

文章编号:1007-2861(2007)06-0732-04

受内压热超弹性球壳的不稳定性

任九生^{1,2}, 程昌钧^{1,2}

(1. 上海大学 理学院, 上海 200444; 2. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

摘要: 应用有限变形弹性理论分析了受内压作用的不可压热超弹性球壳发生非对称变形的不稳定性问题. 当内压较小时, 薄壁球壳发生对称的均匀膨胀变形; 当内压大于某一临界值时, 产生复杂的非对称变形, 其一部分膨胀变形很大, 而另一部分仅仅是轻微膨胀, 且其形状逐渐远离球形, 且此时的变形是不稳定的. 厚壁球壳总是发生稳定的均匀膨胀变形. 根据球壳的变形曲线, 给出了球壳发生不稳定变形的临界厚度. 同时, 讨论了温度场对球壳变形的影响.

关键词: 不可压热超弹性材料; 温度的影响; 非对称变形; 不稳定性; 临界厚度

中图分类号: O 343 **文献标识码:** A

Instability of Inflated Incompressible Thermo-hyperelastic Spherical Shells

REN Jiu-sheng^{1,2}, CHENG Chang-jun^{1,2}

(1. School of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China;

2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

Abstract: Instability of asymmetric deformations of an incompressible thermo-hyperelastic spherical shell, subjected to internal pressure, is examined within the framework of finite elasticity. When the inflation pressure is small, the thin-walled shell undergoes a symmetric inflation. But when the inflation pressure is larger than a certain critical value, the thin-walled shell undergoes an asymmetric deformation. One part becomes highly distended while the rest remains lightly inflated and the shell takes up an aspherical shape. But the thick-walled shell always undergoes a symmetric inflation even if the pressure reaches a very high value. A critical thickness for the shell to take an instability deformation is given based on the change regulation of the deformation curves along with its slope. Furthermore, the effect of temperature on the deformation is discussed.

Key words: incompressible thermo-hyperelastic material; effect of temperature; asymmetric deformation; instability; critical thickness

由于材料的不稳定性问题在材料的破坏过程中有关键的作用, 所以近年来在工程领域及高科技领域中应用日益广泛的超弹性材料的稳定性问题受到极大关注^[1]. 超弹性材料问题的多解性属于材料不

稳定性问题的一个重要方面^[2], 著名的例子有气球的膨胀问题^[3]等. 受内压作用的薄壁球壳也可产生不稳定的变形^[4]. 另一方面, 美国挑战者号航天飞机因“O”形密封圈的缘故造成的失败使人们认识到了

收稿日期: 2006-09-08 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10402018); 上海市教委青年基金资助项目(04AC90)

通信作者: 任九生(1970~), 男, 副教授, 博士, 研究方向为非线性固体力学. E-mail: jsren@shu.edu.cn

解橡胶热力学性质的重要性,其热力学性质由热超弹性关系描述^[5].

本工作的目的是进一步了解受内压作用的球壳变形的不稳定性问题.对受内压作用的不可压广义 Gent 热超弹性球壳,由不可压条件得到球壳的变形函数,进而得到球壳所受内压和其变形主伸长之间的关系.由计算结果可知,当内压较小时,球壳均匀膨胀,发生稳定的对称变形;当内压大于某一临界值时,球壳产生复杂的非对称变形,其一部分膨胀变形很大,而另一部分仅仅是轻微膨胀,球壳的形状则逐渐远离球形;通过能量比较发现此时的变形是不稳定的.但受内压作用的厚壁球壳,不论压力如何,总是发生稳定的对称的均匀膨胀变形.根据球壳的变形曲线及其斜率的变化规律,给出了球壳可以发生不稳定性变形的临界厚度.同时,讨论了球壳中均匀或不均匀分布的温度场对其变形的影响.

