

DOI: 10.3969/j.issn.1007-5461. 2013.06.017

基于隐形传态的量子稳定子码容错编码门 构造方法研究

王岩岩, 刘莹, 赵生妹

(南京邮电大学通信与信息工程学院, 江苏 南京 210003)

摘要: 基于隐形传态提出一种稳定子码量子容错编码门的构造方法。隐形传态构造法是通过隐形传态得到的编码态执行假想的编码门, 然后将该假想门往前移, 使得编码门构造的困难减小到仅容错制备一个特殊辅助态即可。以编码 Hadamard 门, 编码相位门为例详述了该方法的实现过程, 并通过数值分析验证了隐形传态构造法的正确性。最后, 计算各编码门的构造开销, 并与文献 [16] 中的编码门构造方法相比较, 结果表明隐形传态法下, 编码 \overline{H} 门的物理量子门减少了 $60n$ 个, 辅助块 $|\overline{0}\rangle$ 和 $|Cat\rangle$ 各减少了 5 个; 编码 \overline{P} 门的物理量子门减少了 $16n$ 个, 辅助块 $|\overline{0}\rangle$ 减少了 1 个, $|Cat\rangle$ 减少了 2 个。

关键词: 量子物理; 容错编码门; 稳定子码; 隐形传态; 开销

中图分类号: O413.1

文献标识码: A

文章编号: 1007-5461(2013)06-0752-07

Construction method of quantum fault-tolerant encoded gates of stabilizer code based on teleportation

WANG Yan-yan, LIU Ying, ZHAO Sheng-mei

(College of Communication and Information Engineering, Nanjing University of Posts & Telecommunication, Nanjing 210003, China)

Abstract: A novel constructing quantum fault-tolerant encoded gates method was proposed based on teleportation for the general stabilizer code. The quantum teleportation was used to get the teleported code and the imaginary encoded gate was applied to the teleported code, then move it forward, so the difficulty to construct encoded gate can be reduced to prepare a special ancillary state. The encoded Hadamard gate and phase gate were selected as examples to explain the constructing procedure, and the numerical analysis verifies that the method is valid. The results show that under the teleportation method, encoded \overline{H} gate decreases $60n$ physical quantum gates, 5 encoded block $|\overline{0}\rangle$ and 5 ancilla block $|Cat\rangle$, and encoded \overline{P} gate decreases $16n$ physical quantum gates, 1 encoded block $|\overline{0}\rangle$ and 2 ancilla block $|Cat\rangle$ when compared with the overhead in reference [16].

Key words: quantum physics; fault-tolerant encoded gate; stabilizer code; teleportation; overhead

1 引言

量子态具相干性和叠加性的优点, 这使得量子计算具有经典计算所不可比拟的信息处理能力^[1]。量子计算是利用量子门的么正变换来实现其时间演化过程, 而量子容错编码门不仅能直接实现稳定子码的么

作者简介: 王岩岩 (1988 -), 女, 山东郓城人, 研究生, 研究方向为容错量子计算。E-mail: wyy.0428@163.com

导师简介: 赵生妹 (1968 -), 女, 江苏丹徒人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为量子信息技术, 无线通信与信号处理技术。E-mail: zhaosm@njupt.edu.cn

收稿日期: 2013-01-30; **修改日期:** 2013-04-07

正变换, 同时能保证量子计算的长时间可靠性, 这对物理实现量子计算机具有理论意义和指导价值^[2~5]。最近, 量子容错编码门也已经成为量子通信和量子计算的研究热点之一^[6~9]。

传统量子计算是对编码态执行“译码 - 量子门 - 编码”的过程, 但是译码后的“裸”数据态由于失去了纠错码的保护易受到环境噪声的影响而发生差错, 之后通过量子门时差错会增值, 当差错数超过纠错码的纠错能力时会导致整个计算的失败^[10~12]。而容错量子计算是以不要求译码的方式直接对编码的逻辑态进行运算, 于是需要构造能够实现编码态么正变换的编码门, 同时对编码门进行容错构造, 使得执行编码门过程中不会引起同一码块中的差错增值, 从而增强了量子计算的健壮性。Hadamard 门 (H 门), 相位门 (P 门), 可控非门 (CNOT 门) 是 C_2 群 (Clifford 群) 的生成元, 由这三种门可以实现稳定子码的六种么正变换, 因此, 实现整个 C_2 群容错编码门的关键是研究构造这三种门所对应的容错编码门^[13]。

