

文章编号: 1007-2861(2009)02-0181-05

# Mecanum 轮全方位运动系统的约束条件及奇异位形

王一治<sup>1</sup>, 常德功<sup>1,2</sup>

(1. 上海大学 机电工程与自动化学院, 上海 200072; 2. 青岛科技大学 机械工程学院, 山东 青岛 266042)

**摘要:** 通过对 Mecanum 轮全方位运动系统的运动学解析, 给出系统轮结构对系统实现全方位运动的约束条件. 约束条件包括轮数量、轮结构参数、轮组几何布局结构形式与系统实现全方位运动的关系等, 同时分两类轮组布局结构形式讨论系统中存在的奇异位形, 并给出减少或避开系统奇异位形的方法.

**关键词:** Mecanum 轮; 全方位运动; 运动约束条件; 奇异位形

中图分类号: TP 242. 2

文献标志码: A

## Motion Restricted Condition and Singular Configuration for Mecanum Wheeled Omni-Directional Motion System

WANG Yi-zhi<sup>1</sup>, CHANG De-gong<sup>1,2</sup>

(1. School of Mechatronics Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 200072, China;  
2. College of Mechanical Engineering, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266042, Shandong, China)

**Abstract:** Though kinematics analyzing for Mecanum wheeled omni-directional motion system, the restricted conditions of the system to move in omni-directions are presented. These conditions include relationships of the wheel structure, wheels number and the system lay-out to system to move in omni-direction. The singular configuration of the system is showed out from two class system layouts, it is presented that how to decrease or avoid the singular configuration of the system to move in omni-directions.

**Key words:** Mecanum wheel; omni-directional motion; motion restricted condition; singular configuration

全方位运动系统是由一定数量独立驱动的全方位轮(omni-directional wheel, ODW)构成的平面运动系统,可实现三自由度平面运动<sup>[1,2]</sup>,也可称其为全方位运动(omni-directional motion, ODM).具有 ODM 系统的机器人具有移动灵活、机动性强的特点,特别适于在狭小空间中移动作业,在服务机器人及足球机器人运动系统中有广泛应用.全方位轮有多种,其中 1975 年 Xu 在瑞典设计的 Mecanum 全方

位轮应用最广<sup>[3]</sup>.对全方位运动系统,目前研究和应用最多的是 Mecanum 全方位轮(M-ODW)组成的 3 轮、4 轮两类全方位运动系统,文献中多涉及对其运动性能分析、动力学特性及控制性能研究<sup>[1,9]</sup>.但在实际设计和应用 Mecanum 轮全方位运动系统时,必须确知下列规则:(1)系统轮数量与实现 ODM 的关系;(2)轮组布局的拓扑结构与实现 ODM 的关系;(3)实现 ODM 有哪些约束条件;(4)运动中是否存在

收稿日期:2007-10-12

通信作者:王一治(1966~),男,高级工程师,博士,研究方向为机器人技术、智能机械系统. E-mail:wyz@shu.edu.cn

在奇异位形,奇异位形如何解决等.

本工作通过对 M-ODM 组成的一般平面系统的正、逆运动学解的解析,得出以上 4 方面问题的一般性规则,以期望对设计、应用 M-ODM 系统提供理论依据.

### 1 Mecanum 轮系统运动学解析

Mecanum 轮的基本特征是轮毂的外周有若干与轮毂轴线有相同夹角且可自由旋转的辇子,由这些辇子的表面包络形成轮毂的圆柱工作表面.图 1 是一款典型的 4 轮 M-ODW 系统结构<sup>[4]</sup>.

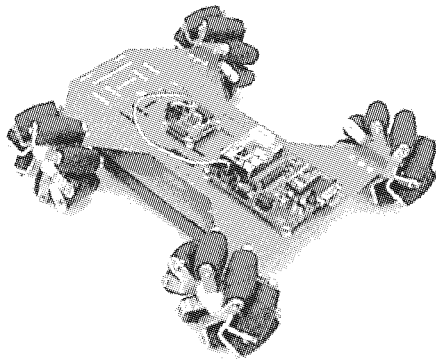


图 1 Mecanum 轮全方位运动系统

Fig. 1 Mecanum wheeled omni-directional motion system

为不失一般性,设 Mecanum 轮系统由  $n$  个 M-ODW 轮组成,各轮的运动原理如图 2 所示,轮与系统运动中心  $O$  点的关系如图 3 所示.图 2 和图 3 中: $a, b$  为轮子、辇子的作用半径; $j_i, k_i$  和  $g_i, h_i$  为过轮毂中心点  $W_i$  和辇子中心点  $R_i$  的一对正交单位矢量, $j_i, h_i$  方向分别同轮毂轴线及辇子轴线; $d_i$  为运动中心点  $O$  至轮  $i$  中心点  $W_i$  的位置矢量; $\dot{\theta}_i, \dot{\phi}_i$  为  $i$  轮轮毂及辇子的角速度,方向分别由矢量  $j_i, h_i$  决