1 问题的描述

考察一个受内压 q 作用,内半径为 A ,外半径为 B 的不可压热超弹性球壳.假设变形前、后球壳的构形分别由原点在球壳中心的球坐标系 (R, Θ, Φ) 和 (r, θ, φ) 描述,这样球壳的变形模式函数可表示为

$$r = r(R) > 0, A \leq R \leq B, \theta = \Theta, \varphi = \Phi, \quad (1)$$

式中, $r(R)$ 为待定函数.相应的变形梯度张量 F 为

$$F = \text{diag}(\dot{R}(R), \frac{r(R)}{R}, \frac{r(R)}{R}) = \text{diag}(\lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_\varphi), \quad (2)$$

式中,主伸长

$$\lambda_r = \dot{r}(R) = \frac{dr}{dR}, \lambda_\theta = \lambda_\varphi = \frac{r(R)}{R}. \quad (3)$$

由材料的不可压条件 $\lambda_r \lambda_\theta \lambda_\varphi = 1$, 可得

$$r(R) = (R^3 + a^3 + A^3)^{\frac{1}{3}}, \quad (4)$$

考虑广义不可压 Gent 热超弹性材料^[5-6],

$$W = -\frac{EJ_m}{6} \ln\left(1 - \frac{J_1}{J_m}\right) + \rho C_3 T \ln \frac{T}{T_0} + 2C_4(T - T_0)J_1, \quad (5)$$

式中, $J_1 = \lambda_r^2 + \lambda_\theta^2 + \lambda_\varphi^2 - 3$, 材料常数 $J_m = 97.2$, $E = 3.5 \text{ MPa}$, $C_3 = 1 \ 506 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 950 \text{ kg m}^{-3}$, $C_4 = -6.36 \times 0.424 \ 5 \times 10^{-4} \text{ MPa K}^{-1}$, 参考温度 $T_0 = 300 \text{ K}$.

相应的非零 Cauchy 应力分量为

$$\tau_{rr}(R) = \lambda_r \frac{\partial W}{\partial \lambda_r} - p(R),$$

$$\tau_{\theta\theta}(R) = \lambda_\theta \frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} - p(R),$$

$$\tau_{\varphi\varphi}(R) = \lambda_\varphi \frac{\partial W}{\partial \lambda_\varphi} - p(R), \quad (6)$$

式中, p 为待定的静水压力常数.

忽略体积力时球壳中应力分量满足的平衡方程为

$$\frac{d\tau_{rr}}{dR} + \frac{2\dot{r}(R)}{r(R)}[\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}] = 0, \quad (7)$$

球壳的边界条件可写为

$$\tau_{rr} = -p, R = A, \tau_{rr} = 0, R = B. \quad (8)$$

假设球壳中存在无源定常球对称温度场 $T(R)$,

则

$$\left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d}{dR}\right)T(R) = 0. \quad (9)$$

如给定边界上温度条件 $T_{R=A} = T_A$, $T_{R=B} = T_B$,

可求得相应的温度场

$$T(R) = \frac{BT_B - AT_A}{B - A} + \frac{1}{R} \frac{AB(T_A - T_B)}{B - A}. \quad (10)$$

2 求解和结果

引入变换

$$\nu = \nu(R) = \frac{r(R)}{R} = \left(1 + \frac{a^3 - A^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (11)$$

则有

$$\lambda_\theta = \lambda_\varphi = \nu, \lambda_r = \nu^{-2}. \quad (12)$$

将式(5)代入式(6),再代入式(7),积分可得

$$p(R) - p(A) = \frac{E}{3} \frac{\nu^{-4}}{1 - J_1 J_m^{-1}} + 4C_4(T - T_0)\nu^{-4} + J(R), \quad (13)$$

式中,

$$J(R) = 2 \int_A^R \left(\frac{E}{3} \frac{\nu^{-7r} - \nu^{-1}}{1 - J_1 J_m^{-1}} + 4C_4(T - T_0)(\nu^{-7r} - \nu^{-1}) \right) \frac{ds}{s}. \quad (14)$$

