文章编号:1003 - 207(2007) 01 - 0001 - 05

具有 VaR 约束的跟踪误差投资组合鲁棒优化模型

高　莹 ,黄小原

(东北大学工商管理学院 ,辽宁　沈阳　110004)

摘　要:本文在跟踪误差投资组合优化模型基础上 ,考虑投资组合的风险价值 VaR 和收益的不确定性 ,建立了具有 VaR 约束的跟踪误差投资合鲁棒优化模型。以国内证券市场为背景 ,运用线性矩阵不等式(LMI) 方法进行了实证计算 ,并与基准组合、跟踪误差投资组合模型和无 VaR 约束的跟踪误差投资组合鲁棒模型的投资结果进行了比较。实证结果表明 ,在给定证券集的条件下 ,具有 VaR 约束的跟踪误差投资组合鲁棒优化模型优于其它模型。

关键词:投资组合; 鲁棒优化; 跟踪误差; VaR; 线性矩阵不等式

中图分类号:F830　　**文献标识码**:A

1　引言

Markowitz 的均值 - 方差理论是投资组合的最经典和常用的原则 ,该理论奠定了现代金融学的基础 ,这之后的研究工作大都是遵循均值 - 方差分析框架建立更适合现实情况的投资组合模型。Roll (1991) [1] 将这一理论扩展到跟踪误差的投资组合优化中。随着现代金融市场的发展 , 越来越多的投资资金的所有权和投资管理权分离 , 投资者为保证资金的安全 , 同时又要得到比较好的投资回报 , 需要定期对投资管理者业绩进行评估。国外金融界目前普遍使用的方法之一是投资者为投资管理者预先选定一个基准投资组合 , 然后通过跟踪误差的变化情况对投资管理者的业绩进行评价。所谓跟踪误差(tracking error) 是指投资组合的实际收益与预先确定的基准收益之差。此时 , 对投资管理者而言 , 要根据投资者选择的基准 , 在满足投资者要求的前提下使自己的投资组合获得尽可能高的超额收益。为了帮助投资管理者进行科学的投资决策 , Roll (1992) 、Sharpe (1992) 、Chan (1999) 、Wagner (2001) 、马永开和唐小我 (2001 ,2004) 、Muralidhar (2001) 等学者在均值 - 方差模型框架下 ,从不同角度研究了具有跟踪误差的投资组合决策问题[2] 。但是由于金融市场波动和金融风险的加剧 ,均值 - 方差模型框架要求随机变量均匀分布和对输入数据误差敏感及忽略高阶矩分布的缺陷局限了它的应用[3 ,4] 。为弥补均值 - 方差模型框架的不足 ,诸多学者运用鲁棒优化理论和方法进行了研究。

鲁棒优化在自然科学、经济管理等各个领域正在得到广泛应用 ,成为一种处理不确定性问题的重要方法 ,引起人们极大关注。传统的优化方法在内部参数变化或受到外部扰动时显得无能为力 ,而鲁棒优化方法可以很好地解决这种不确定性环境下的优化问题 ,也不会对任何不确定性过度敏感[5 ,6] 。Lobo (1998) [7] 第一个在均值 - 方差模型框架下 ,考虑方差不确定情况下的投资组合优化问题 ,提出了鲁棒投资组合优化方法。Casta (2002) [8] 在假设仅已知期望收益和协方差矩阵边界的情况下 ,研究了鲁棒跟踪误差投资组合优化问题 ,结果表明 ,线性矩阵不等式鲁棒模型不但降低了待估参数的精确度要求 ,而且可以减少投资组合管理中的转换成本。Pinar 和 Tutuncu (2005) [9] 提出了选择鲁棒收益机会的优化模型。这些学者虽然研究了投资组合的鲁棒优化问题 ,但都是用方差度量风险 ,没有考虑投资组合高阶矩风险。Alexander 和 Baptista (2002) [10] 分析了将 VaR 作为风险管理目标的投资组合选择模型。姚京和李仲飞(2004) [11] 建立了用 VaR 代替方差作为风险测量指标的均值 - VaR 模型。Laurent 等(2003) [12] 在假设仅已知均值和协方差矩阵边界的条件下 ,提出计算最坏条件下 VaR 的方法。他们的模型虽然考虑了 VaR 约束 ,但都没有考虑未来经济环境的不确定性问题 ,应用起来有一定的局限性。