横向操作是指对编码态中各个物理量子位逐比特施加量子门, 从而实现作用在编码态上的编码门。已证明横向操作具有自动容错性^[2,5]。对于 C_1 群 (Pauli 群) 中的编码门, 无论编码态是 CSS 码还是一般的稳定子码, 都可以通过横向操作实现^[14,15]。对于 C_2 群中的容错编码门, 当编码态为自对偶双平均 (Self-dual and double-even) 的 CSS 码时, 由于这种码的稳定子生成元中 X 串和 Z 串具有相似结构, 且各占一半, 因此, Shor 等提出了通过横向操作的方法来实现^[2], 但这种构造方法却不适用于普遍的一般性稳定子码。后来, Gottesman 等提出了基于一般稳定子码的容错编码门构造方法^[16], 主要是利用编码的可控非门与测量相结合来实现 C_2 群中的其他量子编码门, 但电路较为复杂且开销很大。

对于 C_3 群中的编码门, 不论是基于 CSS 类稳定子码还是一般性稳定子码, 都无法用横向操作的方式来构造。量子隐形传态是利用量子态的纠缠特性^[17]来进行信息传输的一个过程。Shor 最先利用隐形传态的原理提出了基于 CSS 码的容错编码 Toffoli 门的构造方法^[2], 主要利用预纠缠的辅助态以及辅助态的部分测量来实现; 之后, Gottesman 和 Chuang 等基于隐形传态的概念提出了一种系统化的量子门模型^[18], 然后又将其应用到 C_3 群编码门的构造上^[19]; 后来, Zhou 等提出了“单量子比特隐形传态”概念并运用其构造了 C_3 群中的编码 Toffoli 门, $\pi/8$ 门以及控制相位门 $A_1(S)$ ^[20], 但是这些编码门只适用于信息位 $k=1$ 的 CSS 码; Stean 同样利用隐形传态的概念提出了基于 $k>1$ 的 CSS 码的 C_3 群容错编码门构造方法^[21]; 最近, Goebel 等在文献 [17] 的基础上物理实现了 C_2 群中的两位编码 \overline{CNOT} 门^[22], 但是, 其构造开销要比 [16] 中编码 \overline{CNOT} 门的开销大。对于 C_2 群中的另外两个重要的一位编码 \overline{H} 门和 \overline{P} 门, 目前尚未有利用隐形传态概念来构造的相关研究。

本文基于隐形传态法对稳定子码的量子容错一位编码门的构造方法进行研究。首先, 给出利用隐形传态法构造 C_2 群一位编码门的原理图。其次, 以编码 \overline{H} 门和编码 \overline{P} 门为例, 验证了隐形传态法构造容错编码门的正确性, 同时给出相应的构造线路图。最后, 通过开销计算, 比较所提出的稳定子码容错编码门构造方法和 [16] 的构造方法的优劣。

2 基于隐形传态法的量子容错编码门构造原理

本节将首先介绍隐形传态构造法的基本原理, 利用量子线路图进行说明; 然后, 给出理论证明和推导过程。

2.1 隐形传态构造法基本原理

图 1 是利用隐形传态法构造一般稳定子码的容错编码门 \overline{U} 的线路图。首先, 对编码态 $|\varphi\rangle$ 执行编码后的隐形传输: 将 $|\varphi\rangle$ 与编码后的 Bell 态 $|\overline{\Psi}\rangle = |\overline{00}\rangle + |\overline{11}\rangle$ 中的一个进行编码后的 Bell 测量, 图中用 \overline{B} 来表示, 其中 Bell 基为 $|\overline{0x}\rangle + (-1)^z|\overline{1x}\rangle$, $x, z \in \{0, 1\}$, 并根据测量得到的本征值 $(-1)^z$ 向 Bell 对中的另一个执行相应的恢复算子 \overline{X} 和 \overline{Z} , 得到要传输的编码块 $|\overline{\varphi}\rangle$ 。其次, 对传输得到的编码态 $|\overline{\varphi}\rangle$ 执行假想的编码门 \overline{U} 操作, 之后将 \overline{U} 向前移, 一直移动到编码后的 Bell 测量之前为止, 移动过程中 \overline{U} 会使恢复算子发生

