第15卷第4期
2009年8月

上海大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF SHANGHAI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 15 No. 4
Aug. 2009

文章编号: 1007-2861(2009)04-0380-08

同型机和批处理机组成的二阶段流水作业问题

王文伟, 何龙敏, 孙世杰

(上海大学 理学院,上海 200444)

摘要: 讨论一类二阶段流水作业问题,其中第一阶段由 m 台同型机组成,第二阶段为1台批处理机,目标函数是最小化各工件完工时间之和. 工件在同型机和批处理机上分别有相同加工时间的情况下,给出了计算量为 $O(n^3)$ 的最优算法. 相应工件在同型机上有相同加工时间,但在批处理机上具有任意加工时间的情况下,指出其强 NP-hard 后给出了近似算法,并作了性能比分析.

关键词: 排序;流水作业;同型机;批处理机

中图分类号: O 223　　　**文献标志码**: A

Two-Stage Flowshop Scheduling Problems with Identical and Batch Processors

WANG Wen-wei, HE Long-min, SUN Shi-jie

(College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: This paper considers a two-stage flowshop scheduling problems with m identical parallel machines at stage one and a batch processor at stage two, and minimizes the total completion time. We get optimal solution in time of the order $O(n^3)$ when all jobs have the same processing time at stage one and stage two respectively. In the case that all jobs have same processing time at stage one but have arbitrary processing time at stage two, we analyze the worst-case of an approximation algorithm and show that the problem is strongly NP-hard in this case.

Key words: scheduling; flowshop; identical machine; batch processor

柔性流水作业(flexible flow shop, FFS)的一般定义是: n 个工件,需依次通过 k 个阶段加工,第 i 阶段有 m_i 台平行机($i=1,2,\cdots,k$),所有工件只需在每个阶段的任一台平行机上加工. 记这样的问题为 $Fk(m_1,m_2,\cdots,m_k)\parallel f$,其中 f 为目标函数. 本研究只讨论最小化完工时间之和,即 $f=\sum C_j$. 当 $k=1$ 时问题转化为 $Pm\parallel\sum C_j$. Horn 于1973年[1]证得 SPT 序是最优序,当 $k=2, m_1=m_2=1$ 时问题转化为 $F2(1,1)\parallel\sum C_j$. Hoogeveen 和 Kawaguchi 证得此问题[2]. 当工件在第一台机器上有相同加工时间,在第二台机器上有任意加工时间时已为强 NP-hard.

分批排序(burn in, BI)是从半导体生产过程的最后阶段老化测试中提炼出来的一类排序问题. 问题的模式是:有 n 个元件需进行老化测试,其中元件

收稿日期:2008-05-15
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60874039);上海大学创新基金资助项目
通信作者:何龙敏(1958~),男,副教授,博士,研究方向为组合最优化. E-mail:hlm@shu.edu.cn

J_j 的到达时间为 $r_j(j=1,2,\cdots,n)$,至少加工时间为 $p_j(j=1,2,\cdots,n)$. 炉子以成批方式加热(老化测试)这些元件,一次至多加热 B 个元件,且在加热过程中无元件进出. 各元件占有炉子容积相同,加热的时间为该批元件中的最长加工时间. 要求将这 n 个元件适当分批加热以使目标函数 f 达到最小,我们记这类问题为 $1|B|f$. 对最小化完工时间之和的一台批处理机问题 $1|B|\sum C_j$, 1993 年 Chandru 等[3]给出此问题最优序的两个特征. 1997 年 Hochbaum 和 Landy[4]对此问题给出了计算量 $O(nB)$,最差性能比小于等于 2 的算法. 当问题中工件有 2 个到达时间(记为 $1|B,r_j\in\{0,r\}|\sum C_j$). 2000 年丁际环等[5]证得为 NP-hard. 对工件有任意到达时间即 $1|B,r_j|\sum C_j$, 2005 年 Liu 和 Cheng[6]给出了一个 PTAS(polynomial-time approximation scheme)算法. 当工件在批处理机上有相同加工时间时 ($1|B,r_j,p_j\equiv p|\sum C_j$), 1992 年 Ahmadi 等[7]给出了计算量为 $O(n^3)$ 的动态规划算法. 当问题为由 m 台批处理机组成的同型机时(记为 $Pm|B,r_j|\sum C_j$), 2004 年任建峰和张玉忠[8]给出了一个 PTAS 算法.

对 FFS 问题和 BI 问题的研究已有许多结果,但现实生产中的许多问题往往是二者的结合. 如许多机械零件需先在一组机床上分别作切削加工,然后作分批热处理;另外,在铸造线上下来的铸件,在经一些工人清砂后进入切削加工前先需进行退火处理,以消除铸造应力. 这两个问题均为 FFS-BI 问题.

本工作研究 FFS-BI 问题的二阶段流水作业. 有一个二阶段流水作业,n 个工件依次通过阶段 1 和阶段 2 的加工. 阶段 1 由 $m(m>1)$ 台同型机组成,工件 J_j 只需在其中一台上作时间为 a_j 的加工($j=1,2,\cdots,n$). 阶段 2 为一台批处理机 M,该机器单独处理工件 J_j 所需的时间为 $b_j(j=1,2,\cdots,n)$,但该机器一次可同时处理不超过 $B(B\geqslant 1)$ 个工件,其中给定常数 B 为批处理机 M 的容量,批处理机 M 处理同批工件所需的时间为单独处理其中工件所需时间最长者. 要求适当安排一加工方式,使各工件完工时间之和($\sum C_j$)达最小值. 记此排序问题为 $F2(m,B)\|\sum C_j$, 其中 $F2$ 指二阶段流水作业,括号中的 m 指阶段 1 由 m 台同型机组成 ,括号中 B 指阶段 2 由一台容量为 B 的批处理机 M 组成.

