第 15 卷　第 3 期　　中国管理科学　　Vol. 15 , No. 3
2007 年　6 月　　Chinese Journal of Management Science　　Jun. ,　2007

文章编号:1003 - 207(2007)03 - 0014 - 05

具有资本结构因子和交易成本的证券组合投资模型

李宏杰[1,2]

(1. 东华大学信息科学与技术学院, 上海　200051;2. 嘉兴学院数学系, 浙江 嘉兴　314001)

摘　要:在介绍经典的 Harry Markowitz 均值 - 方差投资组合模型的基础上,建立了含有资本结构因子和交易成本的证券组合最优化模型,在组合中不含有无风险证券和含有无风险证券的条件下,分别给出最优投资比例及有效边界,并讨论了资本结构因子与交易成本对有效边界的影响。

关键词:投资组合; 资本结构因子; 交易成本; 有效边界

中图分类号:O221; F830. 9　　**文献标识码**:A

1　引言

资本市场中对于投资、融资决策与风险管理问题的研究自投资组合理论建立以来一直在迅速发展,并在金融、投资领域得到了广泛应用。Markowitz(1952 年) 提出均值 —方差模型[1] ,奠定了投资组合理论的基础。. 然而 Markowitz 证券组合投资模型并没有考虑到证券组合投资过程中的交易费用,实际上交易费用是投资管理不可忽视的问题。在证券组合投资过程中,忽略交易费用会导致非有效的证券组合投资决策[2] 。近年来考虑交易费用的证券组合投资问题引起了高度的重视,不少学者对之进行了探讨,也取得了一些研究成果,这些成果从不同的角度或用不同的方法讨论了具有交易费用的证券组合的投资决策问题[2 - 5] 。文献[2] 建立了考虑交易费用的证券组合投资模型,分析了含有交易费用的证券组合有效边界的性质,文献[3]利用均值 - 方差模型讨论具有交易成本的证券组合的投资规模、有效前沿等投资决策问题,文献[4]运用随机最优控制理论研究了带有交易费用的 n 种证券的最优投资略资问题,文献[5]研究了带有交易费用的证券投资决策问题中出现的一类多维二阶偏微分方程自由边界问题。Modigliani 和 Miller(1958 年) 提出了公司财务理论(又称 MM 定理) [6] ,研究财务杠杆作用,企业价值问题,以指导企业融资,尽管在 MM 理论发展过程中,很少考虑融资对投资组合的影响,但在现实的企业资金运动中,投资与融资是不可分割的两部分,投资者在进行投资决策的过程中应考虑融资因素和资本结构的变化,因此将投资组合、融资决策结合,考虑资本结构变化对投资优化的影响是有现实意义的。文献[7]研究了允许卖空条件下带有资本结构因子的投资组合有效边界的结构;文献[8]研究了允许卖空条件下资本结构因子对有效边界的影响。

本文将资本结构因子和交易成本综合考虑,建立了含有资本结构因子和交易成本的证券组合最优化模型,在组合中不含有无风险证券和含有无风险证券的条件下,分别给出最优投资策略及有效边界;并分析了资本结构因子与交易成本对投资策略及有效边界的影响,与经典的 Markowitz 模型相比,所讨论的扩展模型更具有一般性且更符合实际,当资本结构因子和交易成本全为 0 时,该模型就退化为经典的 Markowitz 模型。

2　不含无风险证券模型分析

2. 1　不含无风险证券的 Markowitz 模型

考虑 n 种风险证券,第 i 种证券的收益率为 r_i ,投资者在第 i 种证券的投资比例为 x_i ,证券组合收益率为 $r_p = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i$,为了方便,引入下面的记号:

$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为证券组合投资比例向量; $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n)^T$ 为证券组合投资的收益率向量; $R = (R_1, R_2, \cdots, R_n)^T$ 为证券组合投资的期望收益率向量,收益率 r 的协方差矩阵为 $V = (\sigma_{ij})_{n\times n}$,并且 V 为正定矩阵,其中 $\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(r_i, r_j)$, $(i, j = 1, 2,$

收稿日期:2006 - 04 - 10;**修订日期**:2007 - 03 - 23
基金项目:浙江省教育厅资助项目(20041121)
作者简介:李宏杰(1974 -) ,男(汉族) ,山西垣曲人,东华大学信息科学与技术学院,博士研究生,研究方向:随机控制与金融数学.

