第 13 卷 第 6 期
2007 年 12 月

上海大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF SHANGHAI UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE)

Vol.13 No.6
Dec. 2007

**文章编号**:1007-2861(2007)06-0726-06

# 干的无粘大气环流方程组混合问题的适定性

宋承燕, 何幼桦

(上海大学 理学院,上海 200444)

**摘要**: 该文针对干的无粘大气环流方程组的混合问题,讨论其底部边界的混合问题.所采用的分析方法是将该混合问题分解成两部分:一个纯 Cauchy 问题和一组积分表达式.首先证明了这样的分解与原问题同解,然后用分层方法讨论相应 Cauchy 问题的适定性,从而得到了原混合问题的适定的充要条件.最后给出了构造适定混合问题解析解的计算方法.

**关键词**: 大气环流方程; 混合问题; 分层理论; 适定性

**中图分类号**: O 175.29　　**文献标识码**: A

# Well-Posedness of Mixed Problem for Dry Inviscid Atmospheric Circulation Equations

SONG Cheng-yan, HE You-hua

(School of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

**Abstract**: The mixed problem with lower bound for dry inviscid atmospheric circulation equations is discussed. We decompose the problem into two parts: a pure Cauchy problem and a group of integration expressions. We show that such decomposition gives the same solution with the original problem, and discuss well-posedness of the Cauchy problem based on the stratification theory. A necessary and sufficient condition for well-posedness of the original mixed problem is then obtained. A method for obtaining an analytic solution to the well-posed mixed problem is given.

**Key words**: atmospheric circulation equation; mixed problem; stratification theory; well-posedness

数值预报中使用的大气运动控制方程以及与其关联的初始条件和边界条件构成了一个数学的定解问题,该问题实际上是一个混合问题,即用当前值在合理边界的约束下来预报未来值,也即认为未来的天气完全由当前的天气来决定.所以大气运动方程组定解问题的适定性研究一直都是大气动力学和数值天气预报领域的一个重要研究课题, 其研究结果具有潜在的应用前景.若能证明该问题是适定的,则可估计出预报精度对初值精度也即预报精度对观测到的气象要素误差的依赖程度,由此可对气象观测网的布点和气象要素观测的空间和时间精度作出最佳的决策.若证明了该问题不适定,则说明未来的天气并不完全由当前的天气状况来决定. 近几年来,在解析函数类空间中 $\mathscr{C}^{\omega}$(或 $\mathscr{C}^{\infty}$ 函数类)中讨论流体力学和大气动力学中复杂偏微分方程初值问题的适定性已经有了相当多的成功先例[1-5].但目前为止主要研究结果集中于讨论 Cauchy 问题的适定性.对于混合问题,只有在文献[6]中给出了大气环流方程

**收稿日期**:2006-10-17　**基金项目**:国家自然科学基金资助项目(90411006)

**通信作者**:何幼桦(1960~),男,副教授,博士,研究方向为数理统计与偏微分方程. E-mail:heyouhua@shu.edu.cn

组有底部边界条件的混合问题一种特殊形式的解.本工作首先将混合问题转化为 Cauchy 问题,然后利用分层理论研究此 Cauchy 问题的适定性,从而得到 $p$ 坐标系中,大尺度的(水平尺度达 $10^3$ km 级)、干空气无耗散的静力平衡的大气方程组混合问题的适定性结论.所讨论的方程如下:

$$D:\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}-fv=0;\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}+fu=0;\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\omega}{C_p}\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}=0;\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial\omega}{\partial p}=0;\\[2mm] \dfrac{\partial\Phi}{\partial p}+\dfrac{RT}{p}=0,\end{cases}$$

式中,$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial}{\partial t}+u\dfrac{\partial}{\partial x}+v\dfrac{\partial}{\partial y}+\omega\dfrac{\partial}{\partial p}$是全微商,$\omega=\dfrac{\partial p}{\partial t}+u\dfrac{\partial p}{\partial x}+v\dfrac{\partial p}{\partial y}+w\dfrac{\partial p}{\partial z}$,$u$、$v$、$w$ 分别是风速在坐标轴 $x$、$y$、$z$ 方向上的分量,$\Phi$ 是重力位势函数,$T$ 是温度,$f$ 是科氏力系数(大尺度情形设为纬度坐标 $y$ 的函数),$C_p$ 是定压比热.其混合问题的提法如下:

$$\begin{cases}D;\\ (u,v,\omega,\Phi,T)\mid_{t=0}=(u^0,v^0,\omega^0,\Phi^0,T^0);\\ \Phi\mid_{p=p_s}=0,\ \omega\mid_{p=p_s}=0,\end{cases}\tag{1}$$

式中,$p=p_s$ 为大气系统的底部边界.