改变, 即 \bar{X} 变成 $\bar{U}\bar{X}\bar{U}^+$, \bar{Z} 变成 $\bar{U}\bar{Z}\bar{U}^+$ 。因此, 构造容错编码 \bar{U} 门的困难将减小到容错制备特殊辅助态 $|\bar{\Psi}_U\rangle$ 即可, 如图 1 中虚线框所示。由图 1 可以看到, 特殊辅助态

$$|\bar{\Psi}_U\rangle = (\bar{I} \otimes \bar{U})|\bar{\Psi}\rangle. \tag{1}$$

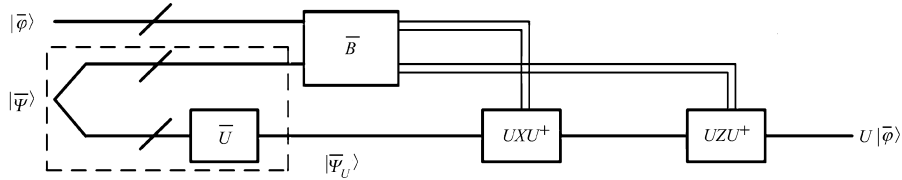


Fig.1 Teleportation method to construct the encoded gate \bar{U}

因此, 当编码 \bar{U} 门的类型确定后, 那么 $|\bar{\Psi}_U\rangle$ 的值也随之确定, 故可以根据 $|\bar{\Psi}_U\rangle$ 的稳定子生成元来容错制备这个特殊辅助态 [16]。此外, 根据门等级定义 [15] 可知图 1 中的恢复算子 $\bar{U}\bar{X}\bar{U}^+$ 和 $\bar{U}\bar{Z}\bar{U}^+$ 仍是 C_1 群中的元素, 可以实行横向操作, 并且编码的 Bell 测量也可以横向地作用在任何稳定子码上 [4], 因此整个构造过程是自动容错的。图中的斜线表示其所在的线路由 n 条线路组成, 传送的是 n 个量子比特信号, 而双线表示传递的是经典信息 +1 和 -1, 用来控制是否执行恢复算子 $\bar{U}\bar{X}\bar{U}^+$ 和 $\bar{U}\bar{Z}\bar{U}^+$ 。

接下来说明如何容错制备特殊辅助态 $|\bar{\Psi}_U\rangle = (\bar{I} \otimes \bar{U})|\bar{\Psi}\rangle$ 。由于编码的 Bell 态 $|\bar{\Psi}\rangle = |\bar{0}\bar{0}\rangle + |\bar{1}\bar{1}\rangle$ 是算子 $\bar{X} \otimes \bar{X}$ 和 $\bar{Z} \otimes \bar{Z}$ 的本征值为 +1 所对应的共同本征态, 故 $|\bar{\Psi}\rangle$ 的稳定子生成元即为 $\bar{X} \otimes \bar{X}$ 和 $\bar{Z} \otimes \bar{Z}$ 。根据公式 (1) 可知, 特殊辅助态 $|\bar{\Psi}_U\rangle$ 的稳定子生成元则为

$$(\bar{I} \otimes \bar{U})(\bar{X} \otimes \bar{X})(\bar{I} \otimes \bar{U}^+) = \bar{X} \otimes \bar{U}\bar{X}\bar{U}^+, \tag{2}$$

$$(\bar{I} \otimes \bar{U})(\bar{Z} \otimes \bar{Z})(\bar{I} \otimes \bar{U}^+) = \bar{Z} \otimes \bar{U}\bar{Z}\bar{U}^+, \tag{3}$$

测量能够改变稳定子码的稳定子生成元 [16]。图 2 是稳定子码的测量线路, 如果对初始态 $|\bar{0}\rangle$ 执行测量算子 M_i , M_i 是由一个叠加态 $|+\rangle = |0\rangle + |1\rangle$ 来控制是否执行于 $|\bar{0}\rangle$ 上, 并且当 $|+\rangle$ 的测定值为 -1 时, 对被测量系统执行与 M_i 反对易的恢复算子 Q_i , 那么输出态 $|\bar{\varphi}\rangle$ 将是算子 M_i 的 +1 本征态, 即 $|\bar{\varphi}\rangle$ 的稳定子生成元将会变成 M_i 。也就是说, 若要制备量子态 $|\bar{\varphi}\rangle$, 只需对 $|\bar{0}\rangle$ 逐个测量 $|\bar{\varphi}\rangle$ 的稳定子生成元即可。

