

文章编号: 1003-207(2008)06-0075-07

# 基于体积比的多元过程能力指数的 Taam 算法的改进

蒋家东<sup>1,2</sup>, 冯允成<sup>2</sup>, 赵晗萍<sup>3</sup>

(1. 中国航空综合技术研究所, 北京 100028; 2. 北京航空航天大学经济管理学院, 北京 100083;  
3. 北京师范大学资源学院, 北京 100875)

**摘要:** 随着多元统计过程控制技术的大量应用, 多元过程能力指数的定量计算问题受到广泛关注。由于多元过程的复杂性, 计算多元过程能力指数一直是一项较为困难的工作, 至今尚未形成具有普遍适用性的计算方法。本文对多元过程能力指数的研究文献和当前进展进行了梳理和分析, 重点研究了基于体积比的多元过程能力指数的 Taam 算法, 分析了 Taam 算法存在的主要问题, 提出了本文的改进算法, 并利用一个经典实例对改进效果进行了对比分析。测算结果表明, Taam 算法确实存在内在缺陷, 本文的改进算法更为可靠。

**关键词:** 过程能力; 多元正态分布; 多元过程能力指数

**中图分类号:** C931      **文献标识码:** A

## 1 引言

最近十多年来, 随着测量技术、传感技术和计算机技术的大量应用, 对过程变量的在线数据采集和实时控制变得非常便利, 短时间内获得大量数据成为现实, 对这些过程信息的有效且高效的利用, 成为多元统计过程控制技术研究与应用中的一个重要问题。在一元统计过程控制中, 需要对生产过程满足顾客要求的能力进行定性分析, 并通过一元过程能力指数的计算对顾客要求得到满足的程度进行定量评价。在多元统计过程控制中, 同样面临着过程能力的定性分析与定量评价问题。由于多元过程的复杂性, 定量计算多元过程能力指数一直是一项较为困难的工作, 至今尚未形成具有普遍适用性的、统一的多元过程能力指数计算方法。

多元过程能力指数计算的基本原理就是将某一多元生产过程的过程能力与规范要求进行比较, 以判断具有该过程能力的生产过程满足顾客要求的程

度。进行多元过程能力指数计算的难点在于如何给出多元条件下的过程能力和规范要求的科学的表示方法和计算公式。随着多元统计过程控制技术应用领域的不断拓展和理论研究的不断深化, 如何有效地计算多元过程能力指数的问题受到广泛关注, 一些多元过程能力指数的计算方法应运而生<sup>[1~10]</sup>。文献[1]专门研究了1992-2000年期间有关过程能力指数的研究情况, 并对一些最新的研究成果进行了讨论。在这些多元过程能力指数的算法中比较具有代表性的有基于向量表示的 Shahriari 算法<sup>[3]</sup>、基于合格品率原理的 Chen 算法<sup>[3]</sup>、基于椭圆规格的算法<sup>[4]</sup>和基于体积比的 Taam 算法<sup>[2]</sup>。文献[3]对3种典型多元过程能力指数的算法进行了比较研究, 文献[6]对4种典型多元过程能力指数的算法进行了对比研究, 分析了每个算法各自的约束条件和存在的不足, 并通过一个经典案例的数据进行了定量验证。本文对使用较为广泛的 Taam 算法进行了深入研究, 发现该算法存在较大的缺陷, 主要表现在两个方面: 一是将规格区域修正为内切椭球(圆)区域的做法不符合多元过程统计受控时“过程区域”的实际分布规律; 二是基于过程实际分布中心和目标值之间的距离建立修正系数的做法没有考虑多元过程不同维度的规格范围与实际分布范围之间的相关信息, 对实际过程能力指数的修正不充分。为此, 本文在深入分析 Taam 算法的计算原理的基础上,

收稿日期: 2008-03-18; 修订日期: 2008-10-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70672015); 航空科学基金资助项目(04J41007, 2006ZG41004)

