文章编号:1003 - 207(2007)01 - 0027 - 07

金融市场条件高阶矩风险与动态组合投资

蒋翠侠[1,2] ,**许启发**[2] ,**张世英**[1]

(1. 天津大学管理学院 ,天津　300072 ;2. 山东工商学院数学与信息科学学院 ,山东 烟台　264005)

摘　要:针对传统组合投资理论没有考虑高阶矩风险和静态处理问题两大缺陷,提出多元 GARCHSK 模型用于衡量时变的高阶矩风险,基于效用函数的 Taylor 展开推导出带有高阶矩风险的动态组合投资策略,并利用遗传算法进行求解。实证研究表明,中国股市不仅存在高阶矩风险,而且风险具有时变特征;为防范高阶矩风险,投资者需要动态地修正他的资产配置权重。

关键词:高阶矩风险;动态组合投资;多元 GARCHSK 模型;遗传算法

中图分类号:F224. 0　　　**文献标识码**:A

1　引言

Markowitz(1952)利用均值 - 方差分析以及二次规划方法,解决了最优证券组合问题[1] ,他所提出的证券组合理论被视为现代金融理论的基石。该模型主要假设投资者的效用函数由收益的均值和方差两个变量确定,其中收益的方差反映了投资风险。

不可否认,Markowitz 的组合投资理论开创了对金融风险进行定量测度与防范的先河,是后续许多其它理论研究的基础。随着金融理论与实践不断深化和金融计量建模技术不断发展,该理论的不足之处也逐渐显现出来,突出表现在两个方面。第一,由于投资收益与风险的时变性,投资者需要不断评估其投资收益与风险,随时准备修改其拥有的资产组合的种类与权重。然而传统的组合投资理论没有引进时间因素,只是静态地考察投资收益与风险,难以有效地解决动态投资决策问题。第二,金融市场中不仅存在方差风险,而且存在偏度风险和峰度风险,如:负偏度的存在使得资产收益下降的可能性远大于上升的可能性;超额峰度的存在使得极值事件发生的可能性极大地增加,将其称为高阶矩风险(包括:三阶矩风险和四阶矩风险)。这些高阶矩风险的存在势必会影响到投资者的投资决策,然而传统的组合投资理论没有对此进行讨论。

国际上,一些学者曾对高阶矩组合投资问题进行过研究。Lai (1991) , Chunhachinda 等(1997) , Prakash 等(2003)和 Sunh 等(2003)使用多目标规划技术解决了最大化期望收益和偏度、最小化方差三个目标之间的优化问题,对带有偏度风险的资产组合进行选择[2~5] ;Jondeau 等(2004)利用期望效用函数 Taylor 展开讨论了非正态条件下资产配置问题,发现偏度风险与峰度风险的存在对金融投资决策存在显著影响[6] ; Gustavo 等(2004)和 Joro 等(2005)也讨论了带有偏度风险的组合投资问题,给出了最优组合投资权重的计算方法,并进一步在三维空间中给出其可行域、有效前沿和对应的几何性质[7-8] 。国内,张树斌等(2004)考虑了含有交易成本的均值 - 方差 - 偏度组合投资模型,并对模型的灵敏度进行了测试,发现偏度风险的存在会极大地改变资产组合的选择[9] 。

然而,所有这些讨论也都是静态的,没有考虑二阶矩乃至高阶矩风险的时变性。迄今,尚无文献讨论带有高阶矩风险的动态组合投资问题。高阶矩动态组合投资分析依赖于高阶矩波动性建模,Leon 等(2005)沿袭 GARCH 模型结构,提出了一元自回归条件异方差、偏度、峰度(GARCHSK)模型用于同时描述金融时间序列二阶矩、三阶矩和四阶矩风险的动态特征[10] 。

考虑到金融市场不仅存在高阶矩风险,而且这些风险是时变的,本文一方面,在 Leon 等(2005)给出的一元 GARCHSK 模型的基础上,提出了多元 GARCHSK 模型用于描述多个金融资产或市场的

收稿日期:2006 - 05 - 15;**修订日期**:2007 - 01 - 15
基金项目:国家自然科学基金资助项目(70471050)
作者简介:蒋翠侠(1973 -),女(汉族),安徽砀山人,天津大学管理学院博士生,山东工商学院数学与信息科学学院讲师,研究方向:数量经济方法、金融计量.