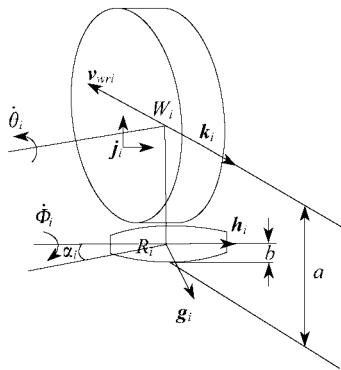


图 2 Mecanum 轮运动原理

Fig. 2 Motion principle of Mecanum wheel

定. $v_o, \omega$  为运动中心  $O$  点的速度矢量及角速度; $v_{wi}, v_{ri}$  为轮毂中心  $W_i$  和辇子中心  $R_i$  的速度矢量; $v_{wri}$  为点  $W_i$  对点  $R_i$  的相对速度矢量; $\alpha_i$  为  $-j_i$  与  $h_i$  的夹角,定义为辇子偏置角; $\beta_o, \beta_i, \beta'_i$  分别是矢量  $v_o, d_i, -j_i$  与  $x$  轴的夹角.

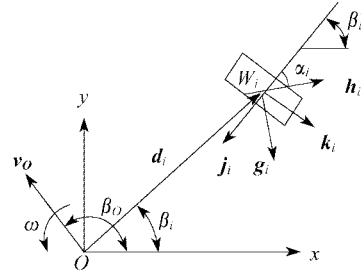


图 3 轮与运动中心的关系

Fig. 3 Relationship of wheel and motion centre

根据轮毂与辇子的几何关系,有

$$v_{wi} = v_{ri} + v_{wri}, \tag{1}$$

$$v_{ri} = -b(\dot{\theta}_i k_i + \dot{\phi}_i g_i), \tag{2}$$

$$v_{wri} = -\dot{\theta}_i(a-b)k_i, \tag{3}$$

由式(1)~(3)得

$$v_{wi} = -a\dot{\theta}_i k_i - b\dot{\phi}_i g_i. \tag{4}$$

因机器人做平面运动,据图 3 有

$$v_{wi} = v_o + \omega E d_i, \tag{5}$$

式中, $E$  是使矢量  $d_i$  逆时针旋转  $90^\circ$  的旋转矩阵.由式(4)和(5),点乘  $h_i$  消去  $\dot{\phi}_i$  得

$$-a(\sin \alpha_i) \dot{\theta}_i = \omega h_i \cdot E d_i + h_i \cdot v_o,$$

则系统运动方程一般式表述为

$$A \dot{\theta} = B t, \tag{6}$$

式中,

$$b_i = \begin{bmatrix} h_i \cdot E d_i \\ h_i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{bmatrix}, t = \begin{bmatrix} \omega \\ v_o \end{bmatrix},$$

$$A = -a(\sin \alpha_i) I, \dot{\theta} = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dots \quad \dot{\theta}_n],$$

式中, $I$  是  $n \times n$  单位矩阵.

为得到系统运动约束条件,并使分析更加简练,将式(6)转换成笛卡尔坐标系的标量方程.

设  $|d_i| = d_i, |v_o| = v_o$ , 有

$$-a(\sin \alpha_i) \dot{\theta}_i = -d_i \sin(\beta_i - \beta'_i + \alpha_i) \omega + v_o \cos(\beta_o - \beta'_i + \alpha_i), \tag{7}$$

则运动学正解为

$$v_o = \frac{d_i \sin(\beta_i - \beta'_i + \alpha_i)}{\cos(\beta_o - \beta'_i + \alpha_i)} \omega - \frac{a \sin \alpha_i}{\cos(\beta_o - \beta'_i + \alpha_i)} \dot{\theta}_i, \quad (8)$$