收稿日期:2006 - 03 - 31 ;**修订日期**:2007 - 01 - 10
基金项目:国家自然科学基金(70572088) ;教育部高等学校博士学科专项基金(20050145022) ;辽宁省科学技术计划项目(2004401015)
作者简介:高莹(1957 -) ,女(汉族) ,辽宁沈阳人 ,东北大学工商管理学院副教授 ,博士研究生 ,研究方向:金融工程.

本文提出了具有 VaR 约束的跟踪误差投资组合鲁棒优化模型。在 Costa 鲁棒优化模型中引入 VaR 约束条件,建立了具有 VaR 约束的跟踪误差投资组合鲁棒优化模型。进一步以国内证券市场环境为背景,运用线性矩阵不等式(LMI)方法进行实证计算,并与基准投资组合、跟踪误差投资组合模型和无 VaR 约束的跟踪误差投资组合鲁棒模型的结果进行比较,得出了具有 VaR 约束的跟踪误差投资组合鲁棒优化模型优于其它模型的结论。

2 基本模型

2.1 跟踪误差模型

考虑一个投资组合由 n 资产组成,其收益 n 列向量为 A,资产的均值 n 维列向量为 μ,协方差 $n \times n$ 维矩阵为 V。投资组合权重向量 w 属于符合线性矩阵不等式条件的 Γ 集合,$\Gamma = \left\{ w \in R^n ; F_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i F_i \geq 0 \right\}$,其中 $F_i, i = 0, \cdots, n$ 是已知的对称矩阵。w 满足 $w^T I \leq 1$(I 为单位列向量)。用表示投资者预先规定的投资组合,称为基准组合。则基准投资组合的收益为 $w_B^T A$。权重为 w 的投资组合与权重为 w_B 的基准组合的收益差称为跟踪误差。由于跟踪误差是随机变量,可以用跟踪误差的期望值 $\rho(w)$ 来度量投资组合的相对收益,$\rho(w) = (w - w_B)^T \mu$。用 $\sigma^2(w)$ 表示跟踪误差的方差,则 $\sigma^2(w - w_B)^T V(w - w_B)$。

投资管理者为了获得尽可能好的绩效,总是希望投资组合的相对收益尽可能大,同时又使投资组合的相对风险尽可能小。由于高相对收益往往伴随高相对风险,投资组合的双目标规划往往是无解的。所以,投资管理者只能通过下面的两个模型寻找自己满意的组合权重向量。一个模型是在确保达到相对收益目标 ρ_0 的情况下,最小化风险,即

$$\min_w \sigma^2(w) \tag{1a}$$

$$s.t.\ \rho(w) \geq \rho_0 \tag{1b}$$

$$w \in \Gamma \tag{1c}$$

式(1b)中,ρ_0 是投资者规定的相对收益目标。

另一个模型是在确保小于相对风险 σ_0 的情况下,最大化收益,即

$$\max_w \rho(w) \tag{2a}$$

$$s.t.\ \sigma^2(w) \leq \sigma_0^2 \tag{2b}$$

$$w \in \Gamma \tag{2c}$$

式(2b)中 k 是投资者指定的相对风险上限。模型(1)和模型(2)是等效的,即只要确定了有效的相对收益和相对风险,无论使用模型(1)还是模型(2),都能得到相同的投资组合权重向量。本文仅讨论模型(2)的鲁棒形式。

2.2 跟踪误差鲁棒优化模型

文献[8]给出了由模型(2)得到的跟踪误差投资组合鲁棒优化模型。

$$\max_w \beta \tag{3a}$$

$$s.t. \begin{bmatrix} \psi_k & (w - w_B)^T V_k \\ V_k(w - w_B) & V_k \end{bmatrix} \tag{3b}$$

$$(w - w_B)^T \mu_k \geq \beta_k,\ k = 1, 2, \cdots, m \tag{3c}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{3d}$$