作者简介: 蒋家东(1968-), 男(汉族), 江苏泰州人, 北京航空航天大学经济管理学院博士研究生, 中国航空综合技术研究所, 副总工程师, 研究员, 研究方向: 统计过程控制、质量文化与质量竞争力、宏观质量评价、质量信用与风险、供应链管理。

通过重新界定“修正的规格区域\*”和提出“允许偏移系数”的概念,提出了对 Taam 算法的改进算法,并给出了多元条件下的过程能力和规范要求的更具一般性的表示方法以及基于多元正态分布假设的经验估计公式。实例计算表明, Taam 算法确实存在内在缺陷, 本文的改进算法比 Taam 算法更为合理和科学。

### 2 问题及主要参数描述

假设某一生产过程是服从多元正态分布的多元过程。本文研究的问题是, 如何对基于体积比的过程能力指数的 Taam 算法进行改进并给出改进的过程能力指数的一般性算法。进一步地, 假设有一组来自该多元过程的随机样本, 如何给出均值和协方差矩阵均未知的条件下的多元过程能力指数的经验估计, 并利用数值计算验证改进算法的实际效果。

问题中的主要参数的意义如下:

$X = (x_1, x_2, \dots, x_p)'$ : 具有  $p$  个特性的多元过程;

$N_p(\mu, \Sigma)$ : 均值为  $\mu$ , 协方差矩阵为  $\Sigma$  的  $p$  维正态分布,  $\mu, \Sigma$  分别为  $\mu$  和  $\Sigma$  的估计值;

$\{X | LSL_i \leq x_i \leq USL_i (i = 1, 2, \dots, p)\}$ : 多元过程  $X$  的规格区域;

$\mu_0 = (\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0p})'$ : 多元过程  $X$  的目标值, 也称规格中心;

$X_1, X_2, \dots, X_n$ : 多元过程  $X$  的  $n$  个随机样本,  $\bar{X}$  和  $S$  分别为样本均值和样本协方差矩阵;

$MC_p$ : 潜在过程能力指数,  $MC_p$  为其估计值;

$V_{MS}$ : 修正的规格区域的体积;

$V_{MP}$ : 修正的过程分布区域的体积;

$V_P(1-\alpha)$ : 在置信度  $1-\alpha$  下的过程实际分布区域的体积;

$\chi^2_{1-\alpha}(p)$ : 自由度为  $p$  的  $\chi^2$  分布的  $1-\alpha$  分位数;

$D$ : 修正系数,  $D$  为其估计值;

$MC_{pm}$ : 实际过程能力指数,  $MC_{pm}$  为其估计值;

$\theta_M$ : 允许的偏移系数,  $\theta_M$  为其估计值;

$V_{MS}^*$ : 基于本文方法计算的  $V_{MS}$ ;

$MC_p^*$ : 基于本文方法计算的  $MC_p$ ;

$MC_{pm}^*$ : 基于本文方法计算的  $MC_{pm}$ 。

### 3 基于体积比的过程能力指数的 Taam 算法

基于体积比的多元过程能力指数的 Taam 算法本质上可以看成是一元过程能力指数在多维情形的自然推广。假设多元过程  $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)'$  规

格区域为  $\{X | LSL_i \leq x_i \leq USL_i (i = 1, 2, \dots, p)\}$ , 定义基于体积比的多元过程能力指数为:

$$MC_p = \frac{V_{MS}}{V_P(1-\alpha)} \tag{1}$$

其中,  $V_{MS} = \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(p/2+1)} \prod_{i=1}^p \frac{USL_i - LSL_i}{2}$  表示  $X$  修正的规格区域的体积;  $V_P(1-\alpha)$  表示  $X$  在置信度  $1-\alpha$  下的过程实际分布区域的体积。