将式(13)代入边界条件式(8),可得

$$p = 2 \left[\int_{\nu(B)}^{\nu(A)} \frac{(\nu^{-5} - \nu)}{1 - J_1 J_m^{-1}} + 4C_4(T - T_0)(\nu^{-5} - \nu) \right] \frac{d\nu}{1 - \nu^3}, \quad (15)$$

式中, $\nu(B) = \left(1 + \frac{a^3 - A^3}{B^3}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\nu(A) = \frac{a}{A}$.

由此可得给定内压相应的球壳的内表面处的变形 $\lambda = \nu(A)$. 如令 $\eta = A/B$, 则球壳外表面处

$$\nu(B) = (1 + \lambda^3 \eta^3 + \eta^3)^{\frac{1}{3}}, \quad (16)$$

在参考温度时,式(15)的数值结果对应不同的壁厚 $\eta = 0.99, 0.7, 0.5, 0.1$ 的变形曲线分别示于图 1(a)~(d), 给定壁厚 $\eta = 0.5$, 相应不同的温度场的变形曲线示于图 1(c).

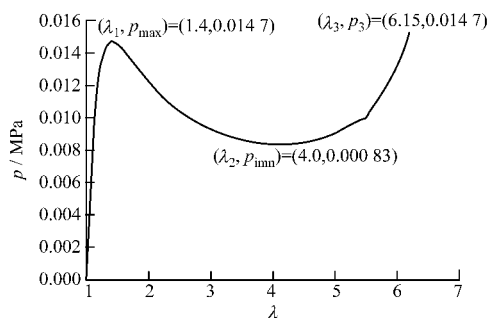
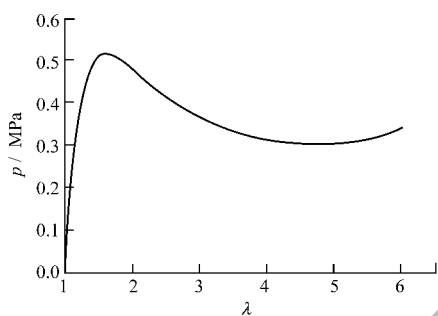
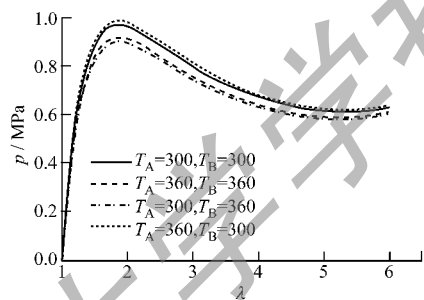
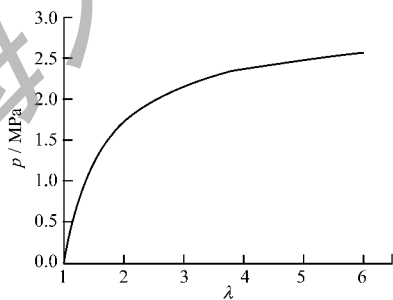
(a) $\eta = 0.99$ (b) $\eta = 0.7$ (c) $\eta = 0.5$ (d) $\eta = 0.1$ 图1 球壳的变形曲线 ($T - T_0 = 0$)

Fig.1 Deformation curve of the shell

由图 1(a)~(d)可见,对壁厚较薄的球壳 ($\eta = 0.99, 0.7, 0.5$),在球壳的变形曲线上总是存在内压的一个极大值 p_{\max} (相应的变形为 λ_1),当内压小于这个极大值时,内压随球壳变形的增加而迅速增加;但当内压大于这个极大值时,内压随球壳变形的增加反而减小;而后在变形曲线上存在内压的一个极小值 p_{\min} ,当球壳变形大于这个极小值对应的拉伸变形 λ_2 时,内压随球壳变形的增加而增加.对照不同壁厚球壳的变形曲线可以看到,这个极大值 p_{\max} 随着壁厚的增加而迅速增大,与此相对应的变形 λ_1 也随着壁厚的增加而逐渐增大;同时与极小值 p_{\min} 相对应的变形 λ_2 也随着壁厚的增加而增大.但是对壁厚较厚的球壳 ($\eta = 0.1$),内压总是随球壳变形的增加而增大.