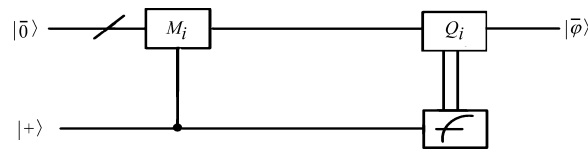


Fig.2 Measurement circuit of a stabilizer code

因此, 制备图 1 中的特殊辅助态 $|\bar{\Psi}_U\rangle$, 由公式 (2)、(3) 知其稳定子生成元为 $\bar{X} \otimes \bar{U}\bar{X}\bar{U}^+$ 和 $\bar{Z} \otimes \bar{U}\bar{Z}\bar{U}^+$, 我们可以对初始的编码态 $|\bar{0}\bar{0}\rangle$ 依次执行测量算子 $\bar{X} \otimes \bar{U}\bar{X}\bar{U}^+$ 和 $\bar{Z} \otimes \bar{U}\bar{Z}\bar{U}^+$, 以及相应的恢复算子, 则经过测量后输出的编码态将是 $\bar{X} \otimes \bar{U}\bar{X}\bar{U}^+$ 和 $\bar{Z} \otimes \bar{U}\bar{Z}\bar{U}^+$ 共同的 +1 本征态, 从而制备了 $|\bar{\Psi}_U\rangle$ 。由于制备 $|\bar{\Psi}_U\rangle$ 的测量算子和恢复算子都是 C_1 群中的元素, 故可以通过横向操作实现自动容错。

2.2 隐形传态构造法理论证明

首先我们将证明编码后隐形传态单元是如何实现编码态的隐形传递的。图 3 是在编码态 $|\bar{\varphi}\rangle$ 的 n 个量子比特上逐比特地执行单量子比特隐形传态单元的线路图。用 B_1, B_2, \dots, B_n 分别表示作用在编码态 $|\bar{\varphi}\rangle$ 的第 1, 2, \dots, n 个量子比特上的隐形传态单元。因此, 需要使用 n 个贝尔态的张量积作为预纠缠态 $|\bar{\Psi}\rangle^{\otimes n}$ 。图中左侧的大箭头表示它连接的两个量子态是一个 EPR 对或者说是一个贝尔态 $|\Psi\rangle$ 。

单个贝尔态是两个量子态的叠加态, 并且每一项是两位的量子态, 如 $|\Psi\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ 。由此可

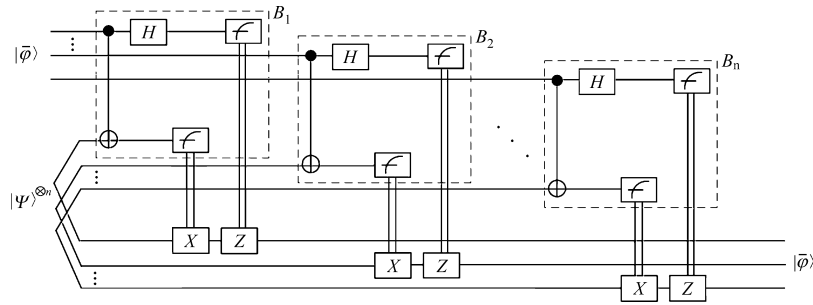


Fig.3 Circuit of teleporting encoded state

知， n 个贝尔态的张量积 $|\Psi\rangle^{\otimes n}$ 由 2^n 个量子态叠加而成，每一项是 $2n$ 位的量子态，并且前 n 位与后 n 位的量子状态一致。以 $n = 3$ 为例，3 个贝尔态的张量积后的量子态表示为

$$|\Psi\rangle^{\otimes 3} = |000\rangle|000\rangle + |001\rangle|001\rangle + |010\rangle|010\rangle + |011\rangle|011\rangle + |100\rangle|100\rangle + |101\rangle|101\rangle + |110\rangle|110\rangle + |111\rangle|111\rangle. \tag{4}$$