假设  $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ , 则其在置信度  $1-\alpha$  下的椭圆体为  $\{X | (X-\mu)' \Sigma^{-1} (X-\mu) \leq \chi^2_{1-\alpha}(p)\}$ , 该椭圆体体积的计算公式为:

$$V_P(1-\alpha) = \frac{[\pi \chi^2_{1-\alpha}(p)]^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(p/2+1)} \tag{2}$$

其中,  $|\Sigma|$  表示  $\Sigma$  的行列式。

当  $\mu = \mu_0$  时, 公式(1) 可以进一步表示为:

$$MC_p = \frac{\prod_{i=1}^p (USL_i - LSL_i)}{[4\chi^2_{1-\alpha}(p)]^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \tag{3}$$

称  $MC_p$  为  $X$  的潜在过程能力指数。当  $\mu \neq \mu_0$  时, 定义  $X$  的实际过程能力指数为:

$$MC_{pm} = \frac{MC_p}{D} \tag{4}$$

其中,  $D$  为修正系数, 用于测量  $X$  的实际分布中心  $\mu$  与目标值  $\mu_0$  之间的接近程度, 计算公式为:

$$D = \left[ 1 + \frac{n}{n-1} (\mu - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0) \right]^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

从公式(5) 不难看出  $D \geq 1$ 。当  $D = 1$  时,  $X$  的实际分布中心  $\mu$  与目标值  $\mu_0$  重合; 当  $D > 1$  时,  $X$  的实际分布中心  $\mu$  与目标值  $\mu_0$  不一致, 而且偏离程度越大,  $D$  值越大。由此, 当  $X$  的实际分布中心  $\mu$  与过程的目标值  $\mu_0$  重合,  $MC_p = 1$  且  $\alpha = 0.27\%$  时, 应该有 99.73% 的多元过程的实际样本值落在其修正的规格区域内。

称  $MC_{pm}$  为  $X$  的实际过程能力指数。 $MC_{pm}$  和  $MC_p$  之间的差距越大, 意味着该多元过程可获得改进的机会越多。

以上分析假设  $X$  服从  $\mu$  和  $\Sigma$  均已知的正态分布  $N_p(\mu, \Sigma)$ 。当  $\mu$  和  $\Sigma$  均未知时, 需要利用样本信息估计有关参数, 取  $\mu = \bar{X}$ ,  $\Sigma = S$ , 由此得到多元过程能力指数  $MC_p$  和  $MC_{pm}$  的估计公式为:

$$MC_p = \frac{\prod_{i=1}^p (USL_i - LSL_i)}{[4\chi^2_{1-\alpha}(p)]^{\frac{p}{2}} |S|^{\frac{1}{2}}} \tag{6}$$

$$MC_{pm} = \frac{MC_p}{D} \tag{7}$$

$$\text{其中, } D = \left[ 1 + \frac{n}{n-1} (\bar{X} - \mu_0)' S^{-1} (\bar{X} - \mu_0) \right]^{\frac{1}{2}}$$

当  $\mu_0 = \bar{X}$  时,  $MC_{pm} = MC_p$ 。

如下以某个二元生产过程  $X$  为例, 通过示意图说明基于体积比的多元过程能力指数的 Taam 算法的基本原理, 见图 1。不难看出,  $X$  的修正的规格区域实际上是其规格区域的内切椭圆, 其长、短轴大小由  $X$  的规格区域  $[LSL_1, USL_1] \cap [LSL_2, USL_2]$  唯一决定。就图 1 中的情形而言, 由于  $X$  的修正的规格区域完全覆盖了实际分布区域, 则  $X$  的潜在过程能力指数的估计值  $MC_p$  大于 1, 又由于目标值与过程实际分布中心明显偏离, 则实际过程能力指数的估计值  $MC_{pm}$  明显小于  $MC_p$ 。

