\kappa-1\right)\mathrm{d}s= \\ &-(\beta L+(1-\beta)L-L)=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial\varpi}&=-\frac{\kappa_{\varpi}}{\kappa^2}\mathrm{e}^{-\beta\varpi}-\beta\left(\frac{1}{\kappa}-\frac{L}{2\pi}\right)\mathrm{e}^{-\beta\varpi}= \\ &\Big(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Big(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\Big)- \\ &\Big(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\Big)\Big)\mathrm{e}^{-\beta\varpi}- \\ &\beta\left(\frac{1}{\kappa}-\frac{L}{2\pi}\right)\mathrm{e}^{-\beta\varpi}= \\ &\left((\beta-1)\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{1}{\kappa}\right)-\frac{\beta L}{2\pi}+(\beta-1)h+\frac{1}{\kappa}\right)\mathrm{e}^{-\beta\varpi}- \\ &\beta\left(\frac{1}{\kappa}-\frac{L}{2\pi}\right)\mathrm{e}^{-\beta\varpi}=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\mathrm{e}^{-\beta\varpi}=Z_{\theta\theta}.\end{aligned}$$

因此, 引理得证.

定理 3 在定理 2 的假设下, 曲率流(式(3)) 在演化过程中保持曲线的凸性.

证明　要证明曲线在演化过程中仍然是凸的, 就需证明 $\kappa(\theta,\varpi)>0$. 由引理 2 可知, $Z(\theta,\varpi)$ 是一致有界的, 即存在一个常数 $M>0$, 使得

$$|Z(\theta,\varpi)|\leqslant M,$$

则对于有限的时间 $\overline{T},\varpi\in[0,\overline{T})$, 有

$$\left|\frac{1}{\kappa}-\frac{L}{2\pi}\right|\leqslant M\mathrm{e}^{\beta\overline{T}}.$$

由引理 2 的证明可知, L 是一个常数, 且等式右边也是一个确定的数, 因此对于 $(\theta,\varpi)\in[0,2\pi]\times[0,\overline{T}),\kappa(\theta,\varpi)\neq 0$. 由于$\kappa(\theta,0)$是正的, $\kappa(\theta,\varpi)$是连续函数, 可以得到对于$(\theta,\varpi)\in[0,2\pi]\times[0,\overline{T}),\kappa(\theta,\varpi)>0$. 因为 $\overline{T}$ 是任意的, 故定理得证.

3 C^{∞} 范数收敛

在讨论曲线的最终形状之前, 先研究曲线的长度和曲线所围的面积在曲线演化过程中的变化.

引理 3 如果平面上的闭凸曲线按照式 (3) 演化, 那么在演化过程中曲线的长度保持不变, 曲线围成的面积不断增大.

证明　由引理 2 的证明可知 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\varpi}=0$, 说明曲线的周长是一个定值.

对于面积 A 有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\varpi}&=-\int\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right)\mathrm{d}s= \\ &-\frac{\beta L^2}{2\pi}-(1-\beta)2A+\int\frac{1}{\kappa}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\left(\int\mathrm{d}s\right)^2\leqslant\int\frac{1}{\kappa}\mathrm{d}s\cdot\int\kappa\mathrm{d}s,$$

那么,

$$\int\frac{1}{\kappa}\mathrm{d}s\geqslant\frac{L^2}{2\pi}.$$

因此, 有

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\varpi}\geqslant\frac{(1-\beta)\left(L^2-4\pi A\right)}{2\pi}\geqslant 0.$$

引理得证.

下面证明曲率流 (式(3)) 在演化过程中将变得越来越圆.

引理 4 假如初始曲线按式 (3) 演化时仍然保持凸性, 并且在演化过程中不出现奇点, 那么等周差 $L^2-4\pi A$ 递减, 且当 $\varpi\to+\infty$ 时, 收敛到 0.

证明　由引理 3 可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varpi}(L^2-4\pi A)=-4\pi A_{\varpi}.$$

由引理 3 中的 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\varpi}\geqslant 0$, 可得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varpi}(L^2-4\pi A)\leqslant 0$, 即等周差 $L^2-4\pi A$ 递减.