1　记号和定义

B_i 为在批处理机上加工的第 i 批工件,有时也指这批工件的数量. n 为工件数. N 为工件下标集合 $\{1,2,\cdots,n\}$. J_j 为下标为 j 的工件,简称工件 $j(j\in\mathbf{N})$. p_j,a_j,b_j,r_j,C_j 分别表示下标为 j 的工件的加工时间、在同型机上的加工时间、在批处理机上的加工时间、到达时间、在批处理机上的完工时间. $\sum C_j$ 为所有工件在批处理机上的完工时间之和. $\lfloor x\rfloor$, $\lceil x\rceil$ 分别表示小于等于 x 的最大整数和大于等于 x 的最小整数. LOE(n,B) 规则为 n 个工件分批时,前 $(\lceil n/B\rceil-1)$ 批都满批, 最后一批有 $n-(\lceil n/B\rceil-1)B$ 个工件.

2　问题 $F2(m,B)|a_j\equiv a, b_j\equiv b|\sum C_j$ 的最优算法

在阶段 1,工件 $J_1,J_2,\cdots,J_n$ 依次排在当前最先空闲的机器上,由于 $a_j\equiv a,b_j\equiv b$,即所有工件等价,故有

引理 1　对问题 $F2(m,B)|a_j\equiv a,b_j\equiv b|\sum C_j$, 各同型机无空转加工其上所有工件的序为优势序.

证明　显然.

利用引理 1,考虑工件在阶段 1 无空转的加工序:工件 J_j 在阶段 1 的完工时间为 $\left\lceil\frac{j}{m}\right\rceil a$,在将其视作工件 J_j 到达批处理机 M 的时间 $r_j=\left\lceil\frac{j}{m}\right\rceil a\ (j\in\mathbf{N})$,原问题等价为 $1|B,r_j,b_j\equiv b|\sum C_j$. 对此问题,1992 年 Ahmadi 等给出了一个 $O(n^3)$ 时间的动态规划算法[7]. 因此,利用 $r_j=\left\lceil\frac{j}{m}\right\rceil a\ (j\in\mathbf{N})$ 对文献[7]的算法作一些相应的变动,即可得问题 $F2(m,B)|a_j\equiv a,b_j\equiv b|\sum C_j$ 的 $O(n^3)$ 时间的动态规划算法, 列举如下.

任一时刻批处理机处于两种状态之一:加工—在连续加工 h 批工件的过程中($1\leqslant h\leqslant n$),等待—等待新的工件到达.

优势序具有这样的特征:先到的工件先加工,连续加工的 h 批工件的第一批开始加工的时间必为某个工件的到达时间 r_j.

令 $\omega(t)$ 为 t 时刻等待加工的工件数(已到达但未被加工),N_k 为连续加工的工件中第 k 批工件数,$f(r_j,w(r_j))$ 为 r_j 时刻有 $w(r_j)$ 个工件等待加工时,加工所有未加工工件(包括等待加工的和未到达的工件)所需的最小的完工时间之和.

递推关系式

$$f(r_j,w(r_j)) = \min\{f(r_{j+1},w(r_j)+1), \min_{n\geqslant h\geqslant 1}\{S(j,h)+f(r_{j(h)},\omega(r_{j(h)}))\}\}.$$

式中,

(1) $S(j,h)=\sum_{k=1}^{h}(r_j+kb)N_k$ 表示 r_j 时刻连续加工的 h 批工件的完工时间之和,$N_k=\min\{\omega(r_j+(k-1)b),B\},k=1,\cdots,h$;

(2) $r_{j(h)}=\min\{r_i:r_i>r_j+hb\}$ 表示在 r_j+hb 之后的第一个(可能的)连续加工的开始时刻;

(3) $\omega(r_{j(h)})=\omega(r_j+hb)+1$ 表示 $r_{j(h)}$ 时刻等待加工的工件数;

(4) $\omega(r_j+(k-1)b)=|i:r_j+(k-2)b<r_i\leqslant r_j+(k-1)b|+[(\omega(r_j+(k-2)b))-B]^+$,$|i:r_j+(k-2)b<r_i\leqslant r_j+(k-1)b|$ 表示加工第 $(k-1)$ 批工件后到开始加工第 k 批时新到 达的工件数,

$$[(\omega(r_j+(k-2)b))-B]^+=\begin{cases}\omega(r_j+(k-2)b)-B, & \omega(r_j+(k-2)b)>B,\\ 0, & \omega(r_j+(k-2)b)\leqslant B,\end{cases}$$

表示加工第 $k-1$ 批工件时,可供加工的工件多于批处理机容量 B 的工件数.

为了描述由以上递推关系式得到最优序的过程,令

$$f(r_{j+1},w(r_j)+1)\equiv S(j,0)+f(r_{j(0)},\omega(r_{j(0)})),$$

则

$$f(r_j,w(r_j))=\min_{n\geqslant h\geqslant 0}\{S(j,h)+f(r_{j(h)},\omega(r_{j(h)}))\}.$$

计算 $f(r_1,w(r_1))$ 可得以下一般结果:

$$\begin{aligned}f(r_1,w(r_1))\equiv f(r_{n_1},w(r_{n_1}))=&\\ \min\{S(n_1,0)+f(r_{n_1(0)},\omega(r_{n_1(0)})),&\\ S(n_1,1)+f(r_{n_1(1)},\omega(r_{n_1(1)})),&\\ \cdots,S(n_1,h_1)+f(r_{n_1(h_1)},\omega(r_{n_1(h_1)}))\}=&\\ S(n_1,h_1^*)+f(r_{n_1(h_1^*)},\omega(r_{n_1(h_1^*)})),&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(r_{n_1(h_1^*)},\omega(r_{n_1(h_1^*)}))\equiv f(r_{n_2},w(r_{n_2}))=&\\ \min\{S(n_2,0)+f(r_{n_2(0)},\omega(r_{n_2(0)})),&\\ S(n_2,1)+f(r_{n_2(1)},\omega(r_{n_2(1)})),\cdots,&\\ S(n_2,h_2)+f(r_{n_2(h_2)},\omega(r_{n_2(h_2)}))\}=&\\ S(n_2,h_2^*)+f(r_{n_2(h_2^*)},\omega(r_{n_2(h_2^*)})),&\end{aligned}$$