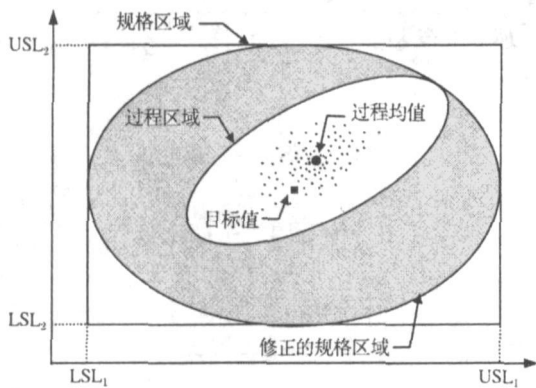


图 1 基于 Taam 算法的修正的规格区域

#### 4 对 Taam 算法存在问题的分析

已有研究表明<sup>[3,6]</sup>, 基于体积比的多元过程能力指数的 Taam 算法存在 3 个制约条件: 一是该方法要求多元过程  $X$  服从多元正态分布; 二是无法在该过程能力指数与合格率之间建立有效的联系; 三是该方法并没有考虑修正的规格区域与过程实际分布区域在方向上的一致性问题。但是, 这些制约条件可以看成计算基于 Taam 算法的多元过程能力指数的前提条件, 本身并无缺陷。

Taam 算法的真正问题在两个方面: 一是将规格区域修正为内切椭圆(圆)区域的做法存在缺陷; 二是基于过程实际分布中心和目标值之间的距离建立修正系数的做法存在缺陷。对 Taam 算法的上述缺陷进一步分析如下:

根据过程能力分析的基本思想, 建立过程能力指数的目的在于对“过程能力满足规范要求的程度”进行测量和评价, 多元过程能力指数的建立也应该符合这一基本思想。从图 1 不难看出, 基于“修正的规格区域”的多元过程能力指数的 Taam 算法并不

符合这一点, 原因在于“修正的规格区域”的提法并不科学。建立多元过程能力指数的前提必须是该多元过程处于统计受控状态, 这意味着多元过程的“能力”必须是稳定的, 即“过程区域”的基本形态是稳定的。由此, “修正的规格区域(为了有所区别, 下文中用‘修正的规格区域\*’表示)”应该是指“在给定的规格区域范围内, 保持‘过程区域’的形态不变的情况下, 允许过程实际分布中心沿着任意方向作平行运动时的最大外边界的包络面所围成的区域”。

为了便于理解, 仍以图 1 中的二元生产过程  $X$  为例, 通过示意图说明本文提出的“修正的规格区域\*”与基于 Taam 算法的“修正的规格区域”的差别, 见图 2。不难看出, 图 2 中的“修正的规格区域\*”与图 1 中的“修正的规格区域”明显不同。

此外, 基于过程实际分布中心和目标值之间的距离建立修正系数的做法没有考虑多元过程的不同维度的规格范围与实际分布范围之间的相关信息, 对实际过程能力指数的修正不充分, 也不科学。为此, 本文提出了“允许偏移系数”的概念来取代 Taam 算法中的“修正系数”的概念。