## 1　问题的转化

混合问题(1)转化为 Cauchy 问题的方法如下.将方程组 $D$ 的最后两式从 $p_s$ 到 $p$ 积分:

$$\begin{aligned}\Phi&=-\int_{p_s}^{p}\frac{RT}{p'}\mathrm{d}p',\\ \omega&=-\int_{p_s}^{p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}p'.\end{aligned}\tag{2}$$

把它们代入原方程组 $D$ 的前 3 式,替换里面的 $\Phi$、$\omega$.其中,$\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}$用 $-\dfrac{RT}{p}$替换,则原混合问题(1)转换为下列初值问题:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial p}\int_{p_s}^{p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}p'-\\ &\quad\int_{p_s}^{p}\frac{R}{p'}\frac{\partial T}{\partial x}\mathrm{d}p'-fv=0,\\ &\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial p}\int_{p_s}^{p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}p'-\\ &\quad\int_{p_s}^{p}\frac{R}{p'}\frac{\partial T}{\partial y}\mathrm{d}p'+fu=0,\\ &\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+\left(\frac{RT}{C_pp}-\frac{\partial T}{\partial p}\right)\cdot\\ &\quad\int_{p_s}^{p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}p'=0,\\ &(u,v,T)\mid_{t=0}=(u^0,v^0,T^0),\end{aligned}\tag{3}$$

记为

$$\begin{cases}D';\\ (u,v,T)\mid_{t=0}=(u^0,v^0,T^0).\end{cases}$$

下面说明如果 Cauchy 问题(3)是适定的,那么混合问题(1)也是适定的.事实上,只需说明问题(1)和(3)是同解的即可.如果($u,v,\omega,\phi,T$)是问题(1)的解,显然,由上述转化过程知($u,v,T$)是问题(3)的解;反之,对于问题(3)的解($u,v,T$),$\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial v}{\partial y}$是唯一确定的,从而问题(2)中的 $\Phi$ 和 $\omega$ 由 $u$、$v$、$T$ 唯一确定,且满足

$$\omega\mid_{p=p_s}=0,$$
$$\Phi\mid_{p=p_s}=0,$$

故而对于一组适当的初始条件

$$(u,v,\omega,\Phi,T)\mid_{t=0}=(u^0,v^0,\omega^0,\Phi^0,T^0),$$

($u,v,\omega,\Phi,T$)是混合问题(1)的解.

## 2　Cauchy 问题的适定性

根据文献[7]的分层理论,方程组 $D'$ 可以看作 Ehresmann 空间 $J^1(\mathbf{R}^4,\mathbf{R}^3)$的子集,记($u,v,T$)=($u_1,u_2,u_3$),($x,y,p,t$)=($x_1,x_2,x_3,x_4$),则方程组 $D'$在空间 $J^1(\mathbf{R}^4,\mathbf{R}^3)$的坐标满足:

$$\begin{aligned}&p_4^1+u_1p_1^1+u_2p_2^1-p_3^1\int_{p_s}^{x_3}(p_1^1+p_2^2)\mathrm{d}p'-\\ &\quad\int_{p_s}^{x_3}\frac{R}{p'}p_1^3\mathrm{d}p'-fu_2=0;\\ &p_4^2+u_1p_1^2+u_2p_2^2-p_3^2\int_{p_s}^{x_3}(p_1^1+p_2^2)\mathrm{d}p'-\\ &\quad\int_{p_s}^{x_3}\frac{R}{p'}p_2^3\mathrm{d}p'+fu_1=0;\\ &p_4^3+u_1p_1^3+u_2p_2^3+\left(\frac{Ru_3}{C_px_3}-p_3^3\right)\cdot\\ &\quad\int_{p_s}^{x_3}(p_1^1+p_2^2)\mathrm{d}p'=0.\end{aligned}$$