式中,  $\cos(\beta_o - \beta'_i + \alpha_i) \neq 0, i = 1, 2, \dots, n,$

$$\omega = \frac{\cos(\beta_o - \beta'_i + \alpha_i)}{d_i \sin(\beta_i - \beta'_i + \alpha_i)} v_o + \frac{a \sin \alpha_i}{d_i \sin(\beta_i - \beta'_i + \alpha_i)} \dot{\theta}_i, \quad (9)$$

式中,  $\sin(\beta_i - \beta'_i + \alpha_i) \neq 0, i = 1, 2, \dots, n.$   
运动学逆解为

$$\dot{\theta}_i = \frac{d_i \sin(\beta_i - \beta'_i + \alpha_i)}{a \sin \alpha_i} \omega - \frac{\cos(\beta_o - \beta'_i + \alpha_i)}{a \sin \alpha_i} v_o, \quad (10)$$

式中,  $\sin \alpha_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n.$

式(8)和(9)是系统正运动学解析解,式(10)是逆运动学解析解.显然系统解析解式(8)~(10)适合于任意个 M-ODW 轮组成的全方位运动系统.

## 2 M-ODW 系统全方位运动的约束条件

### 2.1 辘子偏置角 $\alpha_i$ 与系统实现 ODM 的关系

M-ODW 轮结构特点决定了其运动特点, M-ODW 轮结构的基本特征参数是辘子偏置角  $\alpha_i$ <sup>[1]</sup>, 其取值的合理性决定了系统的运动特性.若偏置角  $\alpha_i = 0$  或  $\alpha_i = \frac{\pi}{2}$  时,有  $\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{j}_i = -1$ , 或  $\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{j}_i = 0$ , 因此轮中心速度方向始终和轮毂轴垂直,其运动性能和普通轮相似,不能实现 ODM 运动.但当偏置角  $\alpha_i = \frac{\pi}{2}$  时,经特殊配对的轮系也可实现多向运动或全向运动,属于特例,不在本研究讨论范围.

总之,轮的结构参数对系统实现全方位运动的约束条件为  $0^\circ < |\alpha_i| < 90^\circ$ , 即 Mecanum 轮系统的轮结构必须满足辘子偏置角是锐角.考虑到 X, Y 方向运动速度的均衡性,实践中多取  $\alpha_i = \pm 45^\circ$ .

### 2.2 系统轮组布局结构约束条件

由式(10)可知,当  $0^\circ < |\alpha_i| < 90^\circ$ , 任意给一组运动中心旋量  $\mathbf{t}$ , 总可以求得一组不全为零的轮毂转速  $[\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dots \ \dot{\theta}_n]$ . 也就是说,系统逆解必存在.由式(8)和(9)可知,并不是任意一组轮毂转速均能

产生相应的中心旋量  $[\omega \ v_o]$ , 也不是所有逆解都能有效驱动系统运动.系统中心运动旋量  $[\omega \ v_o]^T$  的大小不仅取决于各关节速度大小,而且取决于系统运动方向与系统位形之间的关系.

综合分析系统的正逆解,可得到系统实现全方位运动必须满足的几何结构条件,即系统必须从布局上满足以下约束关系:

$$\begin{cases} v_o = \frac{d_i \sin(\beta_i - \beta'_i + \alpha_i)}{\cos(\beta_o - \beta'_i + \alpha_i)} \omega - \frac{a \sin \alpha_i}{\cos(\beta_o - \beta'_i + \alpha_i)} \dot{\theta}_i, \\ \omega = \frac{\cos(\beta_o - \beta'_i + \alpha_i)}{d_i \sin(\beta_i - \beta'_i + \alpha_i)} v_o + \frac{a \sin \alpha_i}{d_i \sin(\beta_i - \beta'_i + \alpha_i)} \dot{\theta}_i, \\ \cos(\beta_o - \beta'_i + \alpha_i) \neq 0, \\ \sin(\beta_i - \beta'_i + \alpha_i) \neq 0, \\ \sin \alpha_i \neq 0, \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (11)$$

## 2.3 轮数量与系统实现 ODM 的关系

### 2.3.1 $n < 3$

当轮数量  $n < 3$  时,系统属于静态不稳定支撑系统,如独轮驱动和两轮驱动,必须采取特殊的控制措施以保证运动稳定性.显然这样的轮系只有两个自由度,不具备前述定义的三自由度全方位运动性能.