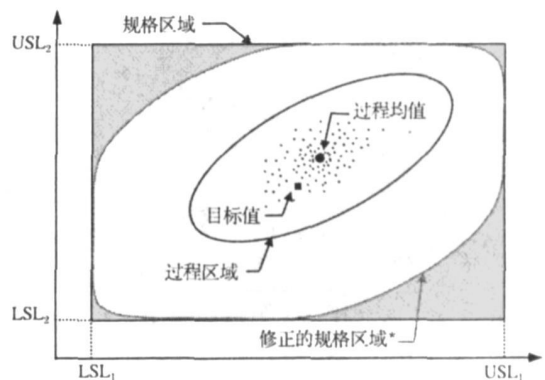


图 2 基于本文算法的修正的规格区域\*

仍以上述二元生产过程  $X$  为例, 通过示意图说明本文提出的“允许偏移系数”与基于 Taam 算法的“修正系数”的差别, 见图 3。不难看出, “修正系数”仅仅与过程实际分布中心  $\mu$  与规格中心  $\mu_0$  的距离有关。对图 3 中的“修正的偏移区域”的所有边界点而言, 均具有相同的 Taam 修正系数。当规格区域为图 3 所示的长方体时, 有明显的缺陷。而“允许偏移系数”由图 3 中的“实际的偏移区域”的边界来确定, 可以描述为“在既定的规格区域内, 过程实际分布中心允许偏移的程度”, 允许偏移系数应不受规格区域的形状的影响。如果过程实际分布中心  $\mu$  与目标值  $\mu_0$  重合, 其允许偏移系数应该为 1; 如果过程实际分布中心  $\mu$  已经处于规格区域的边界上, 其允

许偏移系数应该为 0。

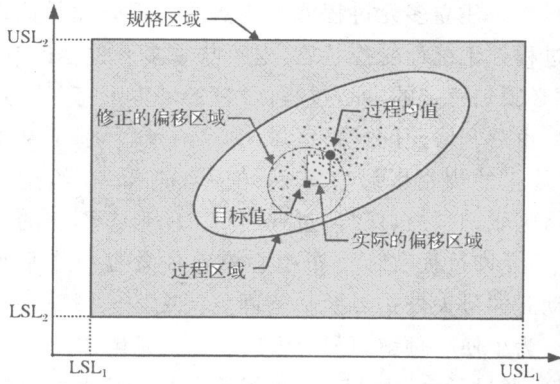


图 3 基于 Taam 算法的修正的偏移区域

### 5 对 Taam 算法的改进

如前所述, 当  $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ , 其在置信度  $1 - \alpha$  下的椭球体为  $\{X | (X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) \leq \chi^2_{1-\alpha}(p)\}$ 。

定义  $\prod_{i=1}^p [LPL_i, UPL_i]$  为以  $\{X | (X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) \leq \chi^2_{1-\alpha}(p)\}$  为内切椭球体的长方体, 并称其为多元过程  $X$  的“修正的过程分布区域”, 其体积为  $V_{MP}$

$= \prod_{i=1}^p (UPL_i - LPL_i)$ 。这里,  $UPL_i$  和  $LPL_i (i = 1, 2, \dots, p)$  的计算公式为:

$$\begin{cases} UPL_i = \mu + \left[ \frac{\chi^2_{1-\alpha}(p) | \sum_i^{-1} |}{| \sum^{-1} |} \right]^{\frac{1}{2}} \\ LPL_i = \mu - \left[ \frac{\chi^2_{1-\alpha}(p) | \sum_i^{-1} |}{| \sum^{-1} |} \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $\Sigma^1$  表示从  $\Sigma^{-1}$  中删除第  $i$  行和  $i$  列得到的矩阵,  $| \Sigma^1 |$  和  $| \Sigma^{-1} |$  分别表示  $\Sigma^1$  和  $\Sigma^{-1}$  的行列式。

为了便于理解, 仍以图 1 中的二元生产过程为例建立示意图, 见图 4。将图 2 和图 4 结合在一起可以直观地看出, 对于同一个二元过程  $X$  而言, 两个图形中的阴影部分的体积是完全相等的。

基于上述分析, 可以得到图 2 中的“修正的规格区域”的体积为  $V_{MS}^* = V_S - [V_{MP} - V_P(1 - \alpha)]$ , 即

$$V_{MS}^* = \prod_{i=1}^p (USL_i - LSL_i) - \prod_{i=1}^p (UPL_i - LPL_i) + \frac{[\chi^2_{1-\alpha}(p)]^{\frac{p}{2}} | \sum |^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(p/2 + 1)} \quad (9)$$