因此，利用逐比特执行单量子比特隐形传态单元的方式可以实现编码态 $|\varphi\rangle$ 的隐形传态功能。由于该图中的 n 个单量子比特隐形传态单元之间并未发生纠缠，因此我们将图 3 中量子逻辑门的位置做一些调整，得到图 4。可以看到，图 4 中的 n 个恢复算子 X 的组合以及 n 个 Z 算子的组合可以分别看做是编码态 $|\varphi\rangle$ 的逻辑算子 $\bar{X} = X \otimes X \cdots \otimes X$ 和逻辑算子 $\bar{Z} = Z \otimes Z \cdots \otimes Z$ ，而整个编码后的 Bell 测量过程用 \bar{B} 来表示。因此，定义该图的线路为编码后隐形传态。此时，我们将编码后的 Bell 态用 $|\bar{\Psi}\rangle$ 来表示，即 $|\bar{\Psi}\rangle = |\bar{0}\bar{0}\rangle + |\bar{1}\bar{1}\rangle$ 。其中， $|\bar{0}\rangle$ 和 $|\bar{1}\rangle$ 是与要传递的编码态 $|\varphi\rangle$ 属于同种稳定子码类型的量子态。并且 $|\bar{\Psi}\rangle$ 的稳定子生成元为 $\bar{X} \otimes \bar{X}$ 和 $\bar{Z} \otimes \bar{Z}$ 。由于该图中的每个一位量子逻辑门仅涉及到一个编码块中的一个量子逻辑位，而每个两位量子逻辑门仅涉及两个编码块中的相应的两个量子位，那么这些逻辑门将不会引起同一码块内的差错传播和增值，因此，编码后的隐形传态是容错的。利用图 4 编码后的隐形传态单元即可实现图 1 中的容错编码门构造。

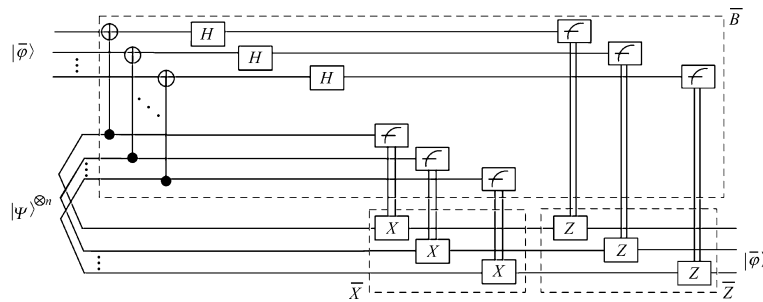


Fig.4 Circuit of encoded teleportation

3 基于隐形传态法的容错编码门应用举例

仅由 Hadmard 门，相位 P 门以及 CNOT 门就可以生成整个 Clifford 群中的所有量子门，因此根据第二节所述的利用隐形传态法构造容错编码门的原理，实现这三种量子门所对应的容错编码门。

3.1 容错编码门的构造

本节利用隐形传态法构造容错编码 \bar{H} 门。首先详述特殊辅助态的容错制备过程，然后代入具体的编码态以验证电路的正确性，最后计算隐形传态法构造编码 \bar{H} 门的电路开销，并与文献 [16] 中的构造开销进行比较。图 5 是利用隐形传态法构造量子容错编码 \bar{H} 门的电路，其中虚线框内是特殊辅助态 $|\bar{\Psi}_H\rangle$ 的容错制备过程。首先利用图 4 中编码后的隐形传态单元得到编码态 $|\varphi\rangle$ ，然后将假想的编码 \bar{H} 门作用在传输

得到的编码态 $|\varphi\rangle$ 上, 将假想 \overline{H} 门向前移, 移动后的恢复算子分别变为 \overline{Z} 和 \overline{X} , 并且由公式 (1) 可得特殊辅助态为

$$|\overline{\Psi}_H\rangle = (\overline{I} \otimes \overline{H})(|\overline{00}\rangle + |\overline{11}\rangle) = |\overline{00}\rangle + |\overline{01}\rangle + |\overline{10}\rangle - |\overline{11}\rangle, \quad (5)$$

其稳定子由公式 (2)、(3) 可知分别为 $\overline{Z} \otimes \overline{X}$, $\overline{X} \otimes \overline{Z}$ 。因此通过对 $|\overline{00}\rangle$ 逐个执行测量算子 $\overline{Z} \otimes \overline{X}$ 和 $\overline{X} \otimes \overline{Z}$ 的测量可以得到 $|\overline{\Psi}_H\rangle$, 实现过程如图 5 虚线框中所示。其中, 测量算子 $\overline{Z} \otimes \overline{X}$, $\overline{X} \otimes \overline{Z}$ 分别由一个 n 位的“猫”态, 即 $|Cat\rangle = |00\dots 0\rangle + |11\dots 1\rangle$ 来控制, 只有当“猫”态的测量值为 -1 时才对被测量系统执行恢复算子, 并且恢复算子要与其相应的测量算子满足反对易关系。图 5 中的恢复算子分别为 $\overline{I} \otimes \overline{Z}$, $\overline{Z} \otimes \overline{I}$ 。

