文章编号:1007-2861(2009)01-0017-03

关于超平行体两类椭球为球的条件

刘旭飞, 汪 卫, 冷岗松

(上海大学 理学院,上海 200444)

摘要: 在凸体中,John 椭球和新椭球是两类重要的椭球. 就超平行体的 John 椭球是球和超平行体的新椭球是球分别给出一个充分必要条件.

关键词: 超平行体;超立方体;John 椭球;新椭球

中图分类号: O 186.5 **文献标志码**: A

Conditions for Two Types of Ellipsoids of Parallelotope Being Ball

LIU Xu-fei, WANG Wei, LENG Gang-song

(College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: John ellipsoid and new ellipsoid are two types of important ellipsoids in convex bodies. In this paper, a necessary and sufficient condition for each of the two types of ellipsoids of the parallelotope being a ball is given.

Key words: parallelotope; hypercube; John ellipsoid; new ellipsoid

椭球是凸几何中一种基本的极值体,而 John 椭球是一种特殊的重要的椭球,它是 John 在 1948 年提出的. 最近,E. Lutwak 等在文献[1]中定义了一种新的几何体 $\Gamma_{-p}K$ 的概念如下.

如果 $K \in K_0^n$,且实数 $p \geq 1$ 则几何体 $\Gamma_{-p}K$ 是一个关于原点对称的凸体,它的径向函数为

$$\rho_{\Gamma_{-p}K}^{-p}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{V(K)}\int_{S^{n-1}}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^p \mathrm{d}S_p(K,\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u} \in S^{n-1},$$

式中,K_0^n 表示包含原点为内点的凸体的集合,$S_p(K,\boldsymbol{v})$是 S^{n-1}上的正 Borel 测度,又称为 K 的 L_p 表面积测度. 特别地,当 $p=2$ 时,$\Gamma_{-2}K$ 是有名的新椭球[2].

如果 K 是一个多胞形,则

$$\rho_{\Gamma_{-2}K}^{-2}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{V(K)}\sum_{1}^{N}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_l)^2\frac{a_l}{h_l}, \boldsymbol{u} \in S^{n-1},$$

式中,$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_N$ 为单位面外法向量,a_i 为 $\boldsymbol{u}_i$ 所对应面的面积,h_i 为原点到该面的距离.

本研究分别考虑了超平行体的 John 椭球和新椭球是球的条件.

定理1 在 $\mathbf{R}^n$ 中,任意一个超平行体的 John 椭球是球当且仅当该超平行体是超立方体.

定理2 在 $\mathbf{R}^n$ 中,任意一个超平行体的新椭球是球当且仅当该超平行体是超立方体.

1 定理的证明

为了证明定理1,我们先介绍下面的引理.

引理1[3] 欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的每一个凸体都包含一个唯一的体积最大的椭球. 若 K 是对称的凸体,则这个椭球是 B_2^n 当且仅当 $B_2^n \subset K$,并且对于某个整

收稿日期:2007-06-25
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671117)
通信作者:冷岗松(1961~),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为凸几何、几何分析. E-mail:gleng@staff.shu.edu.cn

数 m,存在一列正实数$(c_i)_1^m$,在 K 的边界上存在一列单位向量$(\boldsymbol{u}_i)_1^m$ 满足:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{I}_n, \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{I}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的单位矩阵.

引理 2[4] 设$(\boldsymbol{u}_i)_1^m$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一列单位向量,$(c_i)_1^m$ 是一列正实数,使得他们满足下列的等式:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{I}_n.$$

设$f_i:\mathbf{R}^n \to [0,\infty)$ $(i=1,2,\cdots,m)$是一列可积函数,那么

$$\int_{\mathbf{R}^n} \prod_{i=1}^{m} f_i(\langle \boldsymbol{u}_i, x\rangle)^{c_i} \mathrm{d}x \leqslant \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{\mathbf{R}^n} f_i\right)^{c_i}. \tag{2}$$

引理 3[5] 设如果$(f_i)_{i=1}^m$是 $L_1(R)$ 中不全为零的函数,并且$(f_i)_{i=1}^m$都是高斯分布的密度函数,那么式(2)取等号的必要条件是 $m=n$,并且$(u_i)_1^m$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组基.

引理 4[6] 设 K 是 $\mathbf{R}^n$ 中的对称凸体,具有 Minkowski 规范函数 $\|\cdot\|$,当 $1 \leqslant p < \infty$ 时,有

$$|K| = \frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)} \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{-\|x\|^p} \mathrm{d}x.$$

定理 1 的证明 因为超立方体的 John 椭球是它的内切球[7],立即可得定理 1 的充分性. 下面证明定理 1 的必要性,即如果超平行体 P 的 John 椭球是欧氏单位球 B_2^n,那么 P 是超立方体.