由此可得多元过程  $X$  的过程能力指数为  $MC_p^*$

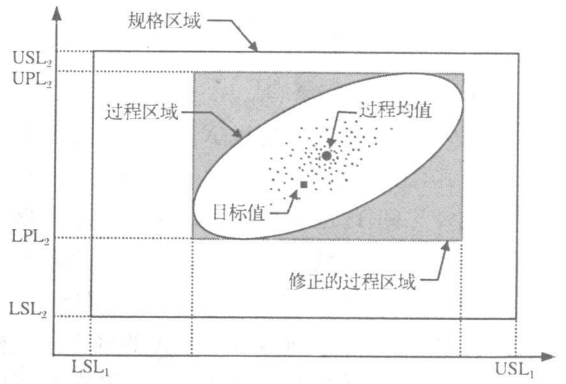
$$= \left[ \frac{V_{MS}^*}{V_P(1 - \alpha)} \right]^{\frac{1}{p}}, \text{ 即}$$


图 4 规格区域及修正的过程区域

$$MC_p^* =$$

$$\left\{ \frac{\left[ \prod_{i=1}^p (USL_i - LSL_i) - \prod_{i=1}^p (UPL_i - LPL_i) \right]}{[\Gamma(p/2 + 1)]^{-1} [\chi^2_{1-\alpha}(p)]^{\frac{p}{2}} | \sum |^{\frac{1}{2}}} + 1 \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (10)$$

定义  $C_{pM} = \left[ \frac{\prod_{i=1}^p (USL_i - LSL_i)}{\prod_{i=1}^p (UPL_i - LPL_i)} \right]^{\frac{1}{p}}$ , 结合公式

(8), 有  $C_{pM} = \frac{\left[ \prod_{i=1}^p (USL_i - LSL_i) | \sum_i^{-1} |^{-\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{p}}}{2[\chi^2_{1-\alpha}(p) | \sum |]^{\frac{1}{2}}}$ 。

当  $C_{pM} = 1$  时, 表示修正的过程区域的体积正好等于规格区域的体积。

事实上,  $C_{pM}$  也是一个多元过程能力指数, Shahiari 将其作为多元过程能力向量表示方法的第一分量进行了研究<sup>[3, 4, 6]</sup>。将  $C_{pM}$  代入公式(10)可得

$$MC_p^* = \left[ \left( \frac{4}{\pi} \right)^{\frac{p}{2}} | \sum |^{\frac{p-1}{2}} \Gamma(p/2 + 1) (C_{pM}^p - 1) \prod_{i=1}^p \left[ | \sum_i^{-1} |^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^{\frac{1}{p}} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (11)$$

从公式(11)可以看出, 过程能力指数  $MC_p^*$  与  $C_{pM}$  具有同向变化的特征, 并且当  $C_{pM} = 1$  时, 则有  $MC_p^* = 1$ 。但基于 Taam 算法的  $MC_p$  与  $C_{pM}$  之间并不存在类似的关系。分析表明  $MC_p^*$  具有比  $MC_p$  更好的性质, 能够更有效地刻画多元过程的潜在过程能力指数的大小。

进一步地, 考虑到过程分布中心  $\mu$  对目标值  $\mu_0$  的偏离, 需要对上述过程能力指数进行调整。为此, 定义允许偏移系数  $\theta_M$  为:

$$\theta_M = \left[ \prod_{i=1}^p \left( 1 - \frac{|2\mu - (USL_i + LSL_i)|}{USL_i - LSL_i} \right) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (12)$$

由此可得实际过程能力指数  $MC_{pm}^* = \theta_M MC_p^*$ ,

即

$$MC_{pm}^* = \left\{ \prod_{i=1}^p \left( 1 - \frac{|2\mu_i - (USL_i + LSL_i)|}{USL_i - LSL_i} \right) \times \left[ \left[ \frac{4}{\pi} \right]^{\frac{p}{2}} |S|^{-\frac{p-1}{2}} \Gamma(p/2 + 1) (C_{pM}^p - 1) \prod_{i=1}^p \left[ \sum_i^{-1} | \frac{1}{2} + 1 \right] \right] \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (13)$$

