

非线性有限元混合法分析 油井封隔器胶筒

范家齐 曲宪刚 杨晓翔

(大庆石油学院)

提 要

油井封隔器胶筒是由橡胶类材料制成的。橡胶类材料构件的几何形态和材料性能都是非线性的，材料的非线性关系一般用三个变形张量不变量表述。本文基于势能驻值原理，采用整体 *Lagrange* 法，建立适用于橡胶类材料的大位移和大应变的增量形式的非线性有限元混合法的计算列式。用四结点四边形等参数单元，对受均匀内压无限大厚壁圆筒进行计算，其结果与精确解符合很好，表明这种方法是有效和可靠的。油井封隔器胶筒的位移、应力和接触压力的计算结果表明：(1) 胶筒外壁的上角部位有被挤上翘的趋势，(2) 胶筒内的应力基本上是受压的，(3) 胶筒的内外壁都有一定的接触压力，计算方法为合理设计封隔器胶筒提供了理论基础。

一、非线性有限元混合法计算列式⁽¹⁾

非线性轴对称弹性橡胶体的应变矢量 ϵ 和应力矢量 s 分别为：

$$\epsilon = [\epsilon_{11} \ \epsilon_{33} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{12}]^T = [\gamma_{11} \ \gamma_{33}/r^2 \ \gamma_{22} \ 2\gamma_{12}]^T \quad (1)$$

$$s = [s^{11} \ s^{33} \ s^{22} \ s^{12}]^T = [t^{11} \ r^2 t^{33} \ t^{22} \ t^{12}]^T \quad (2)$$

上两式中， γ_{ii} 为 *Green* 应变张量， ϵ_{ii} 为其物理分量， t^{ij} 为 *Kirchhoff* 应力张量， s^{ij} 为其物理分量；其中1为径向，2为轴向，3为环向。

Kirchhoff 应力张量 t^{ij} 与应变能密度 W 之间的关系为：

$$t^{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \quad (3)$$

对于不可压缩的弹性橡胶体，^[2]

$$W = \bar{W}(I_1, I_2) + h(I_3 - 1) \quad (4)$$

根据 *Mooney* 理论

$$\bar{W}(I_1, I_2) = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (5)$$

上两式中， I_1 、 I_2 和 I_3 为变形张量第一、二和三不变量，它们为 γ_{ij} 的函数， h 为水静压力， C_1 和 C_2 为橡胶材料常数，由实验确定。

不计体力，弹性橡胶体的势能泛函^[3]为：

$$\pi = \int_V W dv - \int_{S_\sigma} \bar{T}^i u_i dS \quad (6)$$

式中 W 为应变能密度，由 (4)、(5) 式表示； \bar{T}^i 为已知面力； u_i 为位移； V 为变形前的体积； S_σ 为变形前已知外力的那部分边界。

势能泛函中的值用初始值和增量值表示

$$\left. \begin{aligned} W &= W_0 + \Delta W \\ u_i &= u_{i0} + \Delta u_i \\ \bar{T}^i &= \bar{T}_0^i + \Delta \bar{T}^i \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

由 (4)，(5) 式可知， W 为 γ_{ij} 和 h 的函数， ΔW 可表示为

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \Delta \gamma_{ij} + \frac{\partial W}{\partial h} \Delta h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} \Delta \gamma_{ij} \Delta \gamma_{kl} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial h^2} \Delta h^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial h} \Delta \gamma_{ij} \Delta h \end{aligned}$$

利用 (3)，(4) 式，并考虑 (1) 和 (2) 式，得

$$\Delta W = S^{ij} \Delta \varepsilon_{ij} + (I_3 - 1) \Delta h + \frac{1}{2} C^{ijkl} \Delta \varepsilon_{ij} \Delta \varepsilon_{kl} + Q^{ij} \Delta \varepsilon_{ij} \Delta h \quad (8)$$

式中

$$C^{ijkl} = \frac{\partial S^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$$

$$Q^{ij} = \frac{\partial S^{ij}}{\partial h}$$

利用应变和位移的关系式^[2]和 (1) 式，应变增量矢量 $\Delta \varepsilon$ 可以分解成线性部分 $\Delta \xi$ 和非线性部分 $\Delta \eta$ ，即

$$\Delta \varepsilon = \Delta \xi + \Delta \eta = \left(B + \frac{1}{2} A (\Delta u) \right) \Delta \varphi \quad (9)$$