高阶矩风险之间动态关系,并基于独立成分分解给出多元条件高阶矩波动率的估计;另一方面,在 Jondeau 等(2004)研究的基础上,基于效用函数的 Taylor 展开给出条件高阶矩动态组合投资方法,并利用遗传算法进行了求解。从而,在两个层面上对传统的组合投资理论进行了改进,一是讨论了动态组合投资行为;二是考虑了高阶矩风险对金融投资决策的影响。

2 动态组合投资构建

2.1 投资决策问题

由于需要考虑高阶矩风险对投资决策的影响,我们从投资的效用函数出发进行有关讨论。假定投资者的期初财富为 1,他基于第 t 期末财富 W_t 的效用 $U(W_t)$ 最大化来进行资产配置。设 t 时刻他在 N 个资产上投资权重为 $w_t = (w_{1t}, w_{2t}, \cdots, w_{Nt})'$,$N$ 个资产的收益向量 $R_t = (R_{1t}, R_{2t}, \cdots, R_{Nt})'$。为获得条件高阶矩风险对组合投资的影响,对效用函数进行 Taylor 展开,得到

$$U(W_t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^{(k)}(\bar{W}_t)(W_t - \bar{W}_t)^k}{k!} \tag{1}$$

式中,$\bar{W}_t = E_{t-1}(W_t) = 1 + w_t'\mu_t$ 为第 t 期末的期望财富;$\mu_t = E_{t-1}(R_t)$ 为条件期望收益向量;$E_{t-1}(\cdot)$ 为条件期望算子。由式(1)可以得到 t 时刻的条件期望效用为

$$E_{t-1}[U(W_t)] = E_{t-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^{(k)}(\bar{W}_t)(W_t - \bar{W}_t)^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^{(k)}(\bar{W}_t)}{k!} E_{t-1}[(W_t - \bar{W}_t)^k] \tag{2}$$

因此,条件期望效用取决于期末财富分布的所有条件中心矩。需要指出的是,通过 Taylor 展开得到的对条件期望效用的近似与投资者对财富分布矩的偏好有关系,而这些矩可以由效用函数的偏导数得到。

现在对式(2)进行四阶截断,得到

$$E_{t-1}[U(W_t)] = U(\bar{W}_t) + U^{(1)}(\bar{W}_t)E_{t-1}[(W_t - \bar{W}_t)] + \frac{1}{2}U^{(2)}(\bar{W}_t)E_{t-1}[(W_t - \bar{W}_t)^2] + \frac{1}{3!}U^{(3)}(\bar{W}_t)E_{t-1}[(W_t - \bar{W}_t)^3] + \frac{1}{4!}U^{(4)}(\bar{W}_t)E_{t-1}[(W_t - \bar{W}_t)^4] + O(W_t^4) \tag{3}$$

因为,财富的条件中心矩和资产组合收益的条件中心矩之间存在如下关系

$$\begin{cases} \mu_{p,t} = E_{t-1}[R_{p,t}] = w_t'\mu_t \\ \sigma^2_{p,t} = E_{t-1}[(R_{p,t} - \mu_{p,t})^2] = E_{t-1}[(W_t - \bar{W}_t)^2] \\ s^3_{p,t} = E_{t-1}[(R_{p,t} - \mu_{p,t})^3] = E_{t-1}[(W_t - \bar{W}_t)^3] \\ k^4_{p,t} = E_{t-1}[(R_{p,t}] - \mu_{p,t})^4] = E_{t-1}[(W_t - \bar{W}_t)^4] \end{cases} \tag{4}$$

式中,偏度与峰度采用金融上的定义,将其定义为高阶中心矩,而不是统计上的标准化高阶中心矩。因此,条件期望效用函数式(3)可以转化为由资产组合收益的条件高阶矩风险来近似,即

$$E_{t-1}[U(W_t)] \approx U(\bar{W}_t) + \frac{1}{2}U^{(2)}(\bar{W}_t)\sigma^2_{p,t} + \frac{1}{3!}U^{(3)}(\bar{W}_t)s^3_{p,t} + \frac{1}{4!}U^{(4)}(\bar{W}_t)k^4_{p,t} \tag{5}$$

根据 Scott 和 Horvath(1980)的研究结果,条件期望效用与条件期望收益和条件偏度存在正相关,而与条件方差和条件峰度存在负相关,即投资者喜欢正的收益和偏度而讨厌大的方差和峰度[11]。

2.2 动态资产配置

根据前面的讨论,可以利用资产组合收益的条件期望、条件方差、条件偏度和条件峰度对任意一个效用函数进行近似。在前面讨论的 N 个风险资产上引入一个无风险资产,其收益为 $R_{0,t}$,则可以得到下面的优化问题:

$$\max_{w_{pi,t}, w_{p0,t}} U(\mu_{p,t}, \sigma^2_{p,t}, s^3_{p,t}, k^4_{p,t}) \quad \text{s.t.} \quad w_t'1 + w_{p0,t} = 1 \tag{6}$$