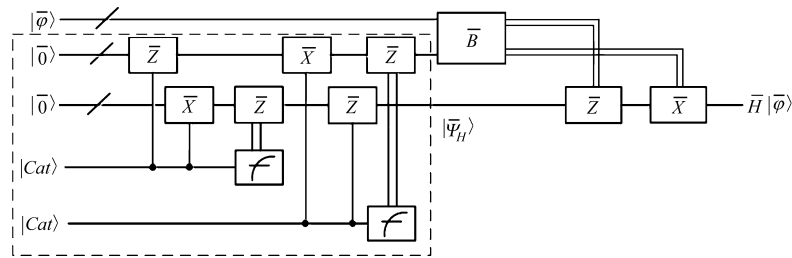


Fig.5 Teleportation method to construct the encoded gate \overline{H}

对隐形传态法构造编码 \overline{H} 门的电路进行验证, 假设编码态 $|\varphi\rangle = \alpha|\overline{0}\rangle + \beta|\overline{1}\rangle$, 则

$$\begin{aligned} (\alpha|\overline{0}\rangle + \beta|\overline{1}\rangle)|\overline{00}\rangle &\rightarrow (\alpha|\overline{0}\rangle + \beta|\overline{1}\rangle)(|\overline{00}\rangle \pm |\overline{01}\rangle) \rightarrow \\ &(\alpha|\overline{0}\rangle + \beta|\overline{1}\rangle)(|\overline{00}\rangle + |\overline{01}\rangle) \rightarrow \\ &(\alpha|\overline{0}\rangle + \beta|\overline{1}\rangle)[|\overline{00}\rangle + |\overline{01}\rangle \pm (|\overline{10}\rangle - |\overline{11}\rangle)] \rightarrow \\ &(\alpha|\overline{0}\rangle + \beta|\overline{1}\rangle)[|\overline{00}\rangle + |\overline{01}\rangle + |\overline{10}\rangle - |\overline{11}\rangle] \rightarrow \\ &|\overline{00}\rangle[\alpha(|\overline{0}\rangle + |\overline{1}\rangle) + \beta(|\overline{0}\rangle - |\overline{1}\rangle)] + |\overline{01}\rangle[\alpha(|\overline{0}\rangle - |\overline{1}\rangle) + \beta(|\overline{0}\rangle + |\overline{1}\rangle)] + \\ &|\overline{10}\rangle[\alpha(|\overline{0}\rangle + |\overline{1}\rangle) + \beta(|\overline{1}\rangle - |\overline{0}\rangle)] + |\overline{11}\rangle[\alpha(|\overline{0}\rangle - |\overline{1}\rangle) + \beta(-|\overline{0}\rangle - |\overline{1}\rangle)]. \end{aligned}$$

最后得到的是一个叠加态, 当对前两个编码块进行编码测量后, 可得到第三个编码块坍缩的状态, 故可以根据前两个编码块的 Bell 测量结果对第三个编码块执行相应的恢复算子: \overline{I} , \overline{Z} , \overline{X} , $\overline{Z}\overline{X}$, 可得到最后的输出态是 $\alpha(|\overline{0}\rangle + |\overline{1}\rangle) + \beta(|\overline{0}\rangle - |\overline{1}\rangle)$, 即完成了对编码态 $\alpha|\overline{0}\rangle + \beta|\overline{1}\rangle$ 的编码 \overline{H} 门变换。

下面将计算隐形传态法构造容错编码 \overline{H} 门的开销^[23,24], 并与 [16] 构造编码 \overline{H} 门的开销进行比较。这里, 主要考虑所使用的物理量子门数目以及编码 $|\overline{0}\rangle$ 态和“猫”态 $|Cat\rangle$ 的个数, 并且假设 $|\overline{0}\rangle$ 和 $|Cat\rangle$ 的制备以及测量是容错的。编码 \overline{H} 门的开销将如表 1 所示, 其中 n 是编码态 $|\varphi\rangle$ 的码长。

Table 1 Overhead of the constructing encoded gate \overline{H}

	物理门数	量子比特数
[16] 的方法	$72n$	7 个 $ \overline{0}\rangle$, 7 个 $ Cat\rangle$
隐形传态法	$12n$	2 个 $ \overline{0}\rangle$, 2 个 $ Cat\rangle$

由表 1 可以看出, 利用隐形传态法构造编码 \overline{H} 门比 [16] 的方法减少了 $60n$ 个物理量子门, 5 个 $|\overline{0}\rangle$ 编码块以及 5 个 $|Cat\rangle$ 辅助块, 因此, 基于隐形传态法的编码 \overline{H} 门构造开销比文献 [16] 的编码 \overline{H} 门构造开销有明显减少。