分层理论关于在点$(x_0,y_0,p_0,t_0)\in\mathbf{R}^4$附近的局部初始条件的定义为:一对$\mathscr{C}^\infty$嵌入$(\sigma,\gamma)$满足:

$$\begin{cases}\sigma:\Delta_3\to\mathbf{R}^4,\\ \sigma(\xi)=(x_j(\xi))=(x_0+\xi_1,y_0+\xi_2,\\ \qquad p_0+\xi_3,t_0+g(\xi_1,\xi_2,\xi_3)),\\ \gamma:\Delta_3\to J^0(\mathbf{R}^4,\mathbf{R}^3),\\ \gamma(\xi)=(x_j(\xi),u_i(\xi)),\end{cases}$$

式中,$g:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$, $g\in\mathscr{C}^\infty$,且$g(0,0,0)=0$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\Delta_3$, $\Delta_3$是三维微分流形. 若满足$\alpha^0_{-1}\circ\gamma=\sigma,\gamma^*\ \omega=0,\forall\omega\in J^0(\mathbf{R}^4,\mathbf{R}^3)$的Cartan-Ehresmann理想子代数$I_0(\mathbf{R}^4,\mathbf{R}^3)$, $\mathrm{Im}\gamma\subseteq D'$,则称$(\sigma,\gamma)$是一组初始条件.

根据文献[7]中的理论, 初始条件$(\sigma,\gamma)$相当于在超曲面$t=g(x_1,x_2,x_3)\subset\mathbf{R}^4$上讨论问题,在不扩展解的函数类的前提下,即在解析函数类中,记$\gamma=\gamma_0$,并逐步对其进行提升(见图1).

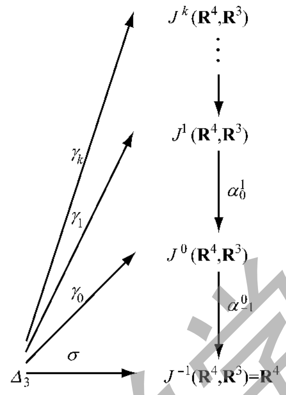


图1　γ映射序列示意图

**Fig.1　View of the series of γ mappings**

一般地得到$\gamma_k:\Delta_3\to J^k(\mathbf{R}^4,\mathbf{R}^3)$,使得$\alpha^k_{-1}\circ\gamma_k=\sigma,\gamma_k^*\omega_k=0,\forall\omega_k\in J^k(\mathbf{R}^4,\mathbf{R}^3)$的Cartan-Ehresmann理想子代数$I_k(\mathbf{R}^4,\mathbf{R}^3)$, $\mathrm{Im}\gamma_k\subseteq D_k$,式中,$D_k\subset J^k(\mathbf{R}^4,\mathbf{R}^3)$满足$\alpha_k^{k+1}D_{k+1}=D_k$,且$D_1=D'$.如果其构造是唯一的,从而相应的方程$D_k$在Ehresmann空间中的坐标$p^i_{j\lambda}$,$(i=1,2,3;j=1,2,3,4.\lambda$是多重指标,$|\lambda|\leqslant k)$将是唯一的,从而由文献[7]的基本定理,方程组的Cauchy问题适定.为了研究这种唯一性成立的条件, 首先证明以下引理.

**引理**　积分方程组

$$\phi_i(x)+\int_0^x\sum_{j=1}^n k_{ij}(\phi_i(x),x,t)\phi_j(t)\mathrm{d}t= f_i(x),\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{4}$$

如果满足下列条件

(i) 记$A=[0,a]\subset\mathbf{R}, f_i\in L^2(A)$;

(ii) 对于$i,j=1,2,\cdots,n$,

$$k_{ij}:\mathbf{R}\times A\times A\to\mathbf{R}$$

连续,并对于第一个变量满足Lipschitz条件:

$$|k_{ij}(y,\cdot,\cdot)-k_{ij}(y',\cdot,\cdot)|\leqslant L_{ij}|y-y'|,$$

则存在$0<\varepsilon\leqslant a$,使得当$x\in[0,\varepsilon]$时,方程组(4)存在唯一解.