式中

$$\Delta \varphi = \left[\frac{\partial \Delta u}{\partial r} \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial r} \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial z} \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial z} \quad \frac{\Delta u}{r} \right]^T \quad (10)$$

$$B = H + A(u)$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{u}{r} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} & 0 \end{pmatrix}$$

在上面的式子中已使用 $u = u_1$ 和 $w = u_2$ 。

将 (9) 式代入 (8) 式, 并和 (7) 式一起代入 (6) 式, 经运算并忽略高阶小量, 最后用矩阵形式可表示为:

$$\pi(\Delta u, \Delta h) = \int_V [\Delta \xi^T S + \frac{1}{2} \Delta \varphi^T F \Delta \varphi + (I_3 - 1) \Delta h + \frac{1}{2} \Delta \xi^T C \Delta \xi + \Delta \xi^T Q \Delta h] dv - \int_{S_0} \Delta u^T (\bar{T} + \Delta \bar{T}) ds + \pi_0 \quad (11)$$

式中 $S = 2(C_1 + 2C_2 + h)P + [2(C_2 + h)V + 2hW] \epsilon$

$$F = \begin{pmatrix} s^{11} & & & & \\ 0 & s^{11} & & & \text{对 称} \\ s^{12} & 0 & s^{22} & & \\ 0 & s^{12} & 0 & s^{22} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^{33} \end{pmatrix}$$

$$C = 2(c_2 + h)V + 4hW$$

$$Q = 2P + 2(V + W) \epsilon$$

$$P = [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & & & & \text{对 称} \\ 2 & 0 & & & \\ 2 & 2 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & & & & \text{对 称} \\ 2e_{22} & 0 & & & \\ 2e_{33} & 2e_{11} & 0 & & \\ 0 & -e_{12} & 0 & -e_{33} & \end{pmatrix}$$

π_0 是与 Δu 和 Δh 无关的量。

势能驻值原理可表示为: 满足位移边界条件 $u_{i0} + \Delta u_i = \bar{u}_{i0} + \Delta \bar{u}_i$ (在 S_0 上), 其势能泛函取驻值。

为建立非线性有限元混合法计算列式。设单元位移增量矢量 $\Delta u = [\Delta u \ \Delta w]^T$ 为:

$$\Delta u = N \Delta q \quad (12)$$

式中 N 为形函数矩阵; Δq 为单元结点位移增量矢量。于是, (10) 和 (9) 式可表示为:

$$\Delta \varphi = G \Delta q \quad (13)$$

$$\Delta \xi = B G \Delta q \quad (14)$$

式中

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ N \end{matrix}$$

设单元内的水静压力 h 为常量, 将 (13) 和 (14) 式代入 (11) 式, 得到单元的势能泛函为:

$$\begin{aligned} \pi^e(\Delta q, \Delta h) = & \frac{1}{2} \Delta q^T K \Delta q + \Delta q^T M + \Delta q^T L \Delta h + X \Delta h \\ & - \Delta q^T (R + \Delta R) + \pi_0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{式中 } K = \int_{V_e} (G^T B^T C B G + G^T F G) dv$$

$$M = - \int_{V_e} G^T B^T S dv + \int_{S_{\sigma\sigma}} N^T T ds$$

$$L = \int_{V_e} G^T B^T Q dv$$

$$\Delta R = \int_{S_{\sigma\sigma}} N^T \Delta T ds$$

$$X = \int_{V_e} (I_3 - 1) dv$$

对单元势能泛函取驻值

$$\delta \pi^e = 0 \quad (16)$$

即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \pi^e}{\partial \Delta q} &= 0 \\ \frac{\partial \pi^e}{\partial \Delta h} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

由上式可得有限元的单元基本方程为:

$$\begin{bmatrix} K & L \\ L^+ & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta R + M \\ -X \end{Bmatrix} \quad (18)$$

利用有限元求解方法, 便能求得结点位移矢量 q , 应力矢量 S 和结点反力矢量 R 。

从上述分析可知, K 是单元切线刚度矩阵, 除了与材料常数 c_1 和 c_2 有关外, 还与水静压力 h 有关。(18) 式中的 M 为不平衡力的修正项, $-X$ 为不可压缩性偏差的修正项。由于引入