$\cdots n)$; $e=(1,1,\cdots 1)^T$ 为元素全为 1 的 n 维列向量。

则证券组合的预期收益率和方险可以表示为

$$R_P = X^T R \quad \sigma^2 P = X^T V X$$

投资者期望收益尽可能大,而风险尽可能小,即通过下面的模型进行证券组合投资决策,我们只考虑进行单期证券的投资情况

$$\begin{cases} \max \quad R_P = X^T R \\ \min \quad \sigma^2 P = X^T V X \\ s.t. \quad X^T e = 1 \end{cases} \tag{1}$$

由于模型(1) 是一个多目标非线性规划问题,求解起来不方便,通过引入参数 μ 将收益率与风险综合考虑,建立使收益尽可能大而风险尽可能小的单目标的组合证券投资决策模型

$$\begin{cases} \max \quad \mu X^T R - \dfrac{1}{2} X^T V X \\ s.t. \quad X^T e = 1 \end{cases} \tag{2}$$

此处 μ 是一个风险承受参数,μ 越大投资者对风险的承受度就越大,对收益越关心。

利用 Lagrange 乘数法解模型(2) 得最优投资策略为:

$$X^{*} = \frac{1}{a} V^{-1} e + \mu V^{-1}\left(R - \frac{b}{a} e\right)$$

其中 $a = e^T V^{-1} e, b = R^T V^{-1} e, c = R^T V^{-1} R, ac - b^2 > 0$。

文献[9] 求解模型(2) 的有效边界为 $\left(R_P - \dfrac{b}{a}\right)^2 = \left(\dfrac{ac-b^2}{a}\right)\left(\sigma_P^2 - \dfrac{1}{a}\right)$

2.2　含有资本结构因子和交易成本的均值 - 方差投资组合模型

设 P_{i0} 是第 i 种证券在时刻 0 的价格,P_{i1} 是第 i 种证券在时刻 1 的价格,假设每笔交易无论卖出还是买入都有 α 倍的交易成本,且资本结构因子(负债率) 为 x,无风险投资的收益率为 R_f,则在 0 时刻买入一单位证券 i 需要自备资金 $P_{i0}(1+\alpha)(1-x)$,在时刻 1 卖出一单位证券 i 可获得资金为 $P_{i1}(1-\alpha)$,由于负债在 1 时刻需要支付的资金为 $P_{i0}(1+\alpha)x(1+R_f)$。因此,考虑资本结构因子和交易成本第 i 种证券的收益率为

$$R_i(x,\alpha) = \frac{P_{i1}(1-\alpha) - P_{i0}(1+\alpha)(1-x) - P_{i0}(1+\alpha)x(1+R_f)}{P_{i0}(1+\alpha)(1-x)}$$

若记 $R_i = \dfrac{P_{i1} - P_{i0}}{P_{i0}}$ 为第 i 种证券根据市场价格获得的收益率,则考虑资本结构因子和交易成本的收益率为 $R_i(x,\alpha) = \dfrac{1-\alpha}{(1-x)(1+\alpha)} R_i - \dfrac{2\alpha}{(1-x)(1+\alpha)} - \dfrac{x}{1-x} R_f$

则该证券组合的期望收益率与风险分别为

$$R_P(x,\alpha) = \frac{1-\alpha}{(1-x)(1+\alpha)} R_P - \frac{2\alpha}{(1-x)(1+\alpha)} - \frac{x}{1-x} R_f \tag{3}$$

$$\sigma_P^2(x,\alpha) = \frac{(1-\alpha)^2}{(1-x)^2(1+\alpha)^2}\sigma_P^2 \tag{4}$$

为了方便起见,不妨设 $u(x,\alpha) = \dfrac{1-\alpha}{(1-x)(1+\alpha)}$,$v(x,\alpha) = \dfrac{2\alpha}{(1-x)(1+\alpha)} + \dfrac{x}{1-x} R_f$

则 $R_P(x,\alpha) = u(x,\alpha) R_P - v(x,\alpha)$,$\sigma_P^2(x,\alpha) = u^2(x,\alpha)\sigma_P^2$ (5)

含有资本结构因子和交易成本的均值 - 方差投资组合模型

$$\begin{cases} \max \quad \mu R_P(x,\alpha) - \dfrac{1}{2}\sigma_P^2(x,\alpha) \\ s.t. \quad X^T e = 1 \end{cases}$$ 即

$$\begin{cases} \max \quad \mu[u(x,\alpha) R_P - v(x,\alpha)] - \dfrac{1}{2} u^2(x,\alpha) X^T V X \\ s.t. \quad X^T e = 1 \end{cases} \tag{6}$$

作 Lagrange 函数

$$L(X,\lambda) = \mu[(x,\alpha) X^T R - v(x,\alpha) X^T e] - \frac{1}{2} u^2(x,\alpha) X^T V X + \lambda(X^T e - 1)$$