同时, 因为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varpi}(L^2-4\pi A)&\leqslant-4\pi\frac{(1-\beta)\left(L^2-4\pi A\right)}{2\pi}= \\ &2\left(\beta-1\right)\left(L^2-4\pi A\right),\end{aligned}$$

对上式两边进行积分, 可得

$$L^2-4\pi A\leqslant(L_0^2-4\pi A_0)\mathrm{e}^{2(\beta-1)\varpi},$$

式中, $0<\beta<1$. 显然当 $\varpi\to+\infty$ 时, 有 $L^2-4\pi A\to 0$.

接下来证明曲率流在 $\boldsymbol{C}^\infty$ 范数下收敛.

定理 4 在引理 4 的假设下, 曲率流(式(2)) 当 $t\to+\infty$ 时在 $\boldsymbol{C}^\infty$ 范数下收敛到一个有限圆, 且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\kappa=\frac{2\pi}{L}$.

证明 由 Bonnesen 不等式 $\frac{L^2}{A}-4\pi\geqslant\frac{\pi^2}{A}(r_{\rm out}-r_{\rm in})^2$ 和 $\frac{L^2}{A}-4\pi\to0$ 可得, 当 $t\to+\infty$ 时, $r_{\rm out}\to r_{\rm in}$, 即曲率流在 Hausdorff 距离下收敛到一个有限圆. 引理 2 说明了曲率 κ 是 $\boldsymbol{C}^\infty$ 可微的, 因此曲率流 (式(2)) 可以看作在 $\boldsymbol{C}^\infty$ 范数下收敛. 由于曲线的长度是一个定值 L, 且曲线收敛到一个有限圆, 因此可得 $\lim\limits_{t\to+\infty}\kappa=\frac{2\pi}{L}$.

4 曲线不出现奇点

要证明曲线在演化过程中不出现奇点, 只需证明对于任意时刻 $t\in[0,+\infty)$, 曲线都存在. 要证明曲线的这种全局存在性, 需要借助支撑函数这一工具.

定理 5 假设 $\boldsymbol{Y}(\mu,t):[c,d]\times[0,+\infty)\to\mathbf{R}^2$ 是式 (2) 的解, 则支撑函数 $h(\theta,\varpi):[0,2\pi]\times[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 满足如下方程:

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}+\beta h-\frac{\beta L}{2\pi}. \tag{13}$$

相反地, 假设 $h(\theta,\varpi):[0,2\pi]\times[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 是式(13) 的光滑解, 且曲率半径 $\frac{1}{h+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}h}>0$, 如果 $\boldsymbol{Y}_0=-h(\theta,0)\boldsymbol{N}+\frac{\partial}{\partial\theta}h(\theta,0)\boldsymbol{T}$ 是初始曲线, 则式(2) 存在唯一的解 $\boldsymbol{Y}(\mu,t)$, 且对于任意的时间 $t\in[0,+\infty)$, 它的初始值为 $\boldsymbol{Y}_0$, 曲线的支撑函数是 $h(\theta,\varpi)$.

证明 由支撑函数的定义, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t}=&-\left\langle\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial t},\boldsymbol{N}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial t},\boldsymbol{Y}\right\rangle=\\&-\left\langle\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right)\boldsymbol{N},\boldsymbol{N}\right\rangle=\\&\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}+\beta h-\frac{\beta L}{2\pi}.\end{aligned}$$

类似于引理 2 的证明方法, 可以将式 (13) 转化为热传导方程, 从而在 $t\in[0,+\infty)$ 上, 有

$$\begin{aligned}&\left(h(\theta,t)-\frac{L}{2\pi}\right)\mathrm{e}^{-\beta t}=\\&\quad\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(\theta-\phi)^2}{4t}}\left(h(\theta,0)-\frac{L_0}{2\pi}\right)\mathrm{d}\phi.\end{aligned}$$

由此可知, 支撑函数 $h(\theta,t)$ 光滑.