式中,$w_{p0,t}$ 为投资于无风险资产上的权重,$w_t = (w_{p1,t}, \cdots, w_{pN,t})'$ 为投资于 N 个风险资产上的权重组成的资产组合权重向量;$1 = (1, 1, \cdots, 1)'$ 为 $N \times 1$ 列向量;效用函数中四个主要参数,即资产组合的条件期望、条件方差、条件偏度和条件峰度分别为条件期望:$\mu_{p,t} = w_{p0,t}R_{0,t} + w_{p,t}'\mu_t$

条件方差:$\sigma^2_{p,t} = w_t'E_{t-1}[(R_t - \mu_t)(R_t - \mu_t)']w_t = w_t'H_t w_t = w_t'\sum_{p,t}$

条件偏度:$s^3_{p,t} = w_t'E_{t-1}[(R_t - \mu_t)(R_t - \mu_t)' \otimes (R_t - \mu_t)'](w_t \otimes w_t) = w_t'S_t(w_t \otimes w_t) = w'\Omega_{p,t}$

条件峰度:$k^4_{p,t} = w_t'E_{t-1}[(R_t - \mu_t)(R_t - \mu_t)' \otimes (R_t - \mu_t)' \otimes (R_t - \mu_t)'](w_t \otimes w_t \otimes w_t) = w_t'K_t(w_t \otimes w_t \otimes w_t) = w_t'\Psi_{p,t}$

这里,$\sum_{p,t} = H_t w_t$ 为协方差向量,体现了时变二阶矩系统风险,$\Omega_{p,t} = S_t(w_t \otimes w_t)$ 为协偏度向量,体现了时变三阶矩系统风险,$\Psi_{p,t} = K_t(w_t \otimes w_t \otimes w_t)$ 为协峰度向量,体现了时变四阶矩系统风险;$\otimes$

表示矩阵的 Kronecker 积。

利用拉格朗日求极值方法,可以得到

$$L(w_t,\rho) = U(\mu_{p,t},\sigma^2_{p,t},s^3_{p,t},k^4_{p,t}) - \lambda_t(w'_t l - 1) \quad (7)$$

根据一阶条件,可以得到最优解满足条件

$$\mu_t - R_{0,t} = a_{1,t}H_t w_t + a_{2,t}S_t(w_t \otimes w_t) + a_{3,t}K_t(w_t \otimes w_t \otimes w_t) \quad (8)$$

式中:$R_{0,t} = (R_{0,t},\cdots,R_{0,t})'$ 为由无风险资产收益组成的 $N\times1$ 维向量;$a_{1,t} = -\frac{2U_{2,t}}{U_{1,t}}$, $a_{2,t} = -\frac{3U_{3,t}}{U_{1,t}}$, $a_{3,t} = -\frac{4U_{4,t}}{U_{1,t}}$;$U_{i,t}(i = 1,2,3,4)$ 分别为效用函数关于其中第 i 个参数 $(\mu_{p,t},\sigma^2_{p,t},s^3_{p,t},k^4_{p,t})$ 的偏导数。

为了获得投资者在 N 个风险资产和一个无风险资产上的时变资产组合权重,需要对效用函数进行具体设定。文中,考虑一个常绝对风险厌恶 (CARA) 效用函数 $U(W_t) = -\exp(-\rho W_t)$,$\rho$为投资者常绝对风险厌恶的测度参数,实证时取 $\rho = 1$。由式(5),可得

$$E_{t-1}[U(W_t)] \approx -\exp(-\rho\bar{W}_t)\left[1 + \frac{\rho^2}{2}\sigma^2_{p,t} - \frac{\rho^3}{3!}s^3_{p,t} + \frac{\rho^4}{4!}k^4_{p,t}\right]$$

$$= -\exp(-\rho\mu_{p,t})\left[1 + \frac{\rho^2}{2}\sigma^2_{p,t} - \frac{\rho^3}{3!}s^3_{p,t} + \frac{\rho^4}{4!}k^4_{p,t}\right] \quad (9)$$

同时可以获得 $E_{t-1}[U(W_t)]$ 分别对 $U_{1,t}, U_{2,t}, U_{3,t}, U_{4,t}$ 的偏导数为:

$$U_{1,t} = \frac{\partial E_{t-1}[U(W_t)]}{\partial\mu_{p,t}}$$

$$= \rho\exp(-\rho\mu_{p,t})\left[1 + \frac{\rho^2}{2}\sigma^2_{p,t} - \frac{\rho^3}{3!}s^3_{p,t} + \frac{\rho^4}{4!}k^4_{p,t}\right]$$

$$U_{2,t} = \frac{\partial E_{t-1}[U(W_t)]}{\partial\sigma^2_{p,t}} = -\frac{\rho^2}{2}\exp(-\rho\mu_{p,t})$$

$$U_{3,t} = \frac{\partial E_{t-1}[U(W_t)]}{\partial s^3_{p,t}} = \frac{\rho^3}{3!}\exp(-\rho\mu_{p,t})$$

$$U_{4,t} = \frac{\partial E_{t-1}[U(W_t)]}{\partial k^4_{p,t}} = -\frac{\rho^4}{4!}\exp(-\rho\mu_{p,t}) \quad (10)$$