由极值的必要条件有

$$L_X(X,\lambda) = \mu[u(x,\alpha) R - v(x,\alpha) e] - u^2(x,\alpha) V X + \lambda e = 0 \tag{7}$$

$$L_\lambda(X,\lambda) = X^T e - 1 = 0 \tag{8}$$

由(7) 式可得

$$X = \frac{\mu}{u(x,\alpha)} V^{-1} R - \frac{\mu v(x,\alpha)}{u(x,\alpha)} V^{-1} e + \frac{\lambda}{u^2(x,\alpha)} V^{-1} e \tag{9}$$

将(9) 代入(8) 得

$$\lambda = \frac{1}{a}[u^2(x,\alpha) - \mu b u(x,\alpha) + \mu a v(x,\alpha)] \tag{10}$$

将(10) 代入(9) 得

$$X = \frac{1}{a} V^{-1} e + \frac{\mu}{u(x,\alpha)} V^{-1}\left(R - \frac{b}{a} e\right) \tag{11}$$

将(11) 代入证券组合的期望收益率与风险得

$$R_P(x,\alpha) = \frac{b}{a} u(x,\alpha) - \mu\left(c - \frac{b^2}{a}\right) - v(x,\alpha) \tag{12}$$

$$\sigma_P^2(x,\alpha) = \frac{1}{a}u^2(x,\alpha) + \mu^2\left(c - \frac{b^2}{a}\right) \tag{13}$$

将(12)和(13)中的 μ 消去,可得有效边界为

$$\left[R_P(x,\alpha) - \frac{b}{a}u(x,\alpha) + v(x,\alpha)\right]^2 = \left(c - \frac{b^2}{a}\right)\left[\sigma_P^2(x,\alpha) - \frac{1}{a}u^2(x,\alpha)\right] \tag{14}$$

将 $u(x,\alpha)$,$v(x,\alpha)$ 代入(14)得

$$\left[R_P(x,\alpha) - \frac{b(1-\alpha)}{a(1-x)(1+\alpha)} + \frac{2\alpha}{(1-x)(1+\alpha)} + \frac{xR_f}{1-x}\right]^2 = \left(c - \frac{b^2}{a}\right)\left[\sigma_P^2(x,\alpha) - \frac{(1-\alpha)^2}{a(1-x)^2(1+\alpha)^2}\right]$$

推论 1 由模型(2)可直接得到模型(6)的有效边界

证明:由(5)得 $R_P = \frac{R_P(x,\alpha) + v(x,\alpha)}{u(x,\alpha)}$ $\sigma_P^2 = \frac{\sigma_P^2(x,\alpha)}{u^2(x,\alpha)}$

将其代入模型(2)的有效边界 $\left(R_P - \frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{ac-b^2}{a}\right)\left(\sigma_P^2 - \frac{1}{a}\right)$ 中得

$$\left(\frac{R_P(x,\alpha) + v(x,\alpha)}{u(x,\alpha)} - \frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{ac-b^2}{a}\right)\left(\frac{\sigma_P^2(x,\alpha)}{u^2(x,\alpha)} - \frac{1}{a}\right)$$

整理得 $\left[R_P(x,\alpha) - \frac{b}{a}u(x,\alpha) + v(x,\alpha)\right]^2 = \left(c - \frac{b^2}{a}\right)\left[\sigma_P^2(x,\alpha) - \frac{1}{a}u^2(x,\alpha)\right]$,即为模型(6)的有效边界。

推论 2

(A)当 $\alpha = 0$,$x = 0$ 时,即 $u(x,\alpha) = 1$,$v(x,\alpha) = 0$,含有资本结构因子和交易成本的均值 - 方差投资组合模型与 Markowitz 模型相同。

(B)当 $x = 0$ 时,即 $u(x,\alpha) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$,$v(x,\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$,含有资本结构因子和交易成本的均值 - 方差投资组合模型退化为只含有交易成本的投资组合模型,有效边界见文献[10,11]。

(C)当 $\alpha = 0$ 时,即 $u(x,\alpha) = \frac{1}{1-x}$,$v(x,\alpha) = \frac{x}{1-x}R_f$,含有资本结构因子和交易成本的均值 - 方差投资组合模型退化为只含有资本结构因子的投资组合模型,有效边界见文献[7,8]。

推论 3[12]

(i)当交易成本 α 不变时,含有资本结构因子与交易成本的投资组合有效边界随资本结构因子 x 的增加而变大。

(ii)当资本结构因子 x 不变时,含有资本结构因子与交易成本的投资组合有效边界随交易成本的 α 的增加而变小。

讨论如下:

若交易成本 α 不变,其中 $0 \le \alpha < 1$,则

(A)当 $x \in \left[\frac{2\alpha}{1+\alpha}, 1\right)$ 时,即 $u(x,\alpha) \ge 1$ 时,含 x 和 α 的有效边界如图 1 所示。

(B)当 $x \in \left[0, \frac{2\alpha}{1+\alpha}\right]$ 时,即 $u(x,\alpha) \le 1$ 时,含 x 和 α 的有效边界如图 2 所示。

若资本结构因子 x 不变,则

(A)当 $\alpha \in \left[0, \frac{x}{2-x}\right]$ 时,即 $u(x,\alpha) \ge 1$ 时,含 x 和 α 的有效边界如图 1 所示。

(B)当 $\alpha \in \left[\frac{x}{2-x}, 1\right)$ 时,即 $u(x,\alpha) \le 1$ 时,含 x 和 α 的有效边界如图 2 所示。

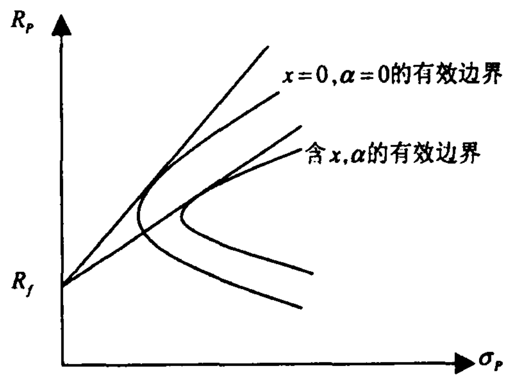

图 1 投资组合有效边界 A

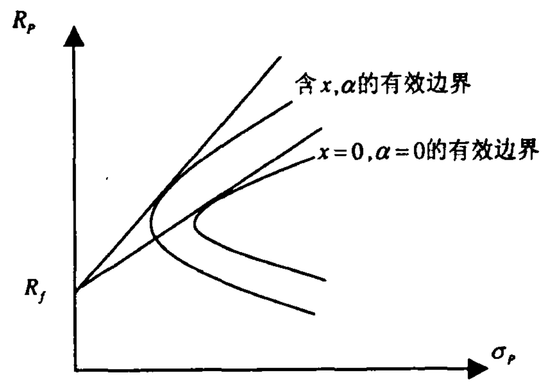

图 2 投资组合有效边界 B

在现实中,交易成本 α 是一个相对稳定的值,而资本结构因子 x 的取值将受到限制,有结论 4 可知,

若交易成本不变,则 x 的取值范围应为 $\left[0, \frac{2a}{1+a}\right]$

3　含无风险证券模型分析

3.1　含无风险证券的 Markowitz 模型

当有无风险证券时,由分离定理,建立如下投资模型

$$\begin{cases} \max \quad \mu(X^T R + \lambda R_f) - \frac{1}{2} X^T V X \\ s.t. \quad X^T e + \lambda = 1 \end{cases} \tag{15}$$

由 Lagrange 乘数法可得 $X^* = \mu V^{-1}(R - eR_f)$

$R_P = \mu(c - 2bR_f + aR_f^2) + R_f^2 \quad \sigma_P^2 = \mu^2(c - 2bR_f + aR_f^2)$

消去 μ 得有效边界为 $R_P = (c - 2bR_f + aR_f^2)^{\frac{1}{2}} \sigma_P + R_f$ (16)

3.2　含有资本结构因子和交易成本的均值 - 方差投资组合模型

考虑资本结构因子和交易成本的最优投资组合模型如下

$$\begin{cases} \max \mu[u(x,a) R_P - v(x,a) + \lambda R_f] - \frac{1}{2} u^2(x,a) X^T V X & (17) \\ s.t. \quad X^T e + \lambda = 1 & (18) \end{cases}$$

由(18) 可得 $\lambda = 1 - X^T e$ 将其带入(17) 并令 $L = \mu[u(x,a) X^T R - v(x,a) X^T e + (1 - X^T e) R_f] - \frac{1}{2} u^2(x,a) X^T V X$

由极值的必要条件可得 $L_x = \mu[u(x,a) R - v(x,a) e - R_f e] - u^2(x,a) V X = 0$

可得 $X^* = \frac{\mu}{u(x,a)} V^{-1} R - \frac{\mu v(x,a)}{u^2(x,a)} V^{-1} e - \frac{\mu R_f}{u^2(x,a)} V^{-1} e$ (19)