3.2 容错编码 \overline{P} 门的构造

编码 \overline{P} 门的构造过程与 \overline{H} 门类似。图 6 是根据隐形传态构造法实现容错编码 \overline{P} 门的线路, 其中虚线框内是特殊辅助态 $|\overline{\Psi}_P\rangle$ 的容错制备过程。

将假想 \bar{P} 门作用在隐形传输得到的编码态 $|\bar{\varphi}\rangle$ 上，然后向前移，移动过程中改变了编码后 Bell 测量的恢复算子，即 $\bar{P}\bar{X}\bar{P}^+ = -i\bar{Y}$, $\bar{P}\bar{Z}\bar{P}^+ = \bar{Z}$, 并且特殊辅助态为

$$|\bar{\Psi}_p\rangle = (\bar{I} \otimes \bar{P})(|\bar{00}\rangle + |\bar{11}\rangle) = |\bar{00}\rangle + i|\bar{11}\rangle, \tag{6}$$

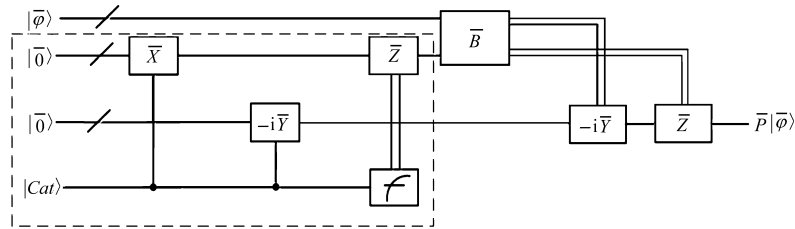


Fig.6 Teleportation method to construct the encoded gate \bar{P}

因此，可知 $|\bar{\Psi}_p\rangle$ 的稳定子生成元 M_i 以及对应的反对易算子 Q_i 分别为

$$M_1 = \bar{X} \otimes \bar{P}\bar{X}\bar{P}^+ = \bar{X} \otimes (-i\bar{Y}), \quad Q_1 = \bar{Z} \otimes \bar{I}, \tag{7}$$

$$M_2 = \bar{Z} \otimes \bar{P}\bar{Z}\bar{P}^+ = \bar{Z} \otimes \bar{Z}, \quad Q_2 = \bar{X} \otimes \bar{I}. \tag{8}$$

可以通过对初始态 $|\bar{00}\rangle$ 依次执行测量算子 M_1 和 M_2 得到 $|\bar{\Psi}_p\rangle$, 也可以通过对一个确定态 $|\bar{\Omega}\rangle = 1/\sqrt{2}(|\bar{\Psi}_p\rangle + Q_1|\bar{\Psi}_p\rangle)$, $i = 1, 2$, 然后仅执行与 Q_i 对应的 M_i 测量算子得到 $|\bar{\Psi}_p\rangle$ 。鉴于对开销的考虑，我们用后者来制备。利用 Q_1 算子得到一个确定态

$$|\bar{\Omega}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{\Psi}_p\rangle + Q_1|\bar{\Psi}_p\rangle) = |\bar{00}\rangle, \tag{9}$$

因此对该态仅执行测量算子 M_1 即可，如图 6 虚线框所示，同样，当“猫”态的测量值为 -1 时执行与 M_1 反对易的恢复算子去 Q_1 得到 $|\bar{\Psi}_p\rangle$ 。

之后，用同样的方法来计算隐形传态法构造编码 \bar{P} 门的开销，与文献 [16] 中的编码 \bar{P} 门构造电路的开销相比，减少了 $16n$ 个物理量子门，1 个 $|\bar{0}\rangle$ 编码块以及 2 个 $|\text{Cat}\rangle$ 辅助块。而编码 \overline{CNOT} 门是一个两位门，故需要两个编码后的隐形传态单元来构造，并且特殊辅助态是用两个编码的 GHZ 态 $|\bar{000}\rangle + |\bar{111}\rangle/\sqrt{2}$ 来制备的^[19]，因此，编码 \overline{CNOT} 门的构造开销将比文献 [16] 的方法多了 $19n$ 个物理量子门。因此，本文提出的基于隐形传态法构造量子一位容错编码门的方法是有效可行的。