### 2.3.2 $n \geq 3$

根据前面的分析,  $n \geq 3$  的轮系可以有条件地实现全方位运动.目前应用中最常见的是 3 轮 M-ODW 系统和 4 轮 M-ODW 系统.3 轮系统的布局采用向心式均布布局,各轮辘子偏置角取相同值;4 轮 M-ODW 系统因支撑稳定可靠,驱动力均衡,因而实际应用中较多采用.一般 4 轮布局结构采用纵向对称式布局,即一种矩形布局形式,各轮的辘子偏置角也相同.总之,不论哪种布局形式,大于 3 轮的系总存在个别方向上的单关节奇异位形,但只要结构设计满足其结构几何约束条件,系统仍可实现全方位运动.

## 3 M-ODW 系统奇异位形及解决措施

当系统不满足式(11)的几何结构条件且当

$\beta_o - \beta'_i + \alpha_i = 0$  或  $\beta_o - \beta'_i + \alpha_i = \frac{\pi}{2}$  时,系统的中心旋量  $[\omega \ v_o]^T$  趋于  $\infty$ , 此时系统就陷入奇异位形;当系统运动陷入奇异位形(configuration)时,系统运动学雅可比矩阵的秩减少,系统的自由度减少<sup>[1]</sup>.4 轮系统的奇异位形分单关节和多关节两种情况,如系

统中只有一个轮处于奇异位形,就是单关节奇异位形,否则为多关节奇异位形.处于奇异位形的关节越多,系统驱动性能越差.特殊情况下,当所有轮处于奇异位形,此时该方向上系统失去运动能力.从系统的约束条件可知,是否存在奇异位形或有多少个单关节奇异位形,显然与系统的布局结构及运动方向相关.下面分 2 种典型的轮组结构布局形式进行讨论.

### 3.1 轮组向心式布局形式

第一种常见系统轮组布局结构形式如图 4 所示,所有轮毂的轴线延长交于运动中心  $O$  点,这种布局结构称为向心式布局形式.

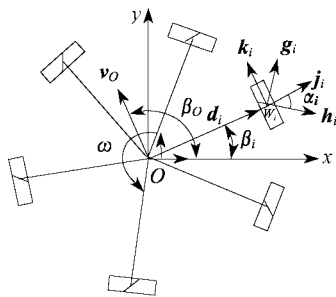


图 4 向心式布局结构

Fig. 4 Centrality lay-out

为讨论向心式布局形式下系统全方位运动的布局结构约束条件,设  $n$  个轮的系统中  $m$  个轮的轴线的矢量  $h_1, h_2, \dots, h_m$  与  $x$  轴有相同夹角,且系统中心运动速度  $v_o$  与  $h_i$  同向.显然此时这  $m$  个轮不满足式(11)结构条件,处于奇异位形.由式(10)可求得系统存在一组不全为零的逆解,当系统在此方向上运动时,这  $m$  个轮的轮毂速度只能取  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_m = 0$ ,因而这  $m$  个轮无驱动能力,轮与地面的滑动摩擦成为系统运动的阻力,系统驱动性能及驱动效率变差.当  $m \geq \frac{n}{2}$  时,系统在  $v_o$  方向上就失去了运动能力.此时,系统显然不能实现全方位运动.

为避开或减少系统奇异位形状态,改善系统的驱动性能,可从轮结构参数及轮组的布局结构方面采取如下措施:

(1) 取所有轮辋子的偏置角  $\alpha_i$  为相同值,不仅使得设计和应用 M-ODW 更加方便,同时也减少了系统奇异位形数量.实际应用中,为了使系统沿各个方向的驱动性能均衡,偏置角  $\alpha_i$  一般取  $45^\circ$  为宜.

(2) 系统轮组布局应使得各轮的  $h_i$  的方向各不

相同,当轮数量取奇数时,各轮之间的夹角均布比较合理.其优点是在任意方向上最多只有一个轮处于奇异位形,同时也使得各轮的负载均衡,系统运动更加稳定可靠.

若满足上述条件,则当系统轮数量  $n$  为奇数时,  $m = 1$ ; 当轮数量为偶数时,  $m = 2$ . 也就是说,此时系统中只有个别方向上存在最多 2 个关节奇异位形,而其他方向上不存在奇异位形,因而系统仍能实现全方位运动.

### 3.2 轮组纵向对称布局形式

多个 M-ODW 轮运动系统的另一种常见的结构布局是纵向轴对称结构,如图 4 所示,  $n$  个(偶数)轮沿  $y$  轴对称分布两列,即采用普通车辆的车轮布局形式.