将(19) 代入证券组合的期望收益与风险中可得

$R_P(x,a) = \mu[cu^2(x,a) - u(x,a) v(x,a) b - 2bR_f u(x,a) + av(x,a) R_f + aR_f^2] + R_f - v(x,a)$

$\sigma_P^2(x,a) = \frac{\mu^2}{u(x,a)} [cu^2(x,a) + av^2(x,a) + aR_f^2 - 2bu(x,a) v(x,a) - 2bu(x,a) R_f + 2av(x,a) R_f]$

将上面两式中的 μ 消去可得有效边界为

$$R_P(x,a) = \frac{[cu^2(x,a) - bu(x,a) v(x,a) - 2bR_f u(x,a) + aR_f v(x,a) + aR_f^2] u(x,a)}{[cu^2(x,a) + av^2(x,a) + aR_f^2 - 2bu(x,a) v(x,a) - 2bR_f u(x,a) + 2aR_f v(x,a)]^{\frac{1}{2}}} \sigma_P(x,a) - v(x,a) + R_f$$

推论:(A) 当 $a = 0, x = 0$ 时,即 $u(x,a) = 1$, $v(x,a) = 0$ 模型(17) 的有效边界退化为模型(17) 的有效边界 $R_P = (c - 2bR_f + aR_f^2) \frac{1}{2} \sigma_P + R_f$。

(B) 当 $x = 0$ 时,即 $u(x,a) = \frac{1-a}{1+a}$, $v(x,a) = \frac{2a}{1+a}$, 模型(17)的有效边界退化为模型只含交易成本的有效边界[10 - 11]。

4　结　语

考虑资本结构因子和交易成本是资本市场的实际要求,而对资本结构因子和交易成本的考虑又使得投资组合的策略与投资组合模型的有效边界均发生改变,这在证券组合投资理论和指导实际投资方面都有重大的意义;但本文主要考虑的静态的资本结构因子和交易成本,由此还可以继续考虑动态的资本结构因子和交易成本、信息不对称及权益互动的情况下,如何进行投资组合及这些条件对投资组合有效边界的影响。

参考文献:

[1] Markowitz H.. Portfolio selection[J]. Journal of finance,1952,7:77 - 91.

[2] 胡国政,李楚霖.考虑交易费用的证券组合投资的研究[J].预测,1998,17(5):33 - 36.

[3] Azriel Levy and Miles livingstion. The gains from diversification reconsidered:Transaction Costs and Superior Informa2tion,Financial Markets,Institution & Instruments[M]. New York:University Salomon Center,1995.

[4] 刘海龙,樊治平,潘德惠.带有固定交易费用的证券投资最优策略[J].管理科学学报,1999,2(4):16 - 41.

[5] 刘海龙,孔良,潘德惠.具有固定交易费用的证券投资最优策略[J].预测,1999,28(2):23 - 27.

[6] Modigliani, F. and Miller, M. H.. The cost of capital, corporation finance and the theory of investment[J]. American Economic Review, 1958,48(3):261 - 297.

[7] 陈收,刘卫国,汪寿阳,邓小铁.资本结构与投资组合优化[J].预测,2000,(1):38 - 40.

[8] 陈收,邓小铁,汪寿阳,刘卫国. 资本结构变化对投资组

合有效边界的影响[J]. 中国管理科学,2001,9(11):16 - 21.

[9] Best and Grauer, Robert R.. The efficient set mathematics when Mean - Variance problems are subject to general linear constraints[J]. Journal of Economics and Business, 1990,14A(1):105 - 120.

[10] 吴孟铎,荣喜民,李践. 有交易成本的组合证券投资[J]. 天津大学学报,2002,2:196 - 198.

[11] 夏江山,荣喜民. 具有交易成本的组合投资有效边界的研究[J]. 天津轻工业学院学报, 2003,18:37 - 39.

[12] 吴荫,黄南京,赵昌文. 一个扩展的含资本结构因子和交易成本的证券组合投资模型[J]. 四川大学学报(自然科学版),2005,42(4):639 - 643.

Model of Portfolio Selection with Transaction Costs in Varying Capital Structure

LI Hong - jie[1,2]

(1. College of Information Science and Technology, Donghua University, Shanghai 200051,China;
2. Department of Mathematics, Jiaxing College, Jiaxing 314001,China)

Abstract: In this paper, the impact of friction factors and transaction costs on portfolio optimization are studied. The author establishes an optimization model of portfolio investment with transaction costs and friction factors, as the risk security and non - risk security are considered, and gives the portfolio and the efficient frontier of that model, and discusses the influence of transaction costs and friction factors on the efficient frontier.

Key words: portfolio selection;capital structure;transaction cost;efficient frontier