$\cdots$

$$\begin{aligned}f(r_{n_{H-1}(h_{H-1}^*)},\omega(r_{n_{H-1}(h_{H-1}^*)}))\equiv f(r_{n_H},w(r_{n_H}))=&\\ \min\{S(n_H,0)+f(r_{n_H(0)},\omega(r_{n_H(0)})),S(n_H,1)+&\\ f(r_{n_H(1)},\omega(r_{n_H(1)})),\cdots,S(n_H,h_H)+&\\ f(r_{n_H(h_H)},\omega(r_{n_H(h_H)}))\}=S(n_H,h_H^*)+0.&\end{aligned}$$

符号说明:

(1) $n_1=1$; h_1 为 r_{n_1} 时刻有 $\omega(r_{n_1})$ 个工件等待加工时最多可能连续加工的批数; h_1^* 为 r_{n_1} 时刻有 $\omega(r_{n_1})$ 个工件等待加工时连续加工 h_1^* 批时 $f(r_{n_1},w(r_{n_1}))$ 最小 $(0\leqslant h_1\leqslant n,0\leqslant h_1^*\leqslant h_1)$.

(2) $n_2=n_1(h_1^*)$; h_2 为 r_{n_2} 时刻有 $\omega(r_{n_2})$ 个工件等待加工时最多可能连续加工的批数; h_2^* 为 r_{n_2} 时刻有 $\omega(r_{n_2})$ 个工件等待加工时连续加工 h_2^* 批时 $f(r_{n_2},w(r_{n_2}))$ 最小 $(0\leqslant h_2\leqslant n-1,0\leqslant h_2^*\leqslant h_2)$.

(3) $n_H=n_{H-1}(h_{H-1}^*)$ 为最后一次连续加工的工件中下标最小的工件的下标; H 为求得最小 $f(r_{n_1},w(r_{n_1}))$ 使用递推公式的总次数; h_H 为 r_{n_H} 时刻有 $\omega(r_{n_H})$ 个工件等待加工时最多可能连续加工的批数; h_H^* 为 r_{n_H} 时刻有 $\omega(r_{n_H})$ 个工件等待加工时连续加工 h_H^* 批时 $f(r_{n_H},w(r_{n_H}))$ 最小 $(0<h_H\leqslant n-(H-1),0<h_H^*\leqslant h_H)$.

那么最优序为:在 r_{n_1} 时刻连续加工 h_1^* 批(当 $h_1^*=0$ 时则在 r_{n_1} 时刻不加工,以此类同),在 r_{n_2} 时刻连续加工 h_2^* 批,$\cdots$,在 r_{n_H} 时刻连续加工 h_H^* 批.

除了利用动态规划求问题 $F2(m,B)\mid a_j\equiv a,b_j\equiv b\mid\sum C_j$ 的最优解,对下述特殊情况还存在更简单的算法(见引理2和引理3).

引理 2 对问题 $F2(m,B)\mid a_j\equiv a,b_j\equiv b\mid\sum C_j$,若 $a\geqslant\left[\frac{m}{B}\right]b$,则同型机每加工完 m 个工件(最后加工的工件数可能小于 m),立即转入阶段2,依 LOE(m,B) 规则加工,所得序为最优序.此时最优值为

$$\sum C_j=\left[\left(\left[\frac{n}{m}\right]+1\right)\left[\frac{n}{m}\right]\left[\frac{m}{B}\right]\Big/2+\left[\frac{n}{m}\right]\left[\frac{n-\left[\frac{n}{m}\right]m}{B}\right]\right]aB+\left[\left(\left[\frac{m}{B}\right]+1\right)\left[\frac{m}{B}\right]\cdot\left[\frac{n}{m}\right]+\left(\left[\frac{n-\left[\frac{n}{m}\right]m}{B}\right]+1\right)\left[\frac{n-\left[\frac{n}{m}\right]m}{B}\right]\right]bB/$$

$$2+\left[\left(\left[\frac{n}{m}\right]+1\right)\left[\frac{n}{m}\right]a/2+\left[\frac{m}{B}\right]\left[\frac{n}{m}\right]b\right]\left(m-\left[\frac{m}{B}\right]B\right)+\left(\left[\frac{n}{m}\right]a+\left[\frac{n-\left[\frac{n}{m}\right]m}{B}\right]b\right)\left(n-\left[\frac{n}{m}\right]m-\left[\frac{n-\left[\frac{n}{m}\right]m}{B}\right]B\right).$$

证明　同型机每加工完 m 个工件，批处理机用 LOE(m,B) 规则加工这 m 个工件，则这 m 个工件的完工时间之和最小. 此时这 m 个工件在批处理机上的运行时间为 $\left[\frac{m}{B}\right]b$，由条件 $a\geqslant\left[\frac{m}{B}\right]b$ 知，LOE(m,B) 规则可以使批处理机在下一批 m 个工件到达之前以最小的完工时间之和加工完到达的 m 个工件. 因此，所有的 n 个工件的完工时间之和最小. 此时最优值为