由引理 1 可知, 曲面上的任意一条闭凸曲线都可由支撑函数唯一表示为

$$\overline{\boldsymbol{Y}}(\theta,\varpi)=-h(\theta,\varpi)\boldsymbol{N}(\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}h(\theta,\varpi)\boldsymbol{T}(\theta),$$

那么, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{\boldsymbol{Y}}(\theta,\varpi)}{\partial\varpi}=&-\frac{\partial h}{\partial\varpi}\boldsymbol{N}+\frac{\partial^2}{\partial\varpi\partial\theta}h\boldsymbol{T}=\\&-\left(\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}+\beta h-\frac{\beta L}{2\pi}\right)\boldsymbol{N}+\\&\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}+\beta h-\frac{\beta L}{2\pi}\right)\boldsymbol{T}=\\&-\left(\frac{1}{\kappa}+(\beta-1)h-\frac{\beta L}{2\pi}\right)\boldsymbol{N}+\\&\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\kappa}+(\beta-1)h-\frac{\beta L}{2\pi}\right)\boldsymbol{T}=\\&\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right)\boldsymbol{N}-\\&\frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right)\boldsymbol{T}.\end{aligned}$$

令 $\theta=\theta(\mu,t),t=\varpi$, 则 $\boldsymbol{Y}(\mu,t)=\overline{\boldsymbol{Y}}(\theta,\varpi)$, 这里 θ 满足方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\theta}{\partial t}=\kappa\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\dfrac{1}{\kappa}\right),\\ \theta(\mu,0)=\mu.\end{cases}$$

显然, $\theta(\mu,t)$ 是上述方程的唯一解.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{Y}(\mu,t)}{\partial t}=&\frac{\partial\overline{\boldsymbol{Y}}(\theta,\varpi)}{\partial t}=\frac{\partial\overline{\boldsymbol{Y}}(\theta,\varpi)}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial\overline{\boldsymbol{Y}}(\theta,\varpi)}{\partial\varpi}\frac{\partial\varpi}{\partial t}=\\&\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right)\boldsymbol{T}(\theta)+\\&\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right)\boldsymbol{N}-\\&\frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right)\boldsymbol{T}=\\&\left(\frac{\beta L}{2\pi}+(1-\beta)h-\frac{1}{\kappa}\right)\boldsymbol{N}.\end{aligned}$$

故定理得证.

5 曲率流的简单证明

运用证明保长度曲率流 (式(2)) 的方法, 首先得到曲线长度 L、所围成的面积 A 和曲率 κ 的演化方程, 通过简单计算可以得到曲线的长度 L 随着时间的增加而缩短, 面积 A 则增大; 接着将曲率 κ 的演化方程转化成热传导方程, 从而利用热传导方程解的一致有界性得到曲率 κ 在时间 $t\in[0,+\infty)$ 时恒大于 0, 这就证明了曲线在演化过程中保持凸性; 然后, 通过证明支撑函数 h 的全局存在性等价于曲率流的全局存在性, 将

曲率流的全局存在性这一难题转化为较简单的支撑函数 h 的全局存在性问题; 最后, 借助等周差随着时间 $t \to +\infty$ 而趋于 0, 证得定理 1.

参考文献:

[1] Gage M E. An isoperimetric inequality with applications to curve shortening [J]. Duke Math J, 1983, 50(4): 1225-1229.

[2] Gage M E. Curve shortening makes convex curves circular [J]. Invent Math, 1984, 76(2): 357-364.

[3] Gage M E, Hamilton R S. The heat equation shrinking convex plane curves [J]. J Diff Geom, 1986, 23(1): 69-96.

[4] Ma L, Cheng L. A non-local area preserving curve flow [EB/OL]. [2012-12-09]. http://arxiv.org/abs/0907. 1430, 2009.

[5] Huisken G. The volume preserving mean curvature flow [J]. J Reine Angew Math, 1987, 1987(382): 35-48.

[6] Athanassenas M. Volume-preserving mean curvature flow of rotationally symmetric surface [J]. Comment Math Helv, 1997, 72(1): 52-66.

[7] McCoy J. The surface area preserving mean curvature flow [J]. Asian J Math, 2003, 7(1): 7-30.

[8] Pan S L. On a perimeter-preserving plane curve flow [J]. Appl Math, 2001, 16(4): 409-417.

[9] Pan S L, Yang J N. On a non-local perimeter-preserving curve evolution problem for convex plane curves [J]. Manuscr Math, 2008, 127(4): 469-484.

[10] Ma L, Zhu A Q. On a length preserving curve flow [J]. Monatsh Math, 2012, 165(1): 57-78.

[11] 孟庆贤. 平面上一种保长度曲线流 [D]. 上海: 华东师范大学, 2010.

[12] 岳文权. 一种组合曲线流 [D]. 上海: 华东师范大学, 2005.

[13] Pan S L. A note on the general curve flows [J]. J Math Stud, 2000, 33(4): 17-26.