3 能量比较和不稳定变形

在薄壁球壳的变形曲线上,对应于一个确定的内压 p ,将会有有一个或多个变形值与其对应,问题的多解性意味着出现不稳定性问题.为了确定解的稳定性,需要讨论球壳的能量.受内压 p 作用的球壳的总势能可写为

$$\begin{aligned}
 E &= \int_V W dV - \int_S p(r(A) - A) dS = \\
 &= 4\pi \int_a^b R^2 W dR - 4\pi A^2 p(r(A) - A) = \\
 &= 4\pi a^3 (\nu^3(A) - 1) \int_{\nu(B)}^{\nu(A)} \frac{W_\nu^2}{(1 - \nu^3)^2} d\nu - \\
 &= 4\pi A^3 p(\nu(A) - 1). \quad (17)
 \end{aligned}$$

式(17)的数值结果,对应于 $\eta = 0.99$ 的薄壁球壳的能量曲线示于图 2.由图 2 可见,当内压小于极大值 p_{\max} 时,球壳的总势能随球壳变形的增长而减少,即这个阶段的变形是稳定的,球壳随着内压的增加而均匀膨胀;当内压大于极大值 p_{\max} 时,球壳的总势能随球壳变形的增长而增加;最后当球壳变形大于极小值 λ_2 时,球壳的总势能随球壳变形的增长而减小,且当球壳变形大于 λ_3 时,球壳的总势能会小于相应于 λ_1 的总势能.即这个阶段 ($\lambda_1 < \lambda < \lambda_3$) 球壳的变形是不稳定的,球壳实际上产生复杂的非对称变形,其一部分膨胀变形很大,而另一部分仅仅是轻微膨胀,且球壳的形状则逐渐远离球形.当变形较大时 ($\lambda \geq \lambda_3$),球壳会达到第二个稳定的变形状态,而且球壳的形状会逐渐恢复到球形^[2,6],即薄壁球壳的

变形在 $p > p_{\max}$ 时有一个突变.

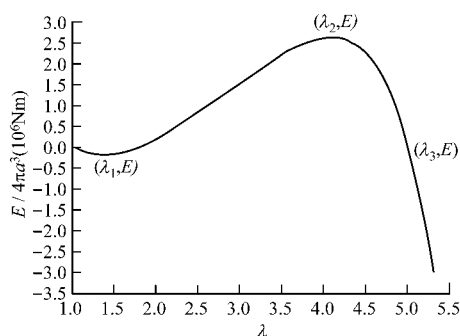


图2 球壳的能量曲线

Fig.2 Energy curve of the shell

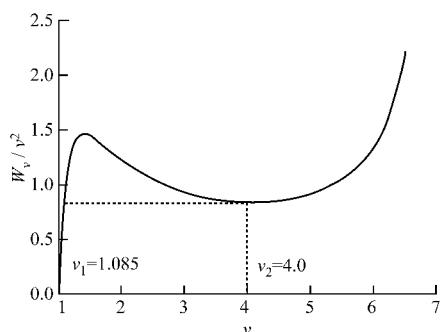


图3 $W_v/\nu^2 \sim \nu$ 关系曲线

Fig.3 $W_v/\nu^2 \sim \nu$ relation curve

4 发生不稳定变形的临界厚度

由以上分析可以看到,不同壁厚的球壳有不同的变形状态.对壁厚较薄的球壳,存在不稳定的变形状态;但对壁厚较厚的球壳,则不存在不稳定的变形状态.这里讨论一下球壳可以发生不稳定变形的临界壁厚条件.从图2可见,不稳定变形表现在球壳的变形曲线上就是要求由式(15)确定的 p 和 λ 的关系曲线是非单调的,而对一般形式的应变能函数