模型有两个决策变量 W 和 β。w 是投资组合决策权重向量;β 是投资组合期望收益;模型有两个下标变量 i 和 k,i 表示各种证券,$i = 1, 2, \cdots, n$;k 表示证券期望收益和协方差矩阵的数量,由于投资期内经济环境的变化会导致不同的期望收益和协方差,因此用不同的期望收益和协方差矩阵来表示证券价格未来变化的各种可能情况,$k = 1, 2, \cdots, m$。

模型的约束条件为(3b)-(3d),式(3b)是由 $\psi_k - (w - w_B)^T V_k (w - w_B) \geq 0$,通过线性矩阵不等式的 Schur 补性质变换得到的,文献[8]给出了证明。其数理金融意义是 $\psi = (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m)^T$,为未来经济情况中跟踪误差的最大波动向量;式(3c)是投资组合期望收益约束;(3d)是投资组合权重的总量约束。

模型的目标函数是求满足约束条件下的期望收益 β 最大时的投资组合权重向量 w,其数理金融意义是,在跟踪误差波动最大的情况下,选择权重 w 使得投资组合期望收益最大($\max_w \beta$)。

3 具有 VaR 约束的跟踪误差鲁棒优化模型及 VaR 计算

3.1 具有 VaR 约束的跟踪误差鲁棒优化模型

本文提出的模型是在式(3a)-(3d)的基础上.引入 VaR 约束,并考虑我国证券交易的实际情况,设定不允许卖空约束,模型描述为

$$\max_w \beta \tag{4a}$$

$$s.t. \begin{bmatrix} \psi_k & (w - w_B)^T V_k \\ V_k(w - w_B) & V_k \end{bmatrix} \tag{4b}$$

$$(w - w_B)^T \mu_k \geq \beta_k,\ k = 1, 2, \cdots, m \tag{4c}$$

$$VaR \leq VaR^* \tag{4d}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{4e}$$

$$0 \le w_i \le 1, i = 1,2,\cdots,n \tag{4f}$$

模型的约束条件(4d)是约束 VaR,其中 VaR^* 为允许的损失限度,目的是避免投资组合承担过大的高阶矩风险;(4f)是投资组合权重的非负约束,表示不允许卖空。

3.2　VaR的计算

VaR的含义是指在给定的时间间隔、置信水平及正常的市场条件下,投资组合的潜在期望损失,即

$Prob(\Delta A_{\Delta t} \ge -VaR) = 1 - c$ 其中,ΔA 为投资组合在持有期 Δt 内的收益,c为置信水平,VaR为置信水平c下的风险价值。对于一般的概率分布,VaR实际上就是要估测投资组合的预期价值与在一定置信区间下的最低价值之差,即

$$VaR^* = E(v) - V^* \tag{5}$$

其中,E(v)表示投资组合的预期价值,v表示持有期末投资组合的价值。如果 v_0 用表示持有期初的投资组合价值,A表示收益率,则 $v = v_0(1 + A)$,v^* 为一定置信区间c下最低的资产组合价值,$v^* = v_0(1 + A^*)$,A^* 为一定置信区间c下最低的收益率,则式(5)可变为:

$$VaR^* = v_0(E(A) - A^*) \tag{6}$$

计算 VaR^* 相当于识别 A^*,考虑到投资组合各证券之间的相关性,本文计算VaR采用蒙特卡罗模拟法,计算步骤如下:步骤一,计算投资组合的均值和协方差矩阵;步骤二,采用蒙特卡罗模拟法随机抽样得到资产收益。步骤三,根据每种资产收益计算投资组合收益;步骤四,将投资组合收益由大到小顺序排列,按给定的置信水平c确定投资组合收益率 A^*,计算得到 VaR^*。