证明　记$\Phi(x)=(\phi_1(x),\cdots,\phi_n(x))'$, $F(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))'$,并定义$\Phi$所在空间$L^{2,n}(A)$的范数

$$\|\Phi\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sup_{x\in[0,a]}|\varphi_i(x)|,$$

则空间$L^{2,n}(A)$关于此范数$\|\cdot\|$是完备空间.现定义映射$T$

$$T(\Phi)(x)=F(x)-\int_0^x K(\Phi(x),x,t)\Phi(t)\mathrm{d}t,$$

使得映射的第$i$个分量为

$$T(\varphi_i)(x)=f_i(x)-\int_0^x\sum_{j=1}^n k_{ij}(\varphi_i(x),x,t)\varphi_j(t)\mathrm{d}t.$$

下证$T$是一个压缩映射. 由引理条件知存在$M_1$、$M_2$使得

$$|\phi_i(x)|\leqslant M_1,\quad |k_{ij}(y,x,t)|\leqslant M_2,$$

并记$L=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(L_{ij})$.于是有

$$\begin{aligned}|T\phi_i-T\psi_i|=&\left|\int_0^x\sum_{j=1}^n k_{ij}(\phi_i(x),x,t)\phi_j(t)\mathrm{d}t-\right.\\&\left.\int_0^x\sum_{j=1}^n k_{ij}(\psi_i(x),x,t)\psi_j(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\\&\sum_{j=1}^n\int_0^x|k_{ij}(\phi_i(x),x,t)\phi_j(t)-\\&k_{ij}(\psi_i(x),x,t)\psi_j(t)|\mathrm{d}t\leqslant\\&\sum_{j=1}^n\int_0^x(|k_{ij}(\phi_i(x),x,t)\phi_j(t)-\\&k_{ij}(\psi_i(x),x,t)\phi_j(t)|\mathrm{d}t+\\&|k_{ij}(\psi_i(x),x,t)\phi_j(t)-\\&k_{ij}(\psi_i(x),x,t)\psi_j(t)|)\mathrm{d}t\leqslant\\&\sum_{i=1}^n\int_0^x(L|\phi_i(x)-\psi_i(x)||\phi_j(t)|\mathrm{d}t+\\&M_2|\phi_j(t)-\psi_j(t)|)\mathrm{d}t\leqslant\\&n(LM_1+M_2)x\|\Phi-\Psi\|.\end{aligned}$$

于是对于任意$\Phi$、$\Psi\in L^{2,n}(A)$,有$\|T\Phi-T\Psi\|\leqslant n(LM_1+M_2)x\|\Phi-\Psi\|$.取$\varepsilon=\min(1/$

$(n(LM_1+M_2)),a)>0$，即可使得 $T$ 是一个压缩映射，由文献[9]所述不动点原理知积分方程组(4)有唯一解.

**定理 1**　记 $x_1=x_0+\xi_1$，$x_2=y_0+\xi_2$，$x_3=p_s+\xi_3$，则 Cauchy 问题

$$\begin{cases} D'; \\ (u,v,T)\mid_{t=g(x_1,x_2,x_3)}=(u^0,v^0,T^0) \end{cases} \tag{5}$$

在 $(x_0,y_0,p_s)\in\mathbf{R}^3$ 局部适定的充要条件是：

$$1-u_1\delta_1-u_2\delta_2+\delta_3\int_0^{\xi_3}(u_1(1)+u_2(2))\mathrm{d}\xi'_3\neq 0,$$

$$1-u_1\delta_1-u_2\delta_2+\delta_3\int_0^{\xi_3}(p_1^1+p_2^2)\mathrm{d}\xi'_3\neq 0,$$

式中，$u_i(j)=\dfrac{\partial u_i}{\partial\xi_j}$，$\delta_j=\dfrac{\partial g}{\partial\xi_j}$，$i=1,2;j=1,2,3$.