这些修正项, 可采用简单增量解法求解实际问题。

二、实 例

受均匀内压 p 的无限长厚壁圆筒。载荷、几何尺寸、单元划分和约束如图 1 所示。已知内压 $p=883.81\text{kPa}$, 圆筒内半径 $R_1=17.78\text{cm}$, 外半径 $R_2=47.31\text{cm}$, 橡胶材料常数 $c_1=551.52\text{kPa}$, $c_2=137.88\text{kPa}$ 。用简单增量法求解, 其载荷分为 $N=10、20$ 和 40 个增量段。

采用单元为四结点四边形等参数单元, 其形函数矩阵 N 为: [4]

$$N = [N_1 \mid N_2 \mid N_3 \mid N_4] \quad (19)$$

式中 I 为二阶单位矩阵,

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (20)$$

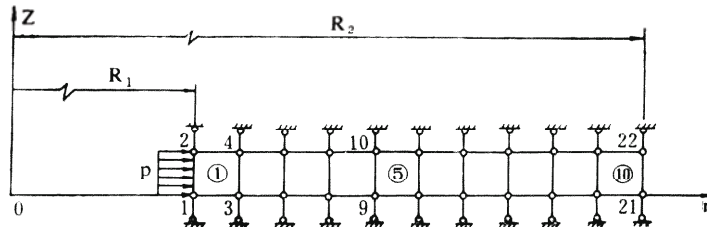


图 1 厚壁圆筒载荷、单元划分和约束

Fig. 1 Loading, elements division and constraints of a thick walled cylinder

圆筒内壁的径向位移 u , 单元①和⑤形心处的径向应力 σ_r 、环向应力 σ_θ 和轴向应力 σ_z 随载荷增量段 N 的变化情况, 分别列于表 1、2 和 3 中 [5]。

表 1 内壁结点的径向位移 u (cm)

Table 1 The Radial Displacement u of Interior Node (cm)

N	有限元解	精确解	误差%
10	12.654	12.725	-0.56
20	12.697		-0.22
40	12.716		-0.07

表 2 单元①形心处的应力 (kPa)

Table 2 The Stresses at Centroid of Element① (kPa)

N	σ_r			σ_θ			σ_z		
	有限元解	精确解	误差%	有限元解	精确解	误差%	有限元解	精确解	误差%
10	-783.990	-788.697	-0.60	2331.475	2359.324	-1.18	353.604	357.331	-1.06
20	-787.030		-0.21	2352.557		-0.29	357.135		-0.08
40	-788.402		-0.04	2362.065		0.12	358.802		0.39

表3 单元⑤形心处的应力 (kPa)
Table 3 The Stresses at Centroid of Element⑤ (kPa)

N	σ_r			σ_θ			σ_z		
	有限元解	精确解	误差%	有限元解	精确解	误差%	有限元解	精确解	误差%
10	-290.258	-292.317	-0.70	1109.059	1123.375	-1.28	344.485	312.909	-1.19
20	-291.729		-0.19	1118.668		-0.42	311.733		-0.39
40	-292.513		0.07	1123.081		-0.03	312.811		-0.02

从表中可以看出, 位移和应力的有限元解与精确解是符合得很好的, 并随着增量段 N 的增加收敛于精确解。即使在 $N=10$ 时, 其有限元解的误差也只有 1% 左右, 这表明, 利用本方法来计算大位移和大应变的橡胶类材料是有效和可靠的。

三、油井封隔器胶筒的计算

胶筒是油井封隔器主要的工作部件。胶筒的位移 (主要是径向位移)、应力和接触压力是胶筒设计中需要考虑的重要力学参数。胶筒在受载条件下其位移和应变都是很大的, 所以不能用线性理论, 必须用非线性理论分析计算。封隔器胶筒计算的说明如下:

1. 胶筒的实际几何形状如图 2 所示, 为简化采用图 3 的计算模型, 其中 ED 为对称面。
2. 胶筒的载荷是由刚性板作用在胶筒的顶表面 (初始为 AB 面) 上, 刚性板的外半径与胶筒外半径相同。所以, 我们采用均布载荷 p 作用于胶筒顶表面上, 并使顶表面上的轴向位移强制相等 (图 3)。
3. 采用四结点四边形等参数单元, 胶筒共分 35 个结点, 27 个单元, 为防止形状畸变、