将式(10)代入式(8)得

$$(\mu_t - R_{0,t}) - \psi_1(w_t)H_t w_t + \psi_2(w_t)S_t(w_t \otimes w_t) - \psi_3(w_t)K_t(w_t \otimes w_t \otimes w_t) = 0 \quad (11)$$

式中,$\psi_i(w_t) = \frac{\rho^i}{i!}\left[1 + \frac{\rho^2}{2!}\sigma^2_{p,t} - \frac{\rho^3}{3!}s^3_{p,t} + \frac{\rho^4}{4!}k^4_{p,t}\right]^{-1}$, $i = 1,2,3$,它们都是权重向量 w_t 的非线性函数。

式(11)实质是以权重向量 w_t 为自变量,由 N 个方程组成的非线性方程组。在时刻 t 固定时,通过数值解法,可以得到权重向量的具体取值。随着时刻的变化,就得到时变的权重向量 w_t,从而实现动态组合投资。由于式(11)存在高度的非线性,这里基于遗传算法给出组合投资权重向量 w_t 的求解策略。

2.3　基于遗传算法的动态组合投资

遗传算法中包括编码、群体规模设定、适应值函数定义、选择、交叉、变异和停止等重要环节。对于非线性方程组(11)进行求解,下面给出其遗传算法设计。

1) 编码

由于权重参数具有一定的取值范围,因此,本文采用了实值编码方式。

2) 初始种群生成

考虑到遗传算法的性能与计算效率,本文选择群体规模为 10,生成取值在区间上的 10 组种群,每组种群有 4 个染色体。

3) 适应值函数

遗传算法在进化搜索中基本上不用外部信息,仅以目标函数(也就是适应值函数)为依据。本文定义适应值函数为:$Eval_t = \sum_{i=1}^{4} e^2_{i,t}\ (t = 1,2,\cdots,T)$,其中 e_i 为向量

$$(\mu_t - R_{0,t}) - \psi_1(w_t)H_t w_t + \psi_2(w_t)S_t(w_t \otimes w_t) - \psi_3(w_t)K_t(w_t \otimes w_t \otimes w_t) \quad (12)$$

的第 i 个分量。

4) 选择操作

选择的目的是把较优的个体直接遗传到下一代,或通过配对交叉再遗传给下一代。选择操作建立在对群体中个体适应值评估基础之上,本文采用适应值比例法。

5) 交叉操作

交叉是指把两个父代个体的部分结构加以替换重组而生成新个体的操作。交叉是遗传算法中的核心算子。交叉率越高,群体中基因串的更新就越快,交叉率过高,高性能串被破坏的可能性更大。如果交叉率过低,搜索的速度会很慢。根据经验值,本文采用的交叉率为 0.8,实施了单点交叉策略。

6) 变异操作

变异算子对群体中个体串的某些基因值进行变动。遗传算法导入变异算子的目的有两个:一是使遗传算法具有局部随机搜索能力,即在接近最优解的邻域,利用变异算子来加速向最优解的收敛;二是使遗传算法维持群体的多样性,防止出现早熟现象。

一个高水平的变异率,会产生接近纯随机的搜索结果,而低水平的变异率会使收敛速度过慢。这

里采用单点变异,变异率为 0.001 - 0.01。

7) 停止准则

本文以最大试验代数作为停止准则。

3 条件高阶矩风险衡量

至此,式(11)中用于描述二阶矩风险的条件方差 - 协方差矩阵 H_t、描述三阶矩风险的条件偏度 - 协偏度矩阵 S_t 和描述四阶矩风险的条件峰度 - 协峰度矩阵 K_t 尚属未知,本文提出多元 GARCHSK 模型实现对各阶矩风险的估计。

3.1 多元 GARCHSK 模型

Leon 等(2005)提出了一元 GARCHSK(1,1;1,1;1,1)模型[10],该模型可用于讨论单个金融资产的条件高阶矩风险。若要在多个金融资产之间分散方差风险、偏度风险和峰度风险,需要计算条件方差 - 协方差、条件偏度 - 协偏度和条件峰度 - 协峰度。为此,我们将一元的 GARCHSK 模型扩展到多元的情形,给出多元 GARCHSK 模型的向量表达如下