$$\begin{aligned}\sum C_j=&\left[(a+b)B+(a+2b)B+\cdots+\left(a+\left[\frac{m}{B}\right]b\right)B+\left(a+\left[\frac{m}{B}\right]b\right)\left(m-\left[\frac{m}{B}\right]B\right)\right]+\\&\left[(2a+b)B+(2a+2b)B+\cdots+\left(2a+\left[\frac{m}{B}\right]b\right)B+\left[2a+\left[\frac{m}{B}\right]b\right)\left(m-\left[\frac{m}{B}\right]B\right)\right]+\\&\left[\left(\left[\frac{n}{m}\right]a+b\right)B+\left(\left[\frac{n}{m}\right]a+2b\right)B+\cdots+\left(\left[\frac{n}{m}\right]a+\left[\frac{m}{B}\right]b\right)B+\left(\left[\frac{n}{m}\right]a+\left[\frac{m}{B}\right]b\right)\right)m-\left[\frac{m}{B}\right]B\right)\right]+\\&\left[\left(\left[\frac{n}{m}\right]a+b\right)B+\left(\left[\frac{n}{m}\right]a+2b\right)B+\cdots+\left(\left[\frac{n}{m}\right]a+\left[\frac{n-\left[\frac{n}{m}\right]m}{B}\right]b\right)B+\right)\left[\frac{n}{m}\right]a+\left[\frac{n-\left[\frac{n}{m}\right]m}{B}\right]b\right)\left(n-\left[\frac{n}{m}\right]m-\left[\frac{n-\left[\frac{n}{m}\right]m}{B}\right]B\right)\right]=\\&\left[\left(\left[\frac{n}{m}\right]+1\right)\left[\frac{n}{m}\right]\left[\frac{m}{B}\right]\Big/2+\left[\frac{n}{m}\right]\cdot\left[\frac{n-\left[\frac{n}{m}\right]m}{B}\right]\right]aB+\left[\left(\left[\frac{m}{B}\right]+1\right)\left[\frac{m}{B}\right]\left[\frac{n}{m}\right]+\left[\left[\frac{n-\left[\frac{n}{m}\right]m}{B}\right]+1\right)\left[\frac{n-\left[\frac{n}{m}\right]m}{B}\right]\right]bB/2+\\&\left[\left(\left[\frac{n}{m}\right]+1\right)\left[\frac{n}{m}\right]a/2+\left[\frac{m}{B}\right]\left[\frac{n}{m}\right]b\right]\left(m-\left[\frac{m}{B}\right]B\right)+\left(\left[\frac{n}{m}\right]a+\left[\frac{n-\left[\frac{n}{m}\right]m}{B}\right]b\right)\left(n-\left[\frac{n}{m}\right]m-\left[\frac{n-\left[\frac{n}{m}\right]m}{B}\right]B\right).\end{aligned}$$

引理 3　对问题 $F2(m,B)\mid a_j\equiv a,b_j\equiv b\mid\sum C_j$，若 $a\leqslant\left[\frac{m}{B}\right]b$，则批处理机从时刻 a 起，以 LOE(n,B) 规则加工时得到的序是最优序. 此时最优值 $\sum C_j=na+\left(n-\left[\frac{n}{B}\right]B/2\right)\left(\left[\frac{n}{B}\right]+1\right)b$.

证明　首先，阶段 2 最早加工时刻为 a；其次，由条件 $0<a\leqslant\left[\frac{m}{B}\right]b$，从时刻 a 起，批处理机能够以 LOE(n,B) 规则连续加工完各批工件，此时 n 个工件的完工时间之和最小. 此时，最优值为

$$\sum C_j=(a+b)B+(a+2b)B+\cdots+\left(a+\left[\frac{n}{B}\right]b\right)B+\left(a+\left(\left[\frac{n}{B}\right]+1\right)b\right)\cdot\left(n-\left[\frac{n}{B}\right]B\right)=na+\left(n-\left[\frac{n}{B}\right]B/2\right)\left(\left[\frac{n}{B}\right]+1\right)b.$$

由以上分析，可归纳为算法 H2.1.

算法 H2.1

阶段 1　依次取工件 $J_1,J_2,\cdots,J_n$ 排在当前最先空闲的同型机上.

阶段 2　(1) 若 $a\geqslant\left[\frac{m}{B}\right]b$，阶段 1 每加工完 m 个工件(最后的工件数可能小于 m)，立即转入阶段 2 以 LOE(m,B) 规则加工.

(2) 若 $a\leqslant\left[\frac{m}{B}\right]b$，从时刻 a 起，以 LOE(n,B) 规则加工.

(3) 若 $\left[\frac{m}{B}\right]b<a<\left[\frac{m}{B}\right]b$，以前述动态规划所确定的序加工.

由于阶段 1 的计算量为 $O(n)$，阶段 2 的计算量为 $O(n^3)$，所以整个算法 H2.1 的计算量是 $O(n^3)$. 因此，我们有下面的定理 1.

定理 1　问题 $F2(m,B)\mid a_j\equiv a,b_j\equiv b\mid\sum C_j$ 在 $O(n^3)$ 时间内可解.

证明　由引理 1 ~ 引理 3 以及 1992 年 Ahmadi

等对问题 $1 \mid B, r_j, b_j \equiv b \mid \sum C_j$ 的证明[7]可证之.

下面分别对应算法 H2.1 中三种情形给出简单的算例.

例1 $n=10, a=3, b=1, m=3, B=2$.

由于 $3=a \geqslant \left[\frac{m}{B}\right] b=2$,批处理机对每到达的3个工件用 LOE(3,2)规则加工. 当 t 为3,4,6,7,9,10,12时,批处理机分别加工工件$\{1,2\},\{3\},\{4,5\},\{6\},\{7,8\},\{9\},\{10\}$. $\min \sum_{j=1}^{10} C_j=(3+1)2+(4+1)+(6+1)2+(7+1)+(9+1)2+(10+1)+(12+1)=79$.

例2 $n=11, a=2, b=3, m=3, B=2$.

由于 $2=a \leqslant \left[\frac{m}{B}\right] b=3$,批处理机对所有11个工件用 LOE(11,2)规则加工. 当 t 为2,5,8,11,14,17时,批处理机分别加工工件 $\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\},\{11\}$. $\min \sum_{j=1}^{11} C_j=(2+3)2+(5+3)2+(8+3)2+(11+3)2+(14+3)2+(17+3)=130$.

例3 $n=11, a=3, b=4, m=2, B=3$.