4 结 语

本文利用隐形传态的纠缠特性提出了一般稳定子码量子容错编码门的构造方法。隐形传态构造方法仅需要容错制备一个已知的特殊辅助态，将该特殊辅助态与要执行的编码门的编码态进行编码后 Bell 测量，从而实现编码门的么正变换，同时，构造电路中的各部分可以实现自动容错。以编码 \bar{H} 门为例，对隐形传态法构造编码门的过程进行了详细说明，并验证了其正确性，之后给出了编码 \bar{P} 门的实现过程及其实现电路。通过对隐形传态构造法的开销计算，可以看到该构造法获得的一位容错编码门较文献 [16] 中的一般稳定子码容错编码门实现方法的开销有明显减少。因此，隐形传态法是一种有效可行的构造量子稳定子码容错编码门的方法。

参考文献：

[1] Deutsch D. Quantum computational networks [C]. *Proceedings of the Royal Society A*, 1989, 425: 73-90.

- [2] Shor P W. Fault-tolerant quantum computation [C]. *Proceedings of the 37th Symposium on Fundamentals of Computer Science*, Los Alamitos, 1996, 56-65.
- [3] Preskill J. Reliable quantum computers [C]. *Proceedings of the Royal Society A*, 1998, 454: 385-410.
- [4] Knill E. Quantum computing with very noisy devices [J]. *Nature*, 2004, 434: 39-44.
- [5] Gottesman D. An introduction to quantum error correction and fault-tolerant quantum computation [C]. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, 2010, 68: 24-70.
- [6] Li Y, Barrett S D, Stace T M, *et al.* Fault-tolerant quantum computation with nondeterministic gates [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, 105: 250502.
- [7] Fujii K, *et al.* Fault-tolerant topological one-way quantum computation with probabilistic two-qubit gates [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, 105: 250503.
- [8] Chow J M, Gambetta J M, Corcoles A D, *et al.* Complete universal quantum gate set approaching fault-tolerant thresholds with superconducting qubits [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2012, 109: 060501.
- [9] Su xiaoqin, Guo guangcan. Quantum communications and quantum computation [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2004, 21(6): 6-13 (in Chinese).
- [10] Li Chengzu, Chen Pingxing, *et al.* *Research on Quantum Computer (Rudin)-Correcting and Fault-Tolerant Computation* [M]. Beijing: Science Press, 2011: 467-471.
- [11] Lü Hongjun, Wu Tianhao, Peng Fei, *et al.* Research on the quantum reversible logic circuits with compound method [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2010, 27(2): 174-179 (in Chinese).
- [12] Lü Hongjun, Guo Junwang, Peng Fei, *et al.* n -bit quantum gate accomplished by two-bit quantum gates [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2010, 27(1): 26-30 (in Chinese).
- [13] Bravyi S, Kitaev A. Universal quantum computation with ideal Clifford gates and noisy ancillas [J]. *Phys. Rev. A*, 2005, 71: 022316.
- [14] Eastin B, Knill E. Restriction on transversal encoded quantum gate sets [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, 102: 110502.
- [15] Zeng B, Cross A, Chuang I L. Transversality versus universality for additive quantum codes [J]. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2011, 57: 6272-6284.
- [16] Gottesman D. A theory of fault-tolerant quantum computation [J]. *Physical Review A*, 1998, 57: 127-137.
- [17] Zha Xinwei. Two schemes of teleporting an arbitrary four-particle entangled state [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2008, 25(2): 186-190 (in Chinese).
- [18] Gottesman D, Chuang I L. Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations [J]. *Nature*, 1999, 402: 390-393.
- [19] Gottesman D, Chuang I L. Quantum teleportation is a universal computational primitive [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1999, 101: 240501.
- [20] Zhou X L, Debbie W L, Chuang I L. Methodology for quantum logic gate construction [J]. *Phys. Rev. A*, 2000, 62: 052316.
- [21] Steane A M, Ibinson B. Fault-tolerant logical gate networks for CSS codes [J]. *Phys. Rev. A*, 2005, 62: 052316.
- [22] Goebel A, Wagenknecht C, Zhang Q, *et al.* Teleportation-based controlled-not gate for fault-tolerant quantum computation [OL]. 2010, <http://arxiv.org/abs/0809.3583>.
- [23] Steane A M. Overhead and noise threshold of fault-tolerant quantum error correction [J]. *Phys. Rev. A*, 2003, 68: 042322.
- [24] Paetznick A, Reichardt B W. Fault-tolerant ancilla preparation and noise threshold lower bounds for the 23-qubit Golay code [OL]. 2011, <http://arxiv.org/abs/1106.2190v1>.