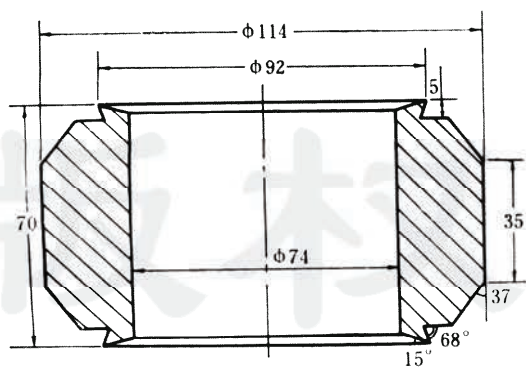


图 2 胶筒实际几何形状

Fig. 2 The actual geometric shape of the sealing elements

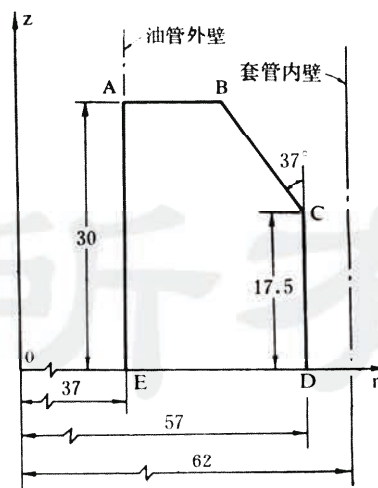


图 3 胶筒计算模型

Fig. 3 Calculation model of the elastometric cylinder

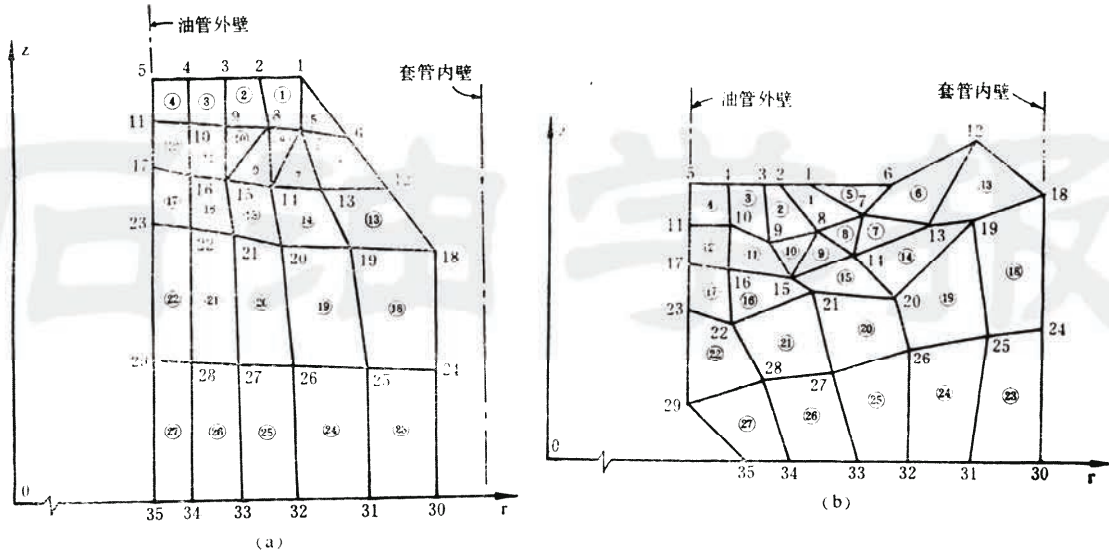


图 4 胶筒变形前后的单元和结点

(a) 变形前; (b) 变形后

Fig. 4 Finite elements and nodes of the elastometric cylinder before and after deformation

其中5个单元采用退化的三角形单元^[6], 单元和结点编号如图4(a)所示。

4. 橡胶材料常数, 根据实验测定, $c_1=1078.66\text{kPa}$, $c_2=392.24\text{kPa}$ 。

5. 边界条件 (图3、4)

(1) 胶筒顶表面上作用有均布载荷 p , 并使其面上各结点的轴向位移 w_i 相等。

(2) $E0$ 对称面上各结点的轴向位移 $w_i=0$ 。

(3) 胶筒内壁 (AE 面) 与油管外壁和胶筒外壁 (CD 面) 与套管内壁之间有接触和脱离两种可能性。若接触则必须有径向反力作用在胶筒上, 若脱离则径向反力必为零。因此这是一个判断迭代过程, 即