证明　由条件 $\gamma_k^*\omega=0$ 以及 $\mathrm{Im}\gamma_k\subseteq D_k$[7]. 当 $k=1$时，有 $p_j^i=u_i(j)-\delta_j p_4^i$，$i,j=1,2,3$. 代入方程 $D_1=D'$，整理得

$$\begin{cases} \delta p_4^1+\displaystyle\int_0^{\xi_3}\left(B_1+\frac{R\delta_1}{p_s+\xi'_3}p_4^3\right)\mathrm{d}\xi'_3=b_{11}; \\ \delta p_4^2+\displaystyle\int_0^{\xi_3}\left(B_2+\frac{R\delta_2}{p_s+\xi'_3}p_4^3\right)\mathrm{d}\xi'_3=b_{21}; \\ \delta p_4^3+\displaystyle\int_0^{\xi_3}\left(B_3+\frac{Ru_3(\delta_1 p_4^1+\delta_2 p_4^2)}{C_p(p_s+\xi'_3)}\right)\mathrm{d}\xi'_3=b_{31}, \end{cases} \tag{6}$$

式中，

$$\delta=1-u_1\delta_1-u_2\delta_2+\delta_3\int_0^{\xi_3}(u_1(1)+u_2(2))\mathrm{d}\xi'_3,$$

$$B_i=\int_0^{\xi_3}(u_i(3)\delta_1 p_4^1+u_i(3)\delta_2 p_4^2-\delta_3\delta_1 p_4^i(\xi_3)p_4^1-\delta_3\delta_2 p_4^i(\xi_3)p_4^2)\mathrm{d}\xi'_3,$$

$$b_{11}=fu_2-u_1u_1(1)-u_2u_1(2)-u_1(3)\int_0^{\xi_3}\left(u_1(1)+u_2(2)+\frac{Ru_3(1)}{p_s+\xi'_3}\right)\mathrm{d}\xi'_3,$$

$$b_{21}=-fu_1-u_1u_2(1)-u_2u_2(2)-u_2(3)\int_0^{\xi_3}\left(u_1(1)+u_2(2)+\frac{Ru_3(2)}{p_s+\xi'_3}\right)\mathrm{d}\xi'_3,$$

$$b_{31}=-u_1u_3(1)-u_2u_3(2)+\left(u_3(3)-\frac{Ru_3}{C_p(p_s+\xi_3)}\right)\int_0^{\xi_3}(u_1(1)+u_2(2))\mathrm{d}\xi'_3.$$

式(6)中，$p_4^i(i=1,2,3)$是 $\xi_1$、$\xi_2$、$\xi_3$ 的函数，将 $p_4^i(i=1,2,3)$看作是 $\xi_3$ 的函数，而把 $\xi_1$、$\xi_2$ 看作参数. 上述积分号下的其它函数，如不加以说明则是 $\xi'_3$ 的函数. 当 $\delta=1-u_1\delta_1-u_2\delta_2+\delta_3\int_0^{\xi_3}(u_1(1)+u_2(2))\mathrm{d}\xi'_3\neq 0$ 时，式(6)为形如引理中的积分方程组(4)，由引理知其有唯一解.

当 $k\geqslant 2$ 时，由 $p_{j\lambda}^i=p_{j\lambda}^i(l)-p_{4j\lambda}^i$，$i,l=1,2,3$；$j=1,2,3,4$. $\lambda(|\lambda|\leqslant k-1)$是多重指标，则有下式：

$$\begin{cases} \Delta p_4^{1_k}+p_3^1\displaystyle\int_0^{\xi_3}(\delta_1 p_4^{1_k}+\delta_2 p_4^{2_k})\mathrm{d}\xi'_3+\int_0^{\xi_3}\frac{\delta_1 R}{p_s+\xi'_3}p_4^{3_k}\mathrm{d}\xi'_3=b_{1k}, \\ \Delta p_4^{2_k}+p_3^2\displaystyle\int_0^{\xi_3}(\delta_1 p_4^{1_k}+\delta_2 p_4^{2_k})\mathrm{d}\xi'_3+\int_0^{\xi_3}\frac{\delta_2 R}{p_s+\xi'_3}p_4^{3_k}\mathrm{d}\xi'_3=b_{2k}, \\ \Delta p_4^{3_k}+\left(p_3^3-\dfrac{Ru_3}{C_p(p_s+\xi_3)}\right)\displaystyle\int_0^{\xi_3}(\delta_1 p_4^{1_k}+\delta_2 p_4^{2_k})\mathrm{d}\xi'_3=b_{3k}, \end{cases} \tag{7}$$