首先,记 F_i, F_{n+i} $(i=1,2,\cdots,n)$ 为与 $\boldsymbol{\alpha}_i$($\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$为生成 n 维超平行体的 n 个线性无关的向量)不平行的两个面,$\boldsymbol{u}_i$ 为面 F_i 的外法向量. 注意到如果超平行体 P 的 John 椭球是球 B_2^n,那么这个球一定是该超平行体的内切球. 如不然,那么不妨设 B_2^n 与超平行体的某个面 F_i 不相切,那么一定存在一个正实数 ε,使得球 B_2^n 沿方向 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 平移 ε 后,球 B_2^n 不再与面 F_i, F_{n+i}相切. 这时再在 $\pm \boldsymbol{u}_i$ 方向膨胀,其他方向不变,使得膨胀后的椭球为 P 的 John 椭球. 这与条件 B_2^n 是超平行体的 John 球相矛盾.

因为超平行体 P 的内切球是其 John 椭球,由 John 定理,存在一组正实数$(c_i)_1^n$ 并且在 P 的边界上存在一组单位向量$(\boldsymbol{u}_i)_1^n$,使得

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{I}_n.$$

下面,只需证明 P 是超立方体.

定义函数列$(f_i)_1^n$ 如下:

$$f_i(t) = \mathrm{e}^{\left(-\frac{a_i}{c_i}\right)|t|^p},$$

令 $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i |\langle \boldsymbol{u}_i, x\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, 则根据引理 2 和 4,

$$\begin{aligned}
|K| &= \frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)} \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{\left(-\sum_{i=1}^{n} a_i |\langle \boldsymbol{u}_i, x\rangle|^p\right)} \mathrm{d}x = \\
&\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)} \int_{\mathbf{R}^n} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\left(-\frac{a-i}{c_i}|\langle \boldsymbol{u}_i, x\rangle|^p\right) c_i} \mathrm{d}x = \\
&\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)} \int_{\mathbf{R}^n} \prod_{i=1}^{n} f_i(\langle \boldsymbol{u}_i, x\rangle)^{c_i} \mathrm{d}x \leqslant \\
&\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbf{R}} f_i\right)^{c_i} = \\
&\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)} \prod_{i=1}^{n} \left(2\left(\frac{c_i}{a_i}\right)^{\frac{1}{p}} \Gamma(1+p)\right)^{c_i} = \\
&\frac{2^n \Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)} \prod_{i=1}^{n} n\left(\frac{c_i}{a_i}\right)^{\frac{c_i}{p}}.
\end{aligned} \tag{3}$$

当 $a_i = c_i$ 且 $p \to \infty$ 时,

$$|K| \leqslant 2^n. \tag{4}$$

注意到式(4)的右端正是以 B_2^n 为内切球的超立方体的体积.

考虑到函数$(f_i)_1^n$ 的构造,并对式(3)应用引理 3,可得式(3)等式成立的条件是$(\boldsymbol{u}_i)_1^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组正交基. 由于$(\boldsymbol{u}_i)_1^n$ 是超平行体互不平行的 n 个面的法向量,因此 P 是超立方体.

定理 1 证毕.

引理 5 K 是 $\mathbf{R}^n$ 中包含原点的多胞形,$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$是 n 维空间中的一组正交单位向量,则

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_{\Gamma_{-2}K}^{-2}(\boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{V(K)} \sum_{l=1}^{N} \frac{a_l}{h_l}.$$

证明 根据 $\Gamma_{-2}K$ 的定义:

$$\rho_{\Gamma_{-2}K}^{-2}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{V(K)} \sum_{l=1}^{N} (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}_l)^2 \frac{a_l}{h_l},$$

$$\rho_{\Gamma_{-2}K}^{-2}(\boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{V(K)} \sum_{l=1}^{N} (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{u}_l)^2 \frac{a_l}{h_l},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_{\Gamma_{-2}K}^{-2}(\boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{V(K)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{N} (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{u}_l)^2 \frac{a_l}{h_l} = \frac{1}{V(K)} \sum_{l=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{u}_l)^2 \frac{a_l}{h_l},$$

因为 $\| u_l \|^2 = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{u}_l)^2 = 1$,所以

$$\sum_{i=1}^{n}\rho_{\Gamma_{-2}K}^{-2}(\boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{V(K)}\sum_{l=1}^{N}\frac{a_l}{h_l}.$$

定理2的证明　充分性. 若超平行体 P 是超立方体,则 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一组单位正交基,且 $\frac{a_1}{h_1}=\frac{a_2}{h_2}=\cdots\frac{a_{2n}}{h_{2n}}=c$($c$ 为常数),根据 $\Gamma_{-2}P$ 的定义:

$$\rho_{\Gamma_{-2}P}^{-2}(\boldsymbol{u}_i) = \frac{1}{V(P)}\sum_{l=1}^{2n}(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_l)^2\frac{a_l}{h_l} = \frac{2}{V(P)}\frac{a_l}{h_l} = \frac{2c}{V(P)},$$