由于 $0=\left[\frac{m}{B}\right] b<a=3<\left[\frac{m}{B}\right] b=4$,使用前述动态规划算法所确定的序加工:

$$r_1=r_2=3, r_3=r_4=6, r_5=r_6=9, r_7=r_8=12, r_9=r_{10}=15, r_{11}=18.$$

$$\begin{aligned}f(r_1,2)=&\min\{f(r_4,4), S(2,1)+f(r_6,4), S(2,2)+f(r_8,4), S(2,3)+f(r_{11},5), S(2,4)+f(19,2)\}=\min\{f(r_4,4), S(2,1)+\\&f(r_6,4), S(2,2)+f(r_8,4), S(2,4)+f(19,2)\}.\end{aligned}$$

舍去 $S(2,3)+f(r_{11},5)$ 的原因是在 r_2 有2个工件等待加工的情形下,只连续加工3批不可能为最优序. 因为连续加工3批后,有4个工件7,8,9,10等待加工,批处理机容量是3,所以至少需要连续加工4批. 其中

$$\begin{aligned}f(r_4,4)=&\min\{f(r_6,6), S(4,1)+f(r_8,5), S(4,2)+f(r_{10},4), S(4,3)+f(r_{11},3), S(4,4)\}=\\&\min\{S(4,2)+f(r_{10},4), S(4,3)+f(r_{11},3), S(4,4)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(r_6,4)=&\min\{S(6,2)+f(r_{11},3), S(6,3)+f(21,1)\}.\ f(r_8,4)=\min\{S(8,2)+f(20,1)\}=108+24=132.\ f(19,2)=\\&(19+4)2=46.\end{aligned}$$

再分别计算 $f(r_4,4)$, $f(r_6,4)$ 和 $f(r_8,4)$ 中的 $f(r_{10},4)$, $f(r_{11},3)$, $f(21,1)$ 和 $f(20,1)$,

$$f(r_{10},4)=(15+4)3+(15+2\times4)2=103,$$
$$f(r_{11},3)=(18+4)3=66,$$
$$f(21,1)=21+4=25,$$
$$f(20,1)=20+4=24,$$

所以,

$$\begin{aligned}f(r_4,4)=&\min\{(6+4)3+(6+2\times4)3+103, 72+(6+3\times4)2+66, 108+(6+4\times4)3\}=\\&\min\{175,174,174\}=174,\\f(r_6,4)=&\min\{90+66,(90+42)+(21+4)\}=\\&\min\{156,157\}=156,\\f(r_1,2)=&\min\{174,14+156,36+132,123+46\}=\\&\min\{174,170,168,169\}=168.\end{aligned}$$

由此,$f(r_1,2)=S(2,2)+f(r_8,4)=S(2,2)+\{S(8,2)+f(20,1)\}=36+\{108+24\}=168$ 时最优(在 r_2 时刻连续加工两批,在 r_8 时刻连续加工两批,在时刻20时加工最后一个工件). 最优序:当 t 为3,7,12,16,20时,批处理机分别加工工件 $\{1,2\},\{3,4\},\{5,6,7\},\{8,9,10\},\{11\}$.

$$\min \sum_{j=1}^{11} C_j=(3+4)2+(7+4)2+(12+4)3+(16+4)3+(20+4)=168.$$

3 问题 $F2(m,B) \mid a_j \equiv a \mid \sum C_j$

若 $m=1, B=1$,原问题为 $F2 \mid a_j \equiv a \mid \sum C_j$, Hoogeveen 和 Kawaguchi 证得此问题为强 NP-hard[2]. 因此,当 $m \geqslant 1, B \geqslant 1$ 时,问题 $F2(m,B) \mid a_j \equiv a \mid \sum C_j$ 为强 NP-hard 的. 下述假设对工件已按 SPT 规则预排,即 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$.

定理2 对问题 $F2(m,B) \mid a_j \equiv a \mid \sum C_j$,各同型机无空转加工其上所有加工工件的序为优势序.

证明 显然.

定理3 对问题 $F2(m,B) \mid a_j \equiv a \mid \sum C_j$,批处理机上加工的每一批连续下标的工件组成的序为优势序(相继批中的工件间不必存在此种关系).

证明 设 σ_0 为某批中由非连续下标的工件组成的序,对其依下述过程可以构造一个每批中只有

连续下标的工件组成且目标函数值不增的序 σ_s(s 为 σ_0 中批的批数). 过程如下:

$$\sigma_0 \to \sigma_1 \to \sigma_2 \to \cdots \to \sigma_{s-1} \to \sigma_s,$$

其中设序 $\sigma_{k-1}(k=1,2,\cdots,s)$ 中按批加工时间排第 k 的那批(各批间未必按批加工时间排序)工件由 $J_{k_1},J_{k_2},\cdots,J_{k_{B_k}}$ 组成, 并已按加工时间非增标号即 $b_{k_1} \geqslant b_{k_2} \geqslant \cdots \geqslant b_{k_{B_k}}$. 序 $\sigma_{k-1}(k=1,2,\cdots,s)$ 通过以下过程变成序 σ_k:

$$\sigma_{k-1} = \sigma_{k-1}^1 \to \sigma_{k-1}^2 \to \cdots \to \sigma_{k-1}^{B_k} = \sigma_k,$$

序 $\sigma_{k-1}^i(i=2,3,\cdots,B_k)$ 是序 σ_{k-1}^{i-1} 中工件 J_{k_i} 与工件 $J_{k_1-(i-1)}$ 交换加工次序后所得到的序, 其交换过程参考例 2:

若 $k_i = k_1-(i-1)$, 即 J_{k_i} 和 $J_{k_1-(i-1)}$ 是同一工件时, 则不需要交换, $\sigma_{k-1}^i = \sigma_{k-1}^{i-1}$;

若 $k_i \neq k_1-(i-1)$, 则交换 J_{k_i} 和 $J_{k_1-(i-1)}$ 在同型机和批处理机上的加工次序.

要证明以上过程构造的序 σ_s 是符合条件的序, 只要证明序 σ_k 中加工时间排前 k 批的各批由连续下标工件组成, 且序 σ_k 的目标函数值不大于序 σ_{k-1} 的目标函数值(相当于使用数学归纳法证明).

(1) 证明序 σ_k 加工时间排前 k 批的各批由连续下标工件组成.