在纵向对称布局下,若有  $m$  个轮辋子的偏置角使得  $h_i$  与  $x$  轴夹角相同,当运动方向与这  $m$  个轮不满足式(11)时,同样的原因使得这  $m$  个轮处于奇异位形,从而使系统的驱动性能变差;当  $m = n$  时,系统陷入奇异位形状态.解决措施是:

(1) 取所有轮辋子的偏置角  $\alpha_i$  为相同值;

(2) 通过调整轮之间的纵横向轮距及  $\alpha_i$  值的大小,以保证使最少的  $h_i$  处在同一方向,也就保证了使处于奇异位形的轮数量最少.

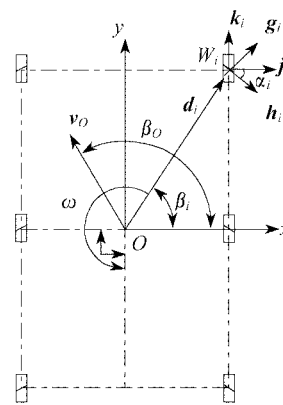


图 5 纵向对称布局结构

Fig. 5 Lengthways symmetrical lay-out

在实际应用中,为了制造的方便和经济性,通常将所有 Mecanum 轮制造为相同的结构形式,通过正反向安装法,使轮组布局结构形成左右两列轮辋子方向关于纵向轴对称形式.这样的布局的缺点为必然存在 2 个奇异位形方向,在此方向有一半的轮子处于被动滑动状态,驱动性能明显变差.而优点是在其余方向上,所有轮子均处于正常驱动状态.在纵向

对称布局下,避开系统奇异位形措施的另一种方法是利用系统具有绕中心的旋转能力,能合理避开行走方向上的奇异位形状态,具体方法是:假设在世界坐标系中,前进方向正处于系统的奇异方向上,则让系统绕中心旋转一个小角度( $10^\circ \sim 30^\circ$ ),使系统的奇异位形方向和前进方向错开,在前进方向上就避开了系统的奇异位形,系统可继续沿原前进方向行走.但这种方法改变了系统在世界坐标系中的姿态角,而姿态角的改变量和方向可通过控制系统方便地实现和处理.

## 4 结 论

(1) Mecanum 轮实现全方位运动的轮结构约束条件是:各轮辍子偏置角取值满足  $0^\circ < |\alpha_i| < 90^\circ$ , 实际应用中一般选取  $45^\circ$ , 以使各方向的驱动性能均衡.

(2) 轮数量小于3轮的系统不能实现全方位运动,大于等于3轮的系统能有条件地实现全方位运动,即必须满足系统运动的布局结构几何约束条件式(11).

(3) 几何约束条件决定了多轮 M-ODW 系统的布局形式不是任意的.如果布局不当,在某些方向上存在多个轮的奇异位形,系统的驱动能力变差.不论采用哪种布局结构,避免使系统陷入多关节奇异位形的措施是:尽量避免使多个轮的轮辍子轴线处于同一方向上.

### 参考文献:

[1] ANGELES J. 机器人机械系统原理理论、方法和算法

[M]. 宋伟刚,译.北京:机械工业出版社,2004:192-207.

- [2] 龚振帮,钱晋武. 机器人机械设计[M]. 北京:电子工业出版社,1995:76-83.
- [3] XU P. Mechatronics design of a Mecanum wheeled mobile robot [J]. Cutting Edge Robotics (Germany), 2005 (7):61-74.
- [4] SALIH J E M, RIZON M, YAACOB S, et al. Designing omni-directional mobile robot with Mecanum wheel [J]. American Journal of Applied Sciences, 2006, 3 (5): 1831-1835.
- [5] FIEGEL O, BADVE A, BRIGHT G, et al. Improved Mecanum wheel design for omni-directional robots [C]// Proc Australasian Conf Robotics and Automation, Auckland. 2002:117-121.
- [6] CAMPION G, BASTIN G, DANDREA-NOVE B. Structural properties and classification of kinematics and dynamic models of wheeled mobile robots [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1996, 12(1):47-62.
- [7] 闫国荣,张海兵. 一种新型轮式全方位移动机构[J]. 哈尔滨工业大学学报:自然科学版,2001,33(6):854-857.
- [8] SAMANI A H, ABDOLLAHI A, OSTADI H, et al. Design and development of a comprehensive omni directional soccer player robot [J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2004, 1(3):191-200.
- [9] 张翻,熊蓉,褚键,等. 一种全方位移动机器人的运动分析与控制实现[J]. 浙江大学学报:工学版,2004,38(12):1651-1654.

(编辑:刘志强)