4　实证计算

实际中,当运用本文模型(4a)-(4f)选取最优投资策略时,首先应确定欲投资哪 n 个证券;然后确定期望收益和协方差矩阵的数量和计算方法;接着给定置信水平 c,VaR 计算值;最后利用Matlab软件的LMI工具箱对模型进行优化求解,得出投资组合决策权重。

选择欲投资的证券就是构造证券集,投资者可根据自己拥有的信息和风险偏好程度选择证券集。为了更好地反映实际投资情况,本文从我国上海证券市场挑取了在2003-2004年度业绩相对较好的13支股票组成证券集,股票代码分别为600000、600005、600008、600018、600020、600033、600050、600100、600350、600591、600602、600688、600808。以2004年12月2日至2006年2月28日的日收盘价数据作为样本,样本数据来自于CSMAR系统。将2004年12月2日至2006年月2月28日期间分成两部分,2004年12月2日至2005年4月30日期间共100个交易日用于均值和协方差矩阵的计算,2005年5月9日至2006年2月28日这一期间用于投资组合绩效分析,投资日为2005年5月9日。

本文的实证计算考虑2个协方差矩阵 V_1、V_2 和2个期望收益向量 μ_1、μ_2,即 $k = 2$。V_1、V_2 采用指数加权移动平均(EWMA)法,根据2004年12月2日至2005年4月30日期间的13种股票收盘价计算,V_1 的衰减因子为0.94;V_2 的衰减因子为0.9。均值向量 μ_1 是根据投资日前3个月13支股票的月收益率,分别按0.7、0.2和0.1的权重计算得到的,确定此权重的理由是考虑到距离当前越近的收益率对未来收益的影响越大;μ_2 是根据投资日前两个月的13支股票的月收益率,分别按0.5和0.5的权重计算的。具体地说,j 表示投资日,$A(j)$ 为投资日当月的13种股票的月收益率向量,例如 $A(j-1)$ 为13支股票2005年4月的月收益率向量,以此类推。则

$$\mu_1 = 0.7A(j-1) + 0.2A(j-2) + 0.1A(j-3)$$

$$\mu_2 = 0.5A(j-1) + 0.5A(j-2)$$

给定置信水平 $c = 0.05$,取蒙特卡罗模拟数量为10000,通过crystal ball软件计算VaR值。另外,取基准组合 $w_B = (1/13, 1/13, \cdots, 1/13)^T$,则基准组合收益是13支股票日收益的均值。

在主频1.5GHz、内存256MB的PC机上用Matlab7.0软件的LMI工具箱进行计算,得到了由具有VaR约束的跟踪误差投资组合鲁棒优化模型给出的有VaR约束的鲁棒组合权重见表1。

表1　投资组合决策权重的比较　　单位:%

股票代码	基准组合	跟踪误差组合	无VaR约束的鲁棒组合	有VaR约束的鲁棒组合
600000	7.692	7.69	7.57	7.54
600005	7.692	7.68	5.30	4.59
600008	7.692	7.69	9.24	9.98
600018	7.692	7.68	9.85	10.08
600020	7.692	7.68	8.97	9.65
600033	7.692	7.70	8.41	8.51
600050	7.692	7.68	8.82	8.47
600100	7.692	7.68	6.24	5.78
600350	7.692	7.67	6.82	6.58
600591	7.692	7.69	7.50	7.41
600602	7.692	7.74	7.67	7.97
600688	7.692	7.70	7.92	8.05
600808	7.692	7.72	5.69	5.39

表1还列出了基准组合、跟踪误差组合和无VaR约束的鲁棒组合的权重。其中跟踪误差组合

是指运用跟踪误差模型(2a) - (2c) ,只考虑一个协方差矩阵和一个期望收益向量情况下计算得到的权重,这实际是跟踪误差模型的有效边界;无 VaR 约束的鲁棒组合是指运用跟踪误差鲁棒优化模型(3a) - (3d) ,考虑两个协方差矩阵 V_1、V_2 和期望收益向量 μ_1、μ_2 ,但没有 VaR 约束情况下得到的权重。