以上分析假设  $X$  服从  $\mu$  和  $\Sigma$  已知的正态分布  $N_p(\mu, \Sigma)$ 。当  $\mu$  和  $\Sigma$  未知时,要利用  $X$  的样本信息估计有关参数,取  $\mu = \bar{X}, \Sigma = S$ ,得到  $MC_p^*$  和  $\theta_M$  的估计值分别为:

$$MC_p^* = \left[ \left[ \frac{4}{\pi} \right]^{\frac{p}{2}} |S|^{-\frac{p-1}{2}} \Gamma(p/2 + 1) (C_{pM}^p - 1) \prod_{i=1}^p |S_i^{-1}|^{\frac{1}{2} + 1} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (14)$$

$$\theta_M = \left[ \prod_{i=1}^p \left( 1 - \frac{|2\bar{x}_i - (USL_i + LSL_i)|}{USL_i - LSL_i} \right) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (15)$$

其中,  $C_{pM}$  表示  $C_{pM}$  的估计值。进一步地,得到实际过程能力指数  $MC_{pm}^*$  的估计值为:

$$MC_{pm}^* = \left\{ \prod_{i=1}^p \left( 1 - \frac{|2\bar{x}_i - (USL_i + LSL_i)|}{USL_i - LSL_i} \right) \times \left[ \left[ \frac{4}{\pi} \right]^{\frac{p}{2}} |S|^{-\frac{p-1}{2}} \Gamma(p/2 + 1) (C_{pM}^p - 1) \prod_{i=1}^p |S_i^{-1}|^{\frac{1}{2} + 1} \right] \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (16)$$

显然,当多元过程  $X$  的目标值  $\mu_0$  与实际分布中心  $\bar{X}$  完全一致时,  $\theta_M = 1$ , 这时  $MC_{pm}^* = MC_p^*$ 。

### 6 数值算例

为了比较基于 Taam 算法的多元过程能力指数与基于本文改进的算法的实际效果,如下以 Jackson 的一个经典案例<sup>[3,6]</sup>的数据为例,对基于 Taam 算法和基于本文算法的多元过程能力指数的计算结果进行对比分析。Jackson 的案例讨论了影响胶片生产质量的两个关键质量特性 Elon 和 Hydroquinone 的联合控制问题,共采集了 75 个连续样本,并计算了相应的统计量。

如下用  $X = (x_1, x_2)'$  表示由 Elon 和 Hydroquinone 组成的二元过程,规定 Elon 的规格为 [235, 295], Hydroquinone 的规格为 [440, 500], 两

者共同构成了目标值为  $\mu_0 = (265, 470)'$  的一个矩形区域。 $X$  的样本均值向量为  $\bar{X} = (264.32, 471.48)'$ , 样本协方差矩阵为  $S = \begin{pmatrix} 102 & 65 & 68.87 \\ 68.87 & 107.96 \end{pmatrix}$ , 且有  $|S| = 6339.02$ 。如上计算结果可利用示意图 5(a) 和 (b) 直观地展示出来。