式中，

$$\Delta=1-u_1\delta_1-u_2\delta_2+\delta_3\int_0^{\xi_3}(p_1^1+p_2^2)\mathrm{d}\xi'_3,$$

$$\begin{aligned} b_{1k}=&-u_1p_4^{1_{k-1}}(1)-u_2p_4^{1_{k-1}}(2)+p_4^{1_{k-1}}(3)\int_0^{\xi_3}(p_1^1+p_2^2)\mathrm{d}\xi'_3+ \\ &p_3^1\int_0^{\xi_3}(p_4^{1_{k-1}}(1)+p_4^{2_{k-1}}(2))\mathrm{d}\xi'_3- \\ &\sum_{i=1}^{k-1}C_{k-1}^i(p_4^{1_i}p_{14}^{1_{k-i-1}}+p_4^{2_i}p_{24}^{1_{k-i-1}})- \\ &\sum_{i=1}^{k-2}C_{k-1}^i p_{34}^{1_i}\int_0^{\xi_3}(p_{14}^{1_{k-i-1}}+p_{24}^{2_{k-i-1}})\mathrm{d}\xi'_3+ \\ &\int_0^{\xi_3}\frac{R}{p_s+\xi'_3}p_4^{3_{k-1}}(1)\mathrm{d}\xi'_3+fp_4^{2_{k-1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{2k}=&-u_1p_4^{2_{k-1}}(1)-u_2p_4^{2_{k-1}}(2)+p_4^{2_{k-1}}(3)\int_0^{\xi_3}(p_1^1+p_2^2)\mathrm{d}\xi'_3+ \\ &p_3^2\int_0^{\xi_3}(p_4^{1_{k-1}}(1)+p_4^{2_{k-1}}(2))\mathrm{d}\xi'_3- \\ &\sum_{i=1}^{k-1}C_{k-1}^i(p_4^{1_i}p_{14}^{2_{k-i-1}}+p_4^{2_i}p_{24}^{2_{k-i-1}})- \\ &\sum_{i=1}^{k-2}C_{k-1}^i p_{34}^{2_i}\int_0^{\xi_3}(p_{14}^{1_{k-i-1}}+p_{24}^{2_{k-i-1}})\mathrm{d}\xi'_3+ \\ &\int_0^{\xi_3}\frac{R}{p_s+\xi'_3}p_4^{3_{k-1}}(2)\mathrm{d}\xi'_3-fp_4^{1_{k-1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{3k}=&-u_1p_4^{3_{k-1}}(1)-u_2p_4^{3_{k-1}}(2)+ \\ &p_4^{3_{k-1}}(3)\int_0^{\xi_3}(p_1^1+p_2^2)\mathrm{d}\xi'_3- \end{aligned}$$

$$\left(\frac{Ru_3}{C_p(p_s+\xi_3)} - p_3^3\right)\int_0^{\xi_3}\left(p_{4^{k-1}}^1(1) + p_{4^{k-1}}^2(2)\right)\mathrm{d}\xi_3' - \sum_{i=1}^{k-1} C_{k-1}^i\Big( p_{4^i}^1 p_{14^{k-i-1}}^3 + p_{4^i}^2 p_{24^{k-i-1}}^2 + \frac{R}{C_p(p_s+\xi_3)}\cdot p_{4^i}^3\int_0^{\xi_3}\left(p_{14^{k-i-1}}^1 + p_{24^{k-i-1}}^2\right)\mathrm{d}\xi_3'\Big) + \sum_{i=1}^{k-2} C_{k-1}^i p_{34^i}^3\int_0^{\xi_3}\left(p_{14^{k-i-1}}^1 + p_{24^{k-i-1}}^2\right)\mathrm{d}\xi_3',$$

上式中,$p_{4^k}^i(i=1,2,3)$是 $\xi_1$、$\xi_2$、$\xi_3$ 的函数,同样将 $p_{4^k}^i(i=1,2,3)$看作是 $\xi_3$ 的未知函数,而把 $\xi_1$、$\xi_2$ 看作参数,则当

$$\Delta = 1 - u_1\delta_1 - u_2\delta_2 + \delta_3\int_0^{\xi_3}(p_1^1 + p_2^2)\mathrm{d}\xi_3' \neq 0$$

时,上式是以 $p_{4^k}^i(i=1,2,3)$为未知函数的第二类 Volterra 积分方程组,由文献[8]中有关积分方程理论可以推知方程(7)存在唯一解.从而定理1所述 Cauchy 问题(5)适定的.