$$\begin{cases} Y_t = M_t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \mid I_{t-1} \sim D(0, H_t, S_t, K_t) \\ \eta_t = H_t^{-1/2}\epsilon_t, \eta_t \mid I_{t-1} \sim D(0, I, S_t^*, K_t^*) \\ \mathrm{vech}(H_t) = B_0 + \sum_{i=1}^{q_1} B_{1,i}\mathrm{vech}(\eta_{t-i}\eta'_{t-i}) + \sum_{j=1}^{p_1} B_{2,j}\mathrm{vech}(H_{t-j}) \\ \mathrm{vech}(S_t) = \Gamma_0 + \sum_{i=1}^{q_2}\Gamma_{1,i}\mathrm{vech}((\eta_{t-i}\eta'_{t-i})\otimes\eta'_{t-i}) + \sum_{j=1}^{p_2}\Gamma_{2,j}\mathrm{vech}(S_{t-j}) \\ \mathrm{vech}(K_t) = \delta_0 + \sum_{i=1}^{q_3}\delta_{1,i}\mathrm{vech}((\eta_{t-i}\eta'_{t-i})\otimes\eta'_{t-i}\otimes\eta'_{t-i}) + \sum_{j=1}^{p_3}\delta_{2,j}\mathrm{vech}(K_{t-j}) \end{cases} \tag{13}$$

式中:η_t 为随机误差向量 ϵ_t 经 $H_t^{-1/2}\epsilon_t$ 标准化后得到的误差向量;i 为单位矩阵,$S*t$, $K*t$ 分别为 η_t 的条件偏度 - 协偏度矩阵和条件峰度 - 协峰度矩阵;B_0 为 $\tilde{N}^{(H)}\times 1$ 维列向量,Γ_0 为 $\tilde{N}^{(H)}\times 1$ 维列向量,δ_0 为 $\tilde{N}^{(K)}\times 1$ 维列向量;$B_{1,i}$, $B_{2,j}$ 均为 $\tilde{N}^{(H)}$ 维方矩阵,$\Gamma_{1,i}$, $\Gamma_{2,j}$ 均为 $\tilde{N}^{(S)}$ 维方矩阵,$\delta_{1,i}$, $\delta_{2,j}$ 均为 $\tilde{N}^{(K)}$ 维方矩阵;$\tilde{N}^{(H)} = N(N+1)/2$, $\tilde{N}^{(S)} = N(N+1)(N+2)/6$, $\tilde{N}^{(K)} = N(N+1)(N+2)(N+3)/24$;vech(·)为向量半算子,将矩阵按照下三角堆成一个列向量。

模型(13)比多元 GARCH 模型存在更为严重的"维数灾难"问题。下面基于独立成分分解技术讨论多元 GARCHSK 模型中条件高阶矩波动率估计问题。

3.2 多元条件高阶矩波动率估计

如果把金融时间序列看作金融系统所释放出来的信号,则可以将其视为由若干个相互独立的源信号按照某种方式混合而成。在数据挖掘、机器学习等领域中经常使用的独立成分分析(ICA)方法能够通过对观测到的序列进行分解,从而得到潜在的源信号。这里,借助 ICA 方法来解决向量 GARCHSK 模型的波动率估计问题。

若 $IC_t = (IC_{1t}, IC_{2t}, \cdots, IC_{Nt})'$ 是收益向量 Y_t 的 N 个独立成分,则 IC_{it} 和 $IC_{jt}(i \neq j)$ 是统计独立的,而且存在可逆矩阵 U(称作转换矩阵),使得

$$IC_t = UY_t \tag{14}$$

对式(14)两边同时求条件方差、条件偏度和条件峰度可得:

$$\begin{cases} \mathrm{var}(IC_t \mid I_{t-1}) = \mathrm{var}(UY_t \mid I_{t-1}) = U\mathrm{var}(Y_t \mid I_{t-1})U' = UH_tU' \\ \mathrm{skew}(IC_t \mid I_{t-1}) = \mathrm{skew}(UY_t \mid I_{t-1}) = U\mathrm{skew}(Y_t \mid I_{t-1})(U'\otimes U') = US_t(U'\otimes U') \\ \mathrm{kurt}(IC_t \mid I_{t-1}) = \mathrm{kurt}(UY_t \mid I_{t-1}) = U\mathrm{kurt}(Y_t \mid I_{t-1})(U'\otimes U'\otimes U') = UH_t(U'\otimes U'\otimes U') \end{cases} \tag{15}$$

式(15)实际上建立起原始时间序列的条件方差 - 协方差、条件偏度 - 协偏度、条件峰度 - 协峰度矩阵与其独立成分的条件方差 - 协方差、条件偏度 - 协偏度、条件峰度 - 协峰度矩阵之间的对应关系。而独立成分的条件方差 - 协方差、条件偏度 - 协偏度和条件峰度 - 协峰度矩阵是对角矩阵,对角线上的元素分别为对应成分的条件方差、条件偏度和条件峰度。