① 序 σ_{k-1} 中加工时间排前 $k-1$ 批的各批已经由连续下标工件组成.

② 在序 σ_{k-1} 变成序 σ_k 的过程中($\sigma_{k-1} = \sigma_{k-1}^1 \to \sigma_{k-1}^2 \to \cdots \to \sigma_{k-1}^{B_k} = \sigma_k$), 序 σ_{k-1} 中加工时间排前 $k-1$ 批的各批没有参与交换, 这些批在序 σ_k 中仍然是由连续下标工件组成, 且排前 $k-1$ 批(按加工时间). 因为从其他批取出的工件 $J_{k_1-(i-1)}(i=2,3,\cdots,B_k)$ 加工时间都小于等于 J_{k_1}, 若 $J_{k_1-(i-1)}$ 取自加工时间排前 $k-1$ 的批, 则 J_{k_1} 也将属于加工时间排前 $k-1$ 的某批中, 与 J_{k_1} 属于加工时间排第 k 的批矛盾.

③ 在序 σ_{k-1} 变成序 σ_k 后, σ_k 中加工时间排第 k 的批就由连续下标工件组成(由 $\sigma_{k-1}^1 \to \sigma_{k-1}^2 \to \cdots \to \sigma_{k-1}^{B_k}$ 的作法可得).

(2) 证明序 σ_k 的目标值不大于序 σ_{k-1}.

只要证序 σ_{k-1}^i 的目标值不大于序 σ_{k-1}^{i-1} 的目标值(相当于使用数学归纳法证明). 工件 J_{k_i} 与 $J_{k_1-(i-1)}$ 交换加工次序后:

① 序 σ_{k-1}^i 中加工时间排第 k 的批加工时间仍为 b_{k_1}, 工件个数仍为 B_k, 该批工件在同型机上的完工时间向量(由小到大排列)也不变.

② 工件 J_{k_i} 现所在的批, 其加工时间小于等于原加工时间(因为 $b_{k_i} \leqslant b_{k_1-(i-1)}$), 工件个数和在同型机上的完工时间向量也不变.

③ 在序 σ_{k-1}^{i-1} 中的其他批在序 σ_{k-1}^i 中都没变.

由①~③知序 σ_{k-1}^i 相对于序 σ_{k-1}^{i-1} 每批的开始加工时间、工件个数都不变, 加工时间不增(可能变小), 所以 σ_{k-1}^i 的目标值相对于序 σ_{k-1}^{i-1} 不增.

例 2　12 个工件 $J_1,J_2,\cdots,J_{12}$ 按 SPT 序预排, 在批处理机上的加工时间 $(b_1,b_2,\cdots,b_{12}) = (2,3,5,7,8,11,12,12,13,16,21,25)$, 序 σ_0: 第一批工件 J_{11},J_7,J_3, 第二批工件 J_{12},J_8,J_6, 第三批工件 J_9,J_5,J_4,J_1, 第四批工件 J_{10},J_2, 简记为 $\sigma_0 = (11,7,3)(12,8,6)(9,5,4,1)(10,2)$. 按定理 3 证明的交换过程, 有

$$\sigma_0^2 = (8,7,3)(12,11,6)(9,5,4,1)(10,2),$$
$$\sigma_0^3 = (8,7,3)(12,11,10)(9,5,4,1)(6,2) = \sigma_1;$$
$$\sigma_1^2 = (7,5,3)(12,11,10)(9,8,4,1)(6,2),$$
$$\sigma_1^3 = (5,4,3)(12,11,10)(9,8,7,1)(6,2),$$
$$\sigma_1^4 = (5,4,3)(12,11,10)(9,8,7,6)(2,1) = \sigma_2;$$
$$\sigma_2^2 = (5,4,3)(12,11,10)(9,8,7,6)(2,1),$$
$$\sigma_2^3 = (5,4,3)(12,11,10)(9,8,7,6)(2,1) = \sigma_3;$$
$$\sigma_3^2 = (5,4,3)(12,11,10)(9,8,7,6)(2,1) = \sigma_4.$$

下面我们结合定理 2 和定理 3 给出问题 $F2(m,B) \mid a_j \equiv a \mid \sum C_j$ 的近似算法 H3.1, 求出性能比并指出该性能比是紧的.

算法 H3.1

步骤 1　作 $\{b_j\}$ 的 SPT 序.

步骤 2　依此序安排各工件尽快完成阶段 1 的加工.

步骤 3　阶段 1 每完成 B 个工件即作为一批尽早完成阶段 2 的加工(当可供加工工件多于 B 个时, 取下标最小的 B 个工件加工).

显然算法 H3.1 的计算量为 $O(n \log n)$.

为讨论算法性能比, 先作几个假设:

对问题 $F2(m,B) \mid a_j \equiv a \mid \sum C_j$, 设最优解中工件 j 在阶段 1 的完工时间为 C_j^{1*}, 在阶段 2 的完工时间为 C_j^{2*}, 最优值为 $f^* = \sum_{j=1}^{n} C_j^{2*}$; 设算法 H3.1 中工件 j 在阶段 1 的完工时间为 $C_j^{1\text{H3.1}}$, 在阶段 2 的完工时间为 $C_j^{2\text{H3.1}}$, 目标值为 $f^{\text{H3.1}} = \sum_{j=1}^{n} C_j^{2\text{H3.1}}$. 由于

$a_j \equiv a$, 令 $A = \sum_{j=1}^{n} C_j^{1*} = \sum_{j=1}^{n} C_j^{1H3.1}$, 对最优值的估计为

$$f^* = \sum_{j=1}^{n} C_j^{2*} \geqslant \sum_{j=1}^{n} (C_j^{1*} + b_j) = \sum_{j=1}^{n} C_j^{1*} + \sum_{j=1}^{n} b_j = A + W_1,$$

式中, $W_1 = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

为估计 $f^{H3.1} = \sum_{j=1}^{n} C_j^{2H3.1}$, 分 $m \geqslant B$ 和 $m < B$ 两种情况进行讨论.