AB 面上所有结点必须满足:

$$u_i=0, R_i>0$$

或 $u_i>0, R_i=0$

同样, CD 面上所有结点必须满足

$$u_i=\delta, R_i<0$$

$$u_i<\delta, R_i=0$$

上述式中, u_i 为 i 结点的径向位移, R_i 为 i 结点的径向接触反力, 符号与径向坐标 r 一致为正, 相反为负。 δ 为胶筒外壁与套管内壁间的初始间隙。

6. 计算结果讨论用五个载荷增量段, 总载荷为 40kN 对封隔器胶筒在 IBM-PC 机上进行了计算, 其结果为: (1) 结点位移列于表4, 胶筒变形后的形状如图4(b)所示。(2)

①曲宪刚, 橡胶轴对称体的有限元分析, 大庆石油学院研究生毕业论文, 1987。

表4 结点位移 (cm)
Table 4 The Displacement of Node (cm)

结点号	径向位移 u	轴向位移 w	结点号	径向位移 u	轴向位移 w
1	-0.2411	-1.0300	19	0.5739	-0.0083
2	-0.1241	-1.0300	20	0.5347	-0.6194
3	0.0020	-1.0300	21	0.2996	-0.6672
4	0.0032	-1.0300	22	0.0595	-0.9426
5	0.0000	-1.0300	23	0.0000	-0.9092
6	0.0547	-0.6300	24	0.5000	0.0637
7	0.1765	-0.8537	25	0.6254	-0.0136
8	0.0588	-1.0131	26	0.5880	-0.1289
9	0.0146	-1.0897	27	0.4261	-0.3480
10	0.0340	-0.9924	28	0.2753	-0.3830
11	0.0000	-1.0228	29	0.0000	-0.5984
12	0.3641	0.0912	30	0.5000	0.0000
13	0.5001	-0.5026	31	0.4960	0.0000
14	0.3366	-0.7451	32	0.5613	0.0000
15	0.1556	-1.0037	33	0.6031	0.0000
16	0.0171	-0.9670	34	0.4645	0.0000
17	0.0000	-0.9810	35	0.4140	0.0000
18	0.5000	0.1709			

单元形心处的径向应力 σ_r 、环向应力 σ_θ 和轴向应力 σ_z 列于表5。(3)胶筒内外壁上的径向接触压力 q 如图5所示。它是由结点接触反力经数学处理而得。

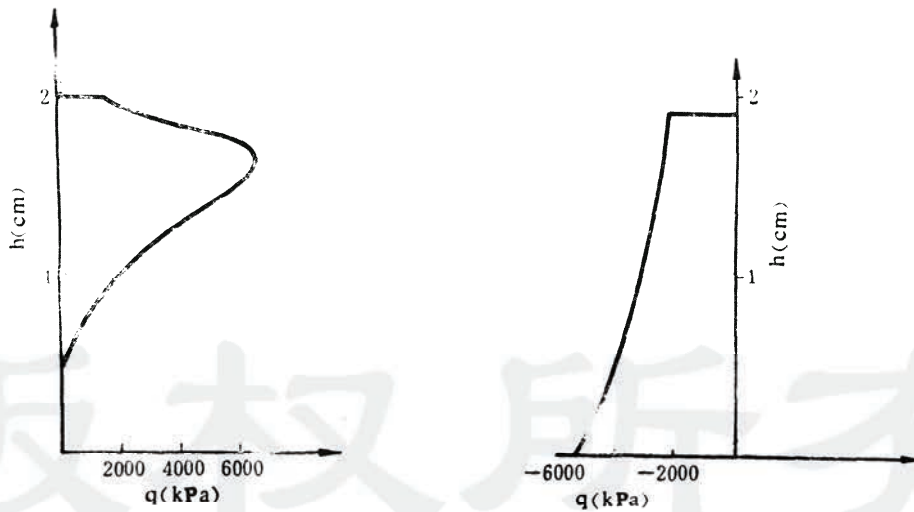


图5 胶筒内外径向接触压力

Fig. 5 The radial contact pressure on the internal wall and external wall of the elastomeric-cylinder

从上述结果可以看出：(1) A点(图3)的轴向位移为12.03mm，轴向应变为40.1%，D点的径向位移为5mm，径向应变为25%；这确实是一个大位移和大应变问题。(2)在受

表5 单元形心上的应力 (kPa)
Table 5 The Stresses at Centroid of Element (kPa)