因此,一旦得到 Y_t 的独立成分分解 $IC_t = UY_t$,采用如式(16)所示的一元 GARCHSK 模型分别估计各个独立成分的条件方差、条件偏度和条件峰度。

$$\begin{cases} \xi_{lt}^{(H)} = w^{(H)} + \sum_{i=1}^{q_1} \alpha_i^{(H)} (\tilde{\eta}_{l,t-i}^{(H)})^2 + \sum_{j=1}^{p_1} \beta_j^{(H)} \xi_{l,t-j}^{(H)} \\ \xi_{lt}^{(S)} = w^{(S)} + \sum_{i=1}^{q_2} \alpha_i^{(S)} (\tilde{\eta}_{l,t-i}^{(S)})^3 + \sum_{j=1}^{p_2} \beta_j^{(S)} \xi_{l,t-j}^{(S)}; \\ (l = 1,2,\cdots,N) \\ \xi_{lt}^{(K)} = w^{(K)} + \sum_{i=1}^{q_3} \alpha_i^{(K)} (\tilde{\eta}_{l,t-i}^{(K)})^4 + \sum_{j=1}^{p_3} \beta_j^{(K)} \xi_{l,t-j}^{(K)} \end{cases} \tag{16}$$

式中,$\xi_{lt}^{(H)}$,$\xi_{lt}^{(S)}$,$\xi_{lt}^{(K)}$ 分别为第 l 个独立成分的 $IC_{lt}(l = 1,2,\cdots,N)$ 的条件方差、条件偏度和条件峰度。在获得独立成分的条件高阶矩波动率后,在式(15)各方程的左右两边分别左乘和右乘对应矩阵的逆,从而得到 Y_t 的条件方差 - 协方差矩阵、条件偏度 - 协偏度矩阵和条件峰度 - 协峰度矩阵分别为

$$\begin{cases} H_t = U^{-1} \Xi_t^{(H)} U^{t-1} \\ S_t = U^{-1} \Xi_t^{(S)} (U' \otimes U')^{t-1} \\ K_t = U^{-1} \Xi_t^{(K)} (U' \otimes U' \otimes U')^{t-1} \end{cases} \tag{17}$$

式中:$l = 1,2,\cdots,N$ 分别代表第 l 个独立成分;$\Xi_t^{(H)} = \mathrm{diag}(\xi_{1t}^{(H)},\xi_{2t}^{(H)},\cdots,\xi_{Nt}^{(H)})$、$\Xi_t^{(S)} = \mathrm{diag}(\xi_{1t}^{(S)},\xi_{2t}^{(S)},\cdots,\xi_{Nt}^{(S)})$ 和 $\Xi_t^{(K)} = \mathrm{diag}(\xi_{1t}^{(K)},\xi_{2t}^{(K)},\cdots,\xi_{Nt}^{(K)})$ 分别为独立成分条件方差 - 协方差矩阵、条件偏度 - 协偏度矩阵和条件峰度 - 协峰度矩阵,其非主对角线上元素为 0。从而由式(17)可以实现对多元条件高阶矩波动率:条件方差 - 协方差、条件偏度 - 协偏度和条件峰度 - 协峰度的估计。

4　数据的选取及实证

4.1　数据的选取及基本统计性质

选择四个证券指数作为研究对象,分别用符号:DJIA、HKHS、JN 和 CISSM 代表道琼斯工业指数、香港恒生指数、日经指数和上证综合指数的日度收盘价,样本区间为:2003/02/06 至 2005/06/30,剔除节假日和非同步交易日,样本容量为:$N = 958$。数据来自雅虎金融网站:http://finance.yahoo.com/ 和 http://cn.finance.yahoo.com/,证券指数收益由 $y_t = (\ln P_t - \ln P_{t-1}) \times 100$ 得到,其中 P_t 为 t 时刻指数收盘价。

表 1 给出证券指数收益的描述统计。由表 1 可知,在样本观察期间内,除了 CISSM 以外,其它三个指数的平均收益均为正;而所有的指数收益偏度统计值为负,意味着收益存在着巨大下跌的可能;峰度统计值表明各指数收益分布具有比正态分布更肥的尾部[12]。服从 χ^2 分布的 Jarque - Bera 统计检验结果,拒绝了收益序列服从正态分布的假定。因此,为了描述偏度和峰度的动态特征,必须建立多元条件高阶矩波动模型。

表 1　四个股指收益序列的基本统计性质

	DJIA	HKHS	JN	CISSM
平均值	0.031717	0.068331	0.097413	- 0.022085
标准差	0.008679	0.010648	0.012782	0.013878
偏 度	- 0.30321	- 0.056713	- 0.4427	- 1.1589
峰 度	4.5105	6.2867	6.4160	9.5602
J - B 检验	68.477 *	280.92 *	323.67 *	1216.60 *