为验证具有 VaR 约束的跟踪误差投资组合鲁棒优化模型,按照表 1 的决策权重进行投资,投资期间是 2005 年 5 月 9 日至 2006 年 2 月 28 日,依据当日收盘价分别计算基准组合、跟踪误差组合、无 VaR 约束的鲁棒组合和具有 VaR 约束的鲁棒组合的实际日复合收益。并将具有 VaR 约束的跟踪误差鲁棒模型的实际复合收益分别与其他三种模型的结果进行比较,如图 1 - 图 3 所示。

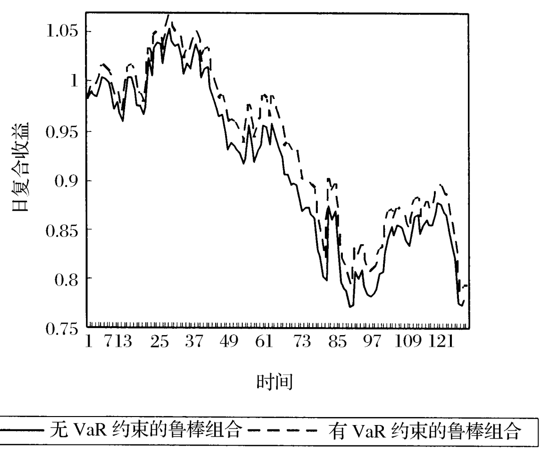

图 1 有 VaR 约束的鲁棒组合与基准组合收益的比较

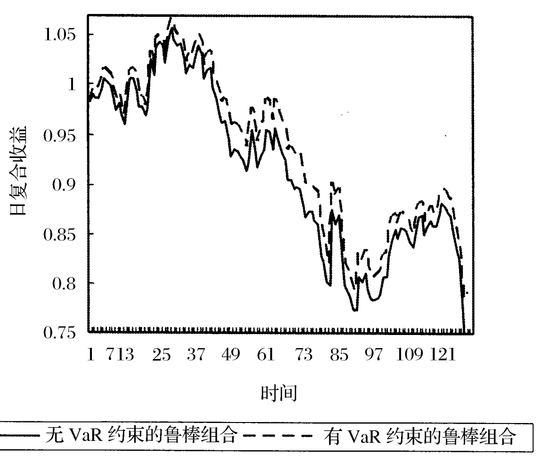

图 2 有 VaR 约束的鲁棒组合与跟踪误差组合收益的比较

由图 1 - 图 3 可以看出: ①四种模型的决策权重不同,得到的投资收益不同。引入 VaR 约束的跟踪误差鲁棒模型的收益既高于基准组合收益(图 1)

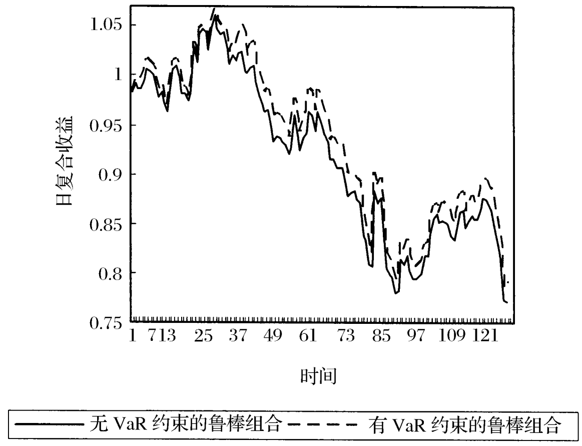

图 3 有 VaR 约束鲁棒组合与无 VaR 约束的组合收益的比较

和跟踪误差模型得到的投资组合收益(图 2) ,也高于无 VaR 约束的跟踪误差鲁棒模型收益(图 3) 。原因是具有 VaR 约束的跟踪误差投资组合鲁棒模型除考虑了均值和协方差矩阵的估计不准确而导致的决策结果偏离最优值的问题外,还考虑了未来收益不确定带来的均值和协方差矩阵变化的可能性,同时模型中加入了 VaR 约束,避免投资组合遭受过大的损失,投资决策具有鲁棒性。因此,具有 VaR 约束的跟踪误差投资组合鲁棒优化模型优于其他模型。②在考虑用多个均值和协方差矩阵描述未来变化和避免对输入数据过度敏感的情况下优化投资组合时,线性矩阵不等式的方法是有效的。运用 LMI 方法进行投资组合的鲁棒优化有着较强的实用性和可操作性,可以为投资组合理论的应用实践提供一种新方法。