(1) $m \geqslant B$.

对第1批工件 $1,2,\cdots,B$, 有 $C_1^{2H3.1} = C_1^{1H3.1} + b_B$, $C_2^{2H3.1} = C_2^{1H3.1} + b_B$, $\cdots$, $C_B^{2H3.1} = C_B^{1H3.1} + b_B$.

对第2批工件 $B+1, B+2, \cdots, 2B$, 在阶段1, 同批工件中最迟完工和最早完工工件的完工时间差不大于 a, 而以工件 $2B$ 为最迟完工; 在阶段2, 各工件完工时间不迟于 $C_{2B}^{1H3.1} + b_B + b_{2B}$. 即

$$C_{B+1}^{2H3.1} \leqslant (C_{B+1}^{1H3.1} + a) + b_B + b_{2B},$$
$$C_{B+2}^{2H3.1} \leqslant (C_{B+2}^{1H3.1} + a) + b_B + b_{2B}, \cdots,$$
$$C_{2B-1}^{2H3.1} \leqslant (C_{2B-1}^{1H3.1} + a) + b_B + b_{2B},$$
$$C_{2B}^{2H3.1} \leqslant (C_{2B}^{1H3.1}) + b_B + b_{2B}.$$

依次类推得

$$\sum C_j^{2H3.1} \leqslant \sum_{j=1}^{B} C_j^{1H3.1} + Bb_B + \sum_{j=B+1}^{2B} C_j^{1H3.1} + (B-1)a + B(b_B + b_{2B}) + \sum_{j=2B+1}^{3B} C_j^{1H3.1} + (B-1)a + B(b_B + b_{2B} + b_{3B}) + \cdots + \sum_{j=\left[\frac{n}{B}\right]B+1}^{n} C_j^{1H3.1} + \left(n - \left[\frac{n}{B}\right]B - 1\right)a + B(b_B + b_{2B} + \cdots + b_{\left[\frac{n}{B}\right]B} + b_n) = \sum_{j=1}^{n} C_j^{1H3.1} + \left(n - B - \left[\frac{n}{B}\right]\right)a + B\left\{\left[\frac{n}{B}\right]b_B + \left(\left[\frac{n}{B}\right] - 1\right)b_{2B} + \cdots + \left(\left[\frac{n}{B}\right] - \left[\frac{n}{B}\right] + 1\right)b_{\left[\frac{n}{B}\right]B} + b_n\right\} = A + W_2,$$

其中 $W_2 = (n - B - \left[\frac{n}{B}\right])a + B\{\left[\frac{n}{B}\right]b_B + (\left[\frac{n}{B}\right] - 1)b_{2B} + \cdots + (\left[\frac{n}{B}\right] - \left[\frac{n}{B}\right] + 1)b_{\left[\frac{n}{B}\right]B} + b_n\}$.

所以性能比 $R_{H3.1} = \frac{f^{H3.1}}{f^*} = \frac{\sum_{j=1}^{n} C_j^{2H3.1}}{\sum_{j=1}^{n} C_j^{2*}} \leqslant \frac{A + W_2}{A + W_1}$, 该性能比是紧的.

例3 $n = m = B, a = 0, b_1 = b_2 = \cdots = b_n = b$.

$A = C_1^{1H3.1} + C_2^{1H3.1} + \cdots + C_n^{1H3.1} = a + a + \cdots + a = 0$, $W_1 = \sum_{j=1}^{n} b_j = nb$, $W_2 = 0 + B\{b_B + 0\} = nb$. 由 $\frac{\sum_{j=1}^{n} C_j^{2H3.1}}{\sum_{j=1}^{n} C_j^{2*}} = \frac{nb}{nb} = 1$, $\frac{A + W_2}{A + W_1} = \frac{0 + nb}{0 + nb} = 1$, 有

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} C_j^{2H3.1}}{\sum_{j=1}^{n} C_j^{2*}} = \frac{A + W_2}{A + W_1}.$$

(2) $m < B$.

对第1批工件 $1,2,\cdots,B$, 在阶段1同批中最迟完工工件和最早完工工件的完工时间之差不大于 $\left[\frac{B}{m}\right]a$, 在阶段2各工件完工时间不迟于 $C_B^{1H3.1} + b_B$, 即

$$C_1^{2H3.1} \leqslant \left(C_1^{1H3.1} + \left[\frac{B}{m}\right]a\right) + b_B,$$
$$C_2^{2H3.1} \leqslant \left(C_2^{1H3.1} + \left[\frac{B}{m}\right]a\right) + b_B, \cdots,$$
$$C_{B-1}^{2H3.1} \leqslant (C_{B-1}^{1H3.1} + \left[\frac{B}{m}\right]a) + b_B, \quad C_B^{2H3.1} \leqslant (C_B^{1H3.1}) + b_B.$$

对第2批工件 $B+1, \cdots, 2B$(类似 $m \geqslant B$ 的分析), 有

$$C_{B+1}^{2H3.1} \leqslant (C_{B+1}^{1H3.1} + \left[\frac{B}{m}\right]a) + b_B + b_{2B}, \cdots,$$
$$C_{2B-1}^{2H3.1} \leqslant (C_{2B-1}^{1H3.1} + \left[\frac{B}{m}\right]a) + b_B + b_{2B},$$
$$C_{2B}^{2H3.1} \leqslant (C_{2B}^{1H3.1}) + b_B + b_{2B}.$$