注:* 表示 1 %显著性水平下显著。

4.2　多元条件高阶矩风险

首先,利用(1997)给出的不动点算法[13,14],对四个指数收益进行独立成分分解,求得转换矩阵的估计为:

$$\hat{U}_1 = \begin{pmatrix} 28.767 & -3.763 & 72.579 & 11.393 \\ 12.533 & 118.916 & -18.670 & -13.639 \\ -166.558 & 119.091 & 17.464 & 218.318 \\ -43.256 & -114.647 & 32.729 & -58.832 \end{pmatrix} \tag{18}$$

由式(18),可以得到四个独立成分($IC1$、$IC2$、$IC3$ 和 $IC4$)的估计 $\hat{IC}_t(\hat{IC}_t = \hat{U} Y_t)$。

其次,对四个独立成分分别建立一元 GARCHSK 模型,可以建立四个独立成分的一元 GARCHSK(1,1;1,1;1,1)模型

$$\begin{cases} y_t = \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \mid I_{t-1} \sim D(0,h_t,s_t,k_t) \\ \eta_t = h_t^{-1/2} \varepsilon_t;\eta_t \mid I_{t-1} \sim D(0,1,s_t^*,k_t^*) \\ h_t = \beta_0 + \beta_1 \eta_{t-1}^2 + \beta_2 h_{t-1} \\ s_t = \gamma_0 + \gamma_1 \eta_{t-1}^3 + \gamma_2 s_{t-1} \\ k_t = \delta_0 + \delta_1 \eta_{t-1}^4 + \delta_2 k_{t-1} \end{cases} \tag{19}$$

表 2 给出了模型(19)的参数估计结果。

表 2　GARCHSK(1,1;1,1;1,1)模型估计结果

	参数	IC1	IC2	IC3	IC4
方差方程	β_0	0.0368	0.0032	0.0921	0.0662
	β_1	0.0630	0.0220	0.0001	0.0660
	β_2	0.8979	0.9746	0.8918	0.8699
偏度方程	γ_0	0.0006	0.0116	0.0105	0.0155
	γ_1	0.2374	0.0624	0.1740	0.0797
	γ_2	0.6165	0.7459	0.7084	0.6070
峰度方程	δ_0	0.0188	0.0053	0.0122	0.0115
	δ_1	0.0882	0.0096	0.0154	0.0832
	δ_2	0.5388	0.6156	0.5210	0.6617
对数似然函数值		- 872.42	- 873.69	- 895.75	- 888.03

一旦模型(19)的参数被估计出来,就可以得到独立成分的条件高阶矩波动率的估计:$\hat{\Xi}_t^{(H)}$、$\hat{\Xi}_t^{(S)}$ 和 $\hat{\Xi}_t^{(K)}$。利用式(17),容易得到原始收益序列的条件方

差 - 协方差、条件偏度 - 协偏度和条件峰度 - 协峰度矩阵的估计结果。

4. 3 动态组合投资求解

在基于遗传算法的最优资产组合权重求解过程中,解的变化与种群平均值变化迅速收敛,于 100 代之后似然函数值基本稳定,没有明显的改进。这时,输出的结果为最优结果,由式(11) 确定的最优组合投资权重是个动态的结果,随着时间的变化而变化。动态组合投资权重表明,投资者每天在各只股票上的投资情况是不一样的,理论上需要频繁地进行交易以维持期望效用最大化。然而,现实中的交易存在着交易成本,需要在建模时讨论交易成本对动态组合投资的影响,改进后的模型将更加具有适应性。

4. 4 与静态组合投资的比较

为考虑动态组合投资的效果,将其与静态组合投资进行比较。不防设市场上还存在一个投资者,他采用购买 - 持有(*buy and hold*) 投资策略,并且用于各个证券指数的投资权重均相等,即。首先,分别利用动态的权重和静态的权重计算出资产组合的收益、方差、偏度和峰度在每天的取值,表 3 给出其平均值和标准差;其次,利用式(9) ,在的条件下,可以计算出动态组合投资与静态组合投资的条件期望效用函数在每天的取值,进而可以得到其平均值和标准差,计算结果见表 3。

表 3 动态组合投资与静态组合投资效果对比

组合投资方式	效 用		收 益		方 差		偏 度		峰 度	
	平均值	标准差	平均值	标准差	平均值	标准差	平均值	标准差	平均值	标准差
动 态	- 0. 9171	2. 3310	0. 0504	5. 9009	0. 00017	1. 6754	- 0. 3962	3. 3466	5. 2275	4. 0982
静 态	- 1. 2008	5. 3614	0. 0438	6. 0126	0. 00020	1. 7596	- 0. 4748	4. 2527	6. 1483	5. 7729