5 结语

本文提出了具有 VaR 约束的跟踪误差投资组合鲁棒优化模型。为表明模型的合理性与实用价值,采用国内上海证券市场中的 13 支股票数据,运用线性矩阵不等式方法进行了实证计算。并与基准组合、跟踪误差投资组合模型和无 VaR 约束的跟踪误差投资组合鲁棒模型的投资结果进行比较。结果表明在给定证券集的条件下,具有 VaR 约束的跟踪误差投资组合鲁棒模型,由于加入 VaR 约束,避免投资组合承担过大的风险;同时考虑了未来收益的不确定性可能导致决策结果偏离最优值的问题,使得投资组合权重的选择更加合理,投资效果更优。

参考文献:

[1] Roll R.. A mean - variance analysis of tracking error

[J]. Journal of Portfolio Management, 1992, 18(4):13 - 22.

[2] 马永开,唐小我. 具有市场基准的多因素证券组合投资决策模型研究[J]. 工程理论与实践,2004,24(7):30 - 37.

[3] Black F.,Litterman R.. Asset allocation: combining investor views with equilibrium[J]. Journal of Fixed Income, 1991, 16(1): 7 - 18.

[4] 威廉 T 津巴,约翰 M. 马尔维. 顾娟,等译. 全球资产与负债管理建模[M]. 北京:经济科学出版社,2003,55 - 64.

[5] Bai D.,Carpenter T.,Mulvey J.. Making a case for robust optimization models [J]. Management Science, 1997,43(7): 895 - 907.

[6] Ben A.,Nemirovski A.. Robust optimization - methodology and applications [J]. Mathematics Program, 2002,92(2);453 - 480.

[7] Lobo Vandenberghe L., Boyd S., Lebert H.. Second - order cone programming: Interior - point methods and engineering applications [J]. Linear Algebra Applacation, 1998, (284):193 - 228.

[8] Costa O L V, Paiva A C. Robust portfolio selection using linear - matrix inequalities[J]. Journal of Economic Dynamics & Control, 2002, 26(6):889 - 909.

[9] Pinara M. C., Tutuncu R H. Robust Profit Opportunities in Risky Financial Portfolios[J]. Operations Research Letters, 2005,(33):331 - 340.

[10] Alexander G.,Baptista A.. Economic Implication of Using a Mean - VaR Model for Portfolio Selection: A Comparison with Mean - Variance Analysis[J].Journal of Economic Dynamics & Control,2002,26(8):1159 - 1193.

[11] 姚京,李仲飞. 具有 VaR 的金融资产配置模型[J]. 中国管理科学,2004,12(1):8 - 13.

[12] Laurent E. C.,Marksim O.,Francois O.. Worst - case Value - at - risk and robust portfolio optimization: A conic programming approach[J]. Operations Research, 2003,51(4): 543 - 556.

Robust Optimal Tracking Error Portfolio Models Based on VaR

GAO Ying, HUANG Xiao - yuan

(School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: On the foundation of stock portfolio model of tracking error, this paper takes the value at risk (VaR) of portfolio and the uncertainty of future returns to establish the robust optimal portfolio model based on VaR constraints. According to the background of Chinese stock market, we use the linear matrix inequality (LMI) method to carry out a demonstrational computation, and compare the results with the returns of benchmark portfolio and tracking error portfolio model and tracking error robust optimal portfolio model without VaR constraints. Finally, we obtain the conclusion that the robust optimal portfolio model based on VaR constraints is better than other models on the condition of a given stock set.

Key words: portfolio; robust optimization; tracking error; VaR; LMI