依此类推得

$$\sum_{j=1}^{n} C_j^{2H3.1} \leqslant \sum_{j=1}^{B} C_j^{1H3.1} + (B-1)\left[\frac{B}{m}\right]a + Bb_B + \sum_{j=B+1}^{2B} C_j^{1H3.1} + (B-1)\left[\frac{B}{m}\right]a + B(b_B + b_{2B}) + \sum_{j=2B+1}^{3B} C_j^{1H3.1} + (B-1)\left[\frac{B}{m}\right]a + B(b_B + b_{2B} + b_{3B}) + \cdots + \sum_{j=\left[\frac{n}{B}\right]B+1}^{n} C_j^{1H3.1} + \left(n - \left[\frac{n}{B}\right]B - 1\right)\left[\frac{B}{m}\right]a + B(b_B + b_{2B} + \cdots + b_{\left[\frac{n}{B}\right]B} + b_n) = \sum_{j=1}^{n} C_j^{1H3.1} + \left(n - \left[\frac{n}{B}\right] - 1\right)\left[\frac{B}{m}\right]a + B\left\{\left[\frac{n}{B}\right]b_B + \left(\left[\frac{n}{B}\right] - 1\right)b_{2B} + \right.$$

$$\cdots + \left(\left[\frac{n}{B}\right] - \left[\frac{n}{B}\right] + 1\right) b_{[\frac{n}{B}]B} + b_n\Big\} = A + W_3,$$

其中 $W_1 = \sum_{j=1}^{n} b_j, W_3 = \left(n - \left[\frac{n}{B}\right] - 1\right)\left[\frac{B}{m}\right]a + B\left\{\left[\frac{n}{B}\right]b_B + \left(\left[\frac{n}{B}\right] - 1\right)b_{2B} + \cdots + \left(\left[\frac{n}{B}\right] - \left[\frac{n}{B}\right] + 1\right)b_{[\frac{n}{B}]B} + b_n\right\}$.

所以性能比 $R_{H3.1} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} C_j^{2H3.1}}{\sum_{j=1}^{n} C_j^{2*}} \leqslant \dfrac{A + W_3}{A + W_1}$，该性能比也是紧的.

例 4　$n = m + 1 = B, a = 0, b_1 = b_2 = \cdots = b_n = b$.

$A = C_1^{1H3.1} + C_2^{1H3.1} + \cdots + C_n^{1H3.1} = a + a + \cdots + a = 0, W_1 = \sum_{j=1}^{n} b_j = nb, W_3 = 0 + B\{b_B + 0\} = nb$.

由 $\dfrac{\sum_{j=1}^{n} C_j^{2H3.1}}{\sum_{j=1}^{n} C_j^{2*}} = \dfrac{nb}{nb} = 1, \dfrac{A + W_3}{A + W_1} = \dfrac{0 + nb}{0 + nb} = 1$，有 $\dfrac{\sum_{j=1}^{n} C_j^{2H3.1}}{\sum_{j=1}^{n} C_j^{2*}} = \dfrac{A + W_3}{A + W_1}$.

综合上述两种情况可得定理 4.

定理 4　对问题 $F2(m,B) \mid a_j \equiv a \mid \sum C_j$，算法 H3.1 的性能比 $R_{H3.1} \leqslant \begin{cases} \dfrac{A + W_2}{A + W_1}, & m \geqslant B, \\ \dfrac{A + W_3}{A + W_1}, & m < B. \end{cases}$

4　结 束 语

本工作对二类问题作了讨论,其中问题 $F2(m, B) \mid a_j \equiv a, b_j \equiv b \mid \sum C_j$ 获 $O(n^3)$ 解;对强 NP-hard 问题, $F2(m,B) \mid a_j \equiv a \mid \sum C_j$ 给出了近似算法并作了性能比分析. 对其他形式的问题,例如 $F2(m,B) \mid b_j \equiv b \mid \sum C_j$,我们已另文发表. 本工作可进一步研究 $F2(m,B) \mid a_j \equiv a \mid \sum C_j$ 是否有 PTAS 算法.

参考文献:

[1] HORN W A. Minimizing average flow time with parallel machines [J]. Operations Research, 1973, 21: 846-847.

[2] HOOGEVEEN J A, KAWAGUCHI T. Minimizing total completion time in a two-machine flowshop: analysis of special cases [J]. Mathematics of Operations Research, 1999, 24:887-910.

[3] CHANDRU V, LEE C Y, UZSOY R. Minimizing total completion time on processing machines [J]. International Journal of Production Research, 1993, 31: 2097-2121.

[4] HOCHBAUM D S, LANDY D. Scheduling semiconductor burn-in operations to minimize total flowtime [J]. Operation Research, 1997, 45:874-885.

[5] 丁际环,刘丽丽,姜宝山,等. $1 \mid B, r_j \in \{0, r\} \mid \sum C_j$ 问题的复杂性及近似算法[J]. 曲阜师范大学学报, 2000,26:19-21.

[6] LIU Z H, CHENG T C E. Approximation schemes for minimizing total (weighted) completion time with release dates on a batch machine [J]. Theoretical Computer Science, 2005, 347:288-298.

[7] AHMADI J H, AHMADI R H, DASU S, et al. Batching and scheduling jobs on batch and discrete processors [J]. Operations Research, 1992, 39:750-763.

[8] 任建锋,张玉忠. 问题 $P_m \mid B, r_j \mid \sum C_j$ 的 PTAS 算法[C]//中国运筹学会第七届学术交流会论文集. 2004: 1149-1155.

[9] GAREY M R, JOHNSON D S, SETHI R. The comlexity of flowshop and jobshop scheduling [J]. Mathematics of Operations Research, 1976(1):117-129.

[10] HOOGEVEEN H, STEEF V D V. Scheduling by positional completion times: analysis of a two-stage flow shop problem with a batching machine [J]. Mathematical Programming, 1998, 82:273-289.

[11] CHUNG K P, YU W C. On minimizing total completion time in batch machine scheduling [J]. Internation Journal of Foundations of Computer Science, 2004, 15 (4):593-607.

[12] CHANG S S, YOUNG H K, SANG H Y. A problem reduction and decomposition approach for scheduling for a flowshop of batch processing machines [J]. European Journal of Operational Research, 2000, 121:179-192.

[13] DANNEBERG D, TAUTENHAHN T, WERNER F. A comparison of heuristic algorithms for flow shop scheduling problems with setup times and limited batch size [J]. Mathematical and Computer Modeling, 1999, 29:101-126.

(编辑:孟庆勋)