## 3　混合问题的适定性

对于带有积分的上述 Cauchy 问题(5),定理1的结论由于存在未知函数的偏导数,所以并不能真正地作为判断条件.但是,当转为混合问题时,这个条件被 $\omega$ 的初始数据所代替,所以,可以得到关于混合问题适定性的下述结论.

**定理2**　混合问题

$$\begin{cases} D; \\ (u,v,\omega,\Phi,T)\mid_{t=g(x,y,p)} = (u^0,v^0,\omega^0,\Phi^0,T^0); \\ \Phi\mid_{p=p_s} = 0,\ \omega\mid_{p=p_s} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

适定的充要条件是

$$1 - u^0\frac{\partial g}{\partial x} - v^0\frac{\partial g}{\partial y} - \omega^0\frac{\partial g}{\partial p} \neq 0,$$

$$1 - u^0\frac{\partial g}{\partial x} - v^0\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial p}\int_{p_s}^{p}\left(\frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial y}\right)\mathrm{d}p' \neq 0.$$

对于我们开始提出的问题(1),由于初始值在 $t=0$ 上给出,所以有 $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial p} = 0$.因此易于得到下述结论.

**推论**　混合问题(1)对于任何一组相容的初始条件都是适定的.

## 4　解析解的计算

对于混合问题(8),若能由$\{\gamma_k\}$得到各阶方程 $D_k$ 在所在的 Ehresmann 空间中的坐标 $p_{j^\lambda}^i$,令 $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$,仍以 $p_{j^\lambda}^i$ 表示,则定解问题在点 $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, p_s, g(x_0, y_0, p_s))$的形式上的解可以表示为如下级数的形式(并不能保证存在大于0的收敛半径):

$$u_i(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\lambda|=k}\frac{p_{j^\lambda}^i}{\lambda!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^\lambda,$$
$$i = 1,\cdots,5, j = 1,\cdots,4,$$

式中,$u_4 = \omega$, $u_5 = \Phi$, $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$, $\lambda! = (\lambda_1!,\lambda_2!,\lambda_4!,\lambda_4!)$, $|\lambda| = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4$.如果该定解问题是适定的,则所得的级数存在正的收敛半径.因此,所得上述级数即是方程的解析解的表达式.对于混合问题(1),由于 $\delta_j = 0$,故而有 $p_4^i = b_{i1}$, $p_j^i = u_i(j)$;以及一般地,对于 $k\geqslant 2$, $p_{4^k}^i = b_{ik}$, $p_{j^\lambda}^i = p_{j^\lambda}^i(l)(i,j=1,2,3)$.从而求得 $u_1$、$u_2$、$u_3$(即 $u,v,T$)的解析解表达式.再由条件

$$\omega = -\int_{p_s}^{p}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}p',$$

$$\Phi = -\int_{p_s}^{p}\frac{RT}{p'}\mathrm{d}p',$$

可得 $\omega$、$\Phi$ 的解析表达式.

例:混合问题

$$\begin{cases} D; \\ u\mid_{t=0} = 0, v\mid_{t=0} = 0, T\mid_{t=0} = p; \\ \omega\mid_{t=0} = 0, \Phi\mid_{t=0} = R(p_s - p); \\ \Phi\mid_{p=p_s} = 0, \omega\mid_{p=p_s} = 0, \end{cases}$$

若取柯氏力系数为 $f=f_0$.运用求解步骤可求得其解析解:

$$u(x,y,p,t) = 0,\ v(x,y,p,t) = 0,$$
$$\omega(x,y,p,t) = 0,$$
$$\Phi(x,y,p,t) = R(p_s - p),$$
$$T(x,y,p,t) = p,$$