单元号	径向应力 σ_r	环向应力 σ_θ	轴向应力 σ_z
1	-13304.3300	-8810.3160	-12546.7900
2	-8111.6830	-7186.6200	-6588.6060
3	-6934.0340	-6151.1240	-6592.7150
4	-6453.1150	-6873.8880	-7306.8910
5	-11639.8500	-9981.3600	-9724.1010
6	-7415.9010	-7429.9220	-8806.7040
7	-6756.5200	-5172.4250	-12119.7900
8	-3042.8990	-2688.2290	-8857.2480
9	-15767.1100	-13141.4800	-22785.6900
10	-3725.9890	-4304.1670	-5690.8710
11	-7467.7160	-6682.7570	-9633.8990
12	-5851.1560	-6383.4780	-7078.2350
13	483.7604	921.5767	-789.3633
14	-3174.5530	-5218.9130	-9246.2670
15	-1039.2910	-3511.5670	-8229.7940
16	-1198.3480	-4715.3490	-8051.8430
17	-5325.5550	-6015.4500	-6911.4140
18	-2947.4280	-1132.6840	-1592.9100
19	-2847.0860	-1772.0940	-6126.3060
20	-831.5527	-3804.3250	-7526.6150
21	62.4956	-3534.8370	-7005.2300
22	1155.8320	-3160.7460	-6354.3190
23	-4149.0180	-2722.4450	-3286.7850
24	-3954.6030	-2836.7580	-4259.1790
25	-3012.4520	-3239.7370	-5598.8860
26	-2671.0650	-3953.7900	-7591.2140
27	-2790.2230	-5859.5110	-10479.4600

载变形过程中,胶筒外壁的上角部位有被挤上翘的趋势(图4)。(3)胶筒内的应力基本上受压的(表5)。(4)胶筒内外壁除35点外全部接触,并有一定的接触压力,这是保证密封所必需的(图5)。(5)采用不同的封隔器胶筒的几何尺寸和初始间隙 δ ,就能得到表示不同应力分布和接触压力分布的变形图。这对合理设计封隔器胶筒提供了理论计算基础。

四、结 论

1. 对于大位移和大应变的不可压缩的Mooney型橡胶类材料,建立了增量形式的非线性有限元混合法的计算列式,并编制了程序。
2. 通过对受均匀内压的无限长厚壁圆筒进行计算,表明由这种方法编制的计算程序是有效和可靠的。
3. 对油井封隔器胶筒的位移、变形图、应力和接触压力进行了计算,并对结果进行了讨论,为合理设计封隔器胶筒提供了理论计算基础。

(本文收到日期1988年12月26日)

参 考 文 献

- (1) 范家齐, 增量原理有限元分析非线性橡胶类材料, 固体力学学报, 1989, 3
- (2) Oden, J. T., Finite Element of Nonlinear Continuum, McGraw-Hill, 1972
- (3) Scharnhorst T. and Pian T. H. H., Finite Element Analysis of Rubber-like Materials by a Mixed Model, Int. J. Num. Meth. Engag. , 12, 1978
- (4) 王惠德, 冯家聪和范家齐, 弹性力学-解析法和数值法, 哈尔滨工业大学出版社, 1987
- (5) 范家齐, 邹龙庆, 橡胶类零件的位移和应力的有限元分析, 特种橡胶制品, 1988, 1
- (6) R. D. 库克, 有限元分析的概念和应用, 科学出版社, 1981

NON - LINEAR MIXED FINITE ELEMENT METHOD FOR THE ANALYSIS OF ELASTOMERIC SEALED ELEMENT IN OIL WELL PACKER

Fan Jiaqi, Qu Xiangang, Yang Xiaoxiang

(Daqing Petroleum Institute)

Abstract

The sealing elements in an oil well packer are made of elastomeric materials with non-linear geometry and material behavior. The non-linear relation of the materials is generally expressed in terms of a deformation tensor with three invariants of in this paper, on the basis of the principle of stationary potential energy and total Lagrange formulation, an incremental non-linear mixed finite element formulations of large displacement and large strain have been developed for elastomeric materials. Four-node quadrilateral isoparametric ring elements are used to analyze an infinitely long thick-walled cylinder subjected to internal pressure. The computed results agree very closely with the exact solution, and the procedure is effective and reliable. The computations of the displacements, stresses and contact pressures are given which shows that: (1) the sealed tube is compressed on the external wall in the upper corner to turn upwards gradually; (2) the stresses in the sealed tube are basically compressible; (3) there are certain contact pressures on the internal wall and external wall of the sealing elements. The findings are useful for the rational design of the elastomeric sealing elements.