由表 3 的结果可知,动态组合投资与静态组合投资获得的平均效用分别为: - 0. 9171 和 - 1. 2008 ,而其标准差分别为:2. 3310 和 5. 3614 ,这意味着动态组合投资不仅能在总体上提高投资者的效用水平,而且能够使得投资者获得一个稳定的效用水平。不仅如此,在资产组合的收益、方差、偏度和峰度四个单项指标的统计中,动态组合投资的效果均优于静态组合投资,表现在:其一,动态组合投资的各个单项指标的标准差均比静态组合投资的要小,显示出较强的稳定性;其二,动态组合投资的收益、偏度的平均值比静态组合投资的收益、偏度的平均值要高,而前者的方差、峰度的平均值比后者的要低,这正是投资者所期望的,与前文分析结论一致。

5 结论

以往的国内外文献中,二阶矩风险(方差风险)受到了普遍的关注。随着理论与实践的深入,高阶矩风险(偏度风险和峰度风险)已逐渐引起人们的重视。本文讨论了带有高阶矩风险的动态组合投资问题,一方面提出多元 GARCHSK 模型,用于衡量金融市场的高阶矩风险;另一方面,基于效用函数的 Taylor 展开给出条件高阶矩动态组合投资方法,从两个方面对传统的组合投资理论进行了改进。实证研究表明,中国股市不仅存在高阶矩风险,而且风险具有时变特征;为防范高阶矩风险,投资者需要动态地修正资产配置权重;动态组合投资不仅在总体上(从平均效用来看) 优于静态组合投资,而且在各个单项上(分别从收益、方差、偏度、峰度来看) 均优于后者。

参考文献:

[1] Markowitz H.. Portfolio selection[J]. Journal of Finance, 1952, 7:77 - 91.

[2] Lai T. Y.. Portfolio selection with skewness: a multiple - objective approach[J]. Review of Quantitative Finance and Accounting, 1991, 1:293 - 305.

[3] Chunhachinda P., Dandapani K., Hamid S., et al.. Portfolio selection and skewness: evidence from international stock markets[J]. Journal of Banking and Finance, 1997, 21(2):143 - 167.

[4] Prakash A., Chang C., Pactwa T.. Selecting a portfolio with skewness: recent evidence from US, European, and Latin American equity markets[J]. Journal of Banking and Finance, 2003, 27(7):1375 - 1390.

[5] Sunh Q., Yan Y.. Skewness persistence with optimal portfolio selection[J]. Journal of Banking and Finance, 2003, 27:1111 - 1121.

[6] Jondeau E., Rockinger M.. Optimal portfolio allocation under higher moments[Z]. Banque De France, working paper, 2004.

[7] Gustavo M. de A., Renato G. F. J.. Finding a maximum skewness portfolio - a general solution to three - moments portfolio choice[J]. Journal of Economic Dynamics & Control, 2004, 28:1335 - 1352.

[8] Joro T. , Na P. . Portfolio performance evaluation in a mean - variance - skewness framework[J]. European Journal of Operational Research, 2005, (5):1 - 16.
[9] 张树斌,白随平,姚立. 含有交易成本的均值 - 方差 - 偏度资产组合优化模型[J]. 数学的实践与认识, 2004, 34(2):22 - 26.
[10] Leon A. , Rubio G. , Serna G. . Autoregresive conditional volatility, skewness and kurtosis[J]. The Quarterly Review of Economics and Finance, 2005, 45: 599 - 618.
[11] Scott R. C. , Horvath P. A. . On the direction of preference for moments of higher order that the variance[J]. Journal of Finance, 1980, 35: 915 - 919.
[12] 樊智,张世英. 金融波动性及实证研究[J]. 中国管理科学, 2002, 10(6):27 - 30.
[13] A. . Karhunen J. . Oja E. . Independent component analysis[M]. Wiley, New York, 2001.
[14] A. . Oja E. . A fast fixed - point algorithm for independent component analysis[J]. Neural Computation, 1997, 9:1483 - 1492.

Conditional Higher Moments Risk and Dynamic Portfolio in Financial Markets

JIANG Cui - xia[1,2] , XU Qi - fa[2] , ZHANG Shi - ying[1]

(1. School of Management, Tianjin Unversity, Tianjin 300072, China;
2. School of Mathematics, Shandong Institute of Business and Technology, Yantai 264005, China)

Abstract: Two defects in traditional portfolio theory, without considering higher moments risk and settling problem staticly, are pointed out in the paper. To measure higher moments risk, the multivariate GARCHSK model is established. Then, based on Taylor series expansion of utility function, the dynamic portfolio model with higher moments risk is derived, and the model is solved by Genetic Algorithm. Empirical results show that not only higher moments risk exists in Chinese stock markets, but also the risk has time varying character. It is necessary for the investors to change their portfolio weights to avoide higher moments risk.

Key words: higher moments risk; dynamic portfolio; multivariate GARCHSK model; Genetic Algorithm