$$W = W(\nu),$$

$$p = 2 \int_{\nu(B)}^{\lambda} \frac{W_\nu(\nu)}{\nu^3 - 1} d\nu. \quad (18)$$

由式(18)可得曲线的斜率为

$$\frac{\partial p}{\partial \lambda} = \frac{W_\nu(\lambda)}{\lambda^3 - 1} - \frac{W_\nu(\nu(B))}{\nu^3(B) - 1} \frac{\eta^3 \lambda^2}{\nu^2(B)} =$$

$$\frac{1}{\lambda^2 - \lambda} \left(\frac{W_\nu(\lambda)}{\lambda^2} - \frac{W_\nu(\nu(B))}{\nu^2(B)} \right), \quad (19)$$

由式(19)可见,如果 $\frac{W_\nu(\nu)}{\nu^2}$ 与 ν 的关系是非单调的,则 p 和 λ 的关系一定是非单调的.代入应变能函数

(5), $\frac{W_\nu(\nu)}{\nu^2}$ 与 ν 的关系曲线如图3所示,它的确是非单调的曲线.可见, Gent 热弹性材料球壳的确可以产生不稳定的变形;且由图3可见,当不稳定的变形发生时, ν 的最大值为 $\nu_2 = 4.0$, 与发生该变形的压力相对应的另一个变形值为 $\nu_1 = 1.085$; 此时令 $\lambda = \nu_2 = 4.0$, $\nu(B) = \nu_1 = 1.085$, 则由式(16)可得 $\eta_{cr} = 0.16$, 即可以发生不稳定变形的球壳的临界壁厚有一个确定的值,当球壳的壁厚小于这个临界壁厚时,球壳中可以产生不稳定的变形;但球壳的壁厚大于临界壁厚时,球壳的变形则总是稳定的.

5 温度场的影响

关于温度场对球壳变形的影响(由图1(c)可见),对同一壁厚的球壳,如果处于均匀的温度场($T_b = T_a = T$)下,产生失稳变形的极大值 p_{\max} 随着温度的升高而减小,但与此相对应的变形 λ_1 保持不变.如果处于非均匀的温度场($T_b \neq T_a$)下,当球壳外表面的温度升高而内表面的温度保持不变($T_a = T_0$, $T_b = T$)时,产生失稳变形的极大值 p_{\max} 随着温度的升高而减小,且非均匀温度场的影响要大于均匀温度场的影响;但当球壳内表面的温度升高而外表面的温度保持不变($T_a = T$, $T_b = T_0$)时,产生失稳变形的极大值 p_{\max} 随着温度的升高却稍有增加.

6 结论

受内压作用的不可压热超弹性球壳可以发生非对称的不稳定性变形.存在内压的一个极大值,当内压较小时,球壳发生稳定的对称膨胀变形;当内压大于极大值时,球壳产生复杂的非对称变形,其一部分膨胀变形很大,而另一部分仅仅是轻微膨胀.同时存在壁厚的一个临界值,当球壳的壁厚小于临界壁厚时,球壳中可以产生不稳定的变形;但当球壳的壁厚大于临界壁厚时,球壳的变形总是稳定的.产生不稳定性变形的极大值随着壁厚的增加而迅速增大,相应的变形也随着壁厚的增加而逐渐增大;这个极大值在均匀温度场下随着温度的增加而减小;在外表面的温度升高而内表面的温度保持不变的非均匀温度场下,随着温度的增加而减小;在内表面的温度升高而外表面的温度保持不变的非均匀温度场下,随着温度的升高却稍有增加.

(下转第740页)