故对任意一个单位向量 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{\lambda}_n\boldsymbol{u}_n$($\boldsymbol{\lambda}_1^2+\boldsymbol{\lambda}_2^2+\cdots+\boldsymbol{\lambda}_n^2=1$)有

$$\rho_{\Gamma_{-2}P}^{-2}(\boldsymbol{u}) = \rho_{\Gamma_{-2}P}^{-2}(\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{\lambda}_n\boldsymbol{u}_n) = \frac{2}{V(P)}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\lambda}_i^2\frac{a_l}{h_l} = \frac{2}{V(P)}(\boldsymbol{\lambda}_1^2+\boldsymbol{\lambda}_2^2+\cdots+\boldsymbol{\lambda}_n^2)\frac{a_l}{h_l} = \frac{2c}{V(P)},$$

即超平行体 P 的新椭球任意方向的径向函数为常数,则该超平行体 P 的新椭球是球.

必要性. 若超平行体 P 的新椭球是球,由 $\Gamma_{-2}P$ 的定义:

$$\rho_{\Gamma_{-2}P}^{-2}(\boldsymbol{u}_i) = \frac{1}{V(P)}\sum_{l=1}^{2n}(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_l)^2\frac{a_l}{h_l},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\rho_{\Gamma_{-2}P}^{-2}(\boldsymbol{u}_i) = \frac{1}{V(P)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{2n}(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_l)^2\frac{a_l}{h_l} = \frac{1}{V(P)}\sum_{l=1}^{2n}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_l)^2\frac{a_l}{h_l},$$

而 $\rho_{\Gamma_{-2}P}^{-2}(\boldsymbol{u}_i)=\rho_{\Gamma_{-2}P}^{-2}(\boldsymbol{e}_i)$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\rho_{\Gamma_{-2}P}^{-2}(\boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{V(P)}\sum_{l=1}^{2n}\frac{a_l}{h_l} = \sum_{i=1}^{n}\rho_{\Gamma_{-2}P}^{-2}(\boldsymbol{u}_i) = \frac{1}{V(P)}\sum_{l=1}^{2n}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_l)^2\frac{a_l}{h_l},$$

故

$$\sum_{l=1}^{2n}\frac{a_l}{h_l} = \sum_{l=1}^{2n}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_l)^2\frac{a_l}{h_l},$$

即

$$\sum_{l=1}^{2n}\left(\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_l)^2 - 1\right)\frac{a_l}{h_l} = 2\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1,i\neq l}^{n}(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_l)^2\frac{a_l}{h_l} = 0,$$

故

$$(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_l)^2 = 0, i \neq l.$$

所以 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 互相垂直.

又因为 $V(P)=2a_lh_l(l=1,2,\cdots,2n)$,故

$$\rho_{\Gamma_{-2}P}^{-2}(\boldsymbol{u}_i) = \frac{1}{V(P)}\sum_{l=1}^{2n}(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_l)^2\frac{a_l}{h_l} = \frac{2}{V(P)}\frac{a_l}{h_l} = \frac{1}{h_i^2} = \rho_{\Gamma_{-2}P}^{-2}(\boldsymbol{u}_j) = \frac{1}{h_j^2},$$

即 $h_i=h_j(1\leqslant i,j\leqslant 2n)$.

所以超平行体 P 为超立方体.

定理2证毕.

2　2个推论

引理6[2]　若 K 是 $\mathbf{R}^n$ 中包含原点的凸体,则对任意可逆线性变换 ϕ,有

$$\Gamma_{-2}(\phi K) = \phi\Gamma_{-2}K.$$

引理7[1]　若 K 是 $\mathbf{R}^n$ 中包含原点的凸体,则对任意可逆线性变换 ϕ,有

$$J(\phi K) = \phi JK.$$

由引理6和引理7很容易得到下面的推论.

推论　若 P 为 $\mathbf{R}^n$ 中的超平行体,则 $\Gamma_{-2}P=JP$.

证明　任给一个超平行体 P,则必存在一个可逆线性变换 ϕ,使得 $\phi P=C$,其中 C 为超立方体.

由引理6得

$$\Gamma_{-2}(\phi P) = \Gamma_{-2}C = B = \phi\Gamma_{-2}P. \tag{5}$$

由引理7得

$$J(\phi P) = JC = B = \phi JP. \tag{6}$$

结合式(5)和(6)得

$$\Gamma_{-2}P = JP.$$

参考文献:

[1] LUTWAK E, YANG D, ZHANG G Y. L_p John ellipsoids [C]// Proceedings of the London Mathematical Society. 2005:473-478.

[2] LUTWAK E, YANG D, ZHANG G Y. A new ellipsoid associated with convex bodies [J]. Duke Mathematical Journal, 2000, 104(3):375-390.

[3] JOHN F. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions [M] // Courant Anniversary Volume. [S.l.]: Interscience, 1948:187-204.

(下转第25页)