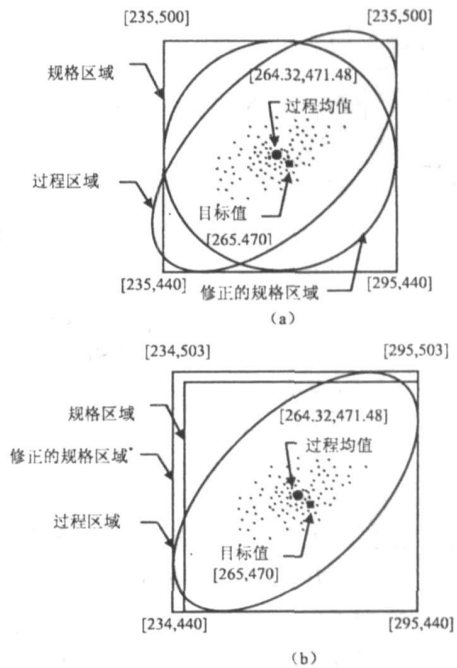


图 5 Jackson 二元过程的规格区域及过程区域

经计算得  $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0.017 & -0.011 \\ -0.011 & 0.016 \end{pmatrix}$ , 相应有  $S_1^{-1} = 0.016, S_2^{-1} = 0.017$  且  $|S^{-1}| = 1.58 \times 10^{-4}$ 。由此可分别算出上述 2 组过程能力指数。

#### (1) 基于 Taam 算法的过程能力指数

由于两个特性的规格长度均为 60, 因此规格区域构成一个正方形, 则修正的规格区域为半径为 30 的圆。取置信水平  $\alpha = 0.01$ , 则有

$$MC_p = \frac{\prod_{i=1}^2 (USL_i - LSL_i)}{[4 \times 0.99(2)]^{\frac{2}{2}} |S|^{\frac{1}{2}}} = \frac{60 \times 60}{4 \times 9.21 \times 6339.02^{0.5}} = 1.227$$

$$D = \left[ 1 + \frac{n}{n-1} (\bar{X} - \mu_0) S^{-1} (\bar{X} - \mu_0)' \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ 1 + \frac{75}{74} \times 0.0652 \right]^{0.5} = 1.033$$

则该 Jackson 二元生产过程的实际过程能力指数为  $MC_{pm} = \frac{MC_p}{D} = \frac{1.227}{1.033} = 1.189$ 。

#### (2) 基于本文算法的过程能力指数

对于  $C_{pm}$ , 取置信水平  $\alpha = 0.01$ , 有

$$C_{pm} = \frac{\left[ \prod_{i=1}^2 (USL_i - LSL_i) \mid \sum_i^{-1} \mid^{-\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}}{2 \sqrt{\chi^2_{-\alpha}(2) \mid \sum \mid J^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= \frac{[(60 \times 0.016^{0.5}) \times (60 \times 0.017^{0.5})]^{0.5}}{2 \times (9.21 \times 6339.02)^{0.5}}$$

$$= 0.96$$

进而, 有

$$MC_p^* = \left[ \left( \frac{4}{\pi} \mid \sum \mid^{\frac{1}{2}} \Gamma(2/2 + 1) (C_{pm}^2 - 1) \right. \right. \\ \left. \left. \prod_{i=1}^2 \mid \sum_i^{-1} \mid^{\frac{1}{2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \left[ \frac{4}{3 \times 1416} \times 6339.02^{0.5} \times \right. \\ \left. (0.96^2 - 1) \times (0.016 \times 0.017)^{0.5} + 1 \right]^{0.5} = 0.983$$

且有

$$\theta_M = \left[ \prod_{i=1}^2 \left( 1 - \frac{\mid 2\bar{x}_i - (USL_i + LSL_i) \mid}{USL_i - LSL_i} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[ \left( 1 - \frac{\mid 2 \times 264.32 - 530 \mid}{60} \right) \right. \\ \left. \left( 1 - \frac{\mid 2 \times 471.48 - 940 \mid}{60} \right) \right]^{0.5} = 0.929$$

由此, 基于本文算法的 Jackson 二元过程的实际过程能力指数为  $MC_{pm}^* = \theta_M MC_p^* = 0.929 \times 0.983 = 0.913$

以上计算结果见表 1。从图 5 的 (a) 和 (b) 不难看出, Jackson 二元过程的实际分布范围已经超过了给定的规格区域, 从直观上判断, 该二元过程的过程能力指数应该小于 1, 但是表 1 中基于 Taam 算法的过程能力指数  $MC_{pm}$  明显大于 1, 表明 Taam 算法比较冒进, 