而如下混合问题

$$\begin{cases} D; \\ u\mid_{t=0} = u_0, v\mid_{t=0} = 0, T\mid_{t=0} = p; \\ \omega\mid_{t=0} = 0, \Phi\mid_{t=0} = R(p_s - p); \\ \Phi\mid_{p=p_s} = 0, \omega\mid_{p=p_s} = 0. \end{cases}$$

若取科氏力系数 $f(y) = f_0 + f_1 y$.运用上述求解步骤得问题的解析解为

$$u(x,y,p,t) = u_0 + \frac{1}{24}(f_0(f_0^3 u_0 - 2f_0 f_1 u_0^2) - 6f_0^2 f_1 u_0^2)t^4 - \frac{1}{2}f_1^2 u_0 y^2 t^2 - \frac{1}{2}f_0^2 u_0 t^2 -$$

$$f_0 f_1 u_0 y t^2 + \cdots,$$

$$v(x,y,p,t) = \frac{1}{6}(f_0^3 u_0 - 2f_0 f_1 u_0^2)t^3 + \frac{1}{6}(3f_0^2 f_1 u_0 - 2f_1^2 u_0^2)yt^3 - f_0 u_0 t - f_1 u_0 yt + \cdots,$$

$$\omega(x,y,p,t) = \frac{1}{6}f_1(p - p_s)tu_0(-3f_0^2 t^2 + 2f_1 u_0 t^2 + 6) + \cdots,$$

$$\Phi(x,y,p,t) = \left[ R((p - p_s)(2C_p(f_1 t^2 u_0 - 2)p_s^2 + f_1(p - 5p_s)Rt^2 u_0^2) - 2f_1 p_s^2 t^2 u_0(C_p p_s - 2Ru_0)\ln\left(\frac{p}{p_s}\right)\right] \Big/ 4C_p p_s^2 + \cdots,$$

$$T(x,y,p,t) = p - \frac{f_1(p - p_s)^2 R u_0^2 t^2}{2C_p p_s^2} - \frac{1}{2}f_1(p - p_s)u_0\left(1 - \frac{Ru_0}{C_p p_s}\right)t^2 + \cdots.$$

从上述两解可以看出,科氏力对大气运动水平方向的偏转起着决定性的作用.如果没有科氏力作用,大气系统水平方向运动速度将一直保持不变.科氏力纬度方向的差异导致了垂直方向原本静止的大气产生运动,从而大气系统的温度分布在垂直方向也产生了变化.

## 5　结　论

本工作对于大气环流方程组的含有底部边界的混合问题,将其化成了一个含有积分号的 Cauchy 问题,并证明了这样一个 Cauchy 问题与原问题同解.然后用分层的方法讨论了相应 Cauchy 问题的适定性,从而得到了原混合问题的适定的充要条件.这种分析方法同样适用有耗散的大气环流方程组混合问题的适定性研究.

**参考文献:**

[1] 魏晓军.关于带未知函数线性附加项的简化 Boussinesq 方程[J].应用数学与计算数学学报,2004,18(1):16-22.

[2] WANG Y P. On the well posedness of initial value problem for euler equations of inviscid compressible adiabatic fluid [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2005, 26(7):865-871.

[3] SHEN C. Initial and boundary value problems for two-dimensional non-hydrostatic boussinesq equations [J]. Journal of Shanghai University: English Edition, 2005, 9(2):114-119.

[4] SHEN C, WANG Y P. On the stability of the system of the two-dimensional non-hydrostatic revolving fluids [J]. Applied Mathematics andMechanics, 2006, 27(3):317-325.

[5] SHI W H, WANG Y P, SHEN C. Comparison of stability between Navier-Stokes and Euler equations[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2006, 27(9):1257-1263.

[6] 何幼桦.大气环流方程组性质研究及准确解计算[D].上海:上海大学,2004:76-84.

[7] 施维慧,陈达段,何幼桦.分层理论与偏微分方程基础[M].上海:上海大学出版社,2001:10-54.

[8] 沈以淡.积分方程[M].北京:北京理工大学出版社,1992:81-86.

[9] 夏道行,吴卓人,严绍宗,等.实变函数论与泛函分析[M].北京:人民教育出版社,1979:85-96.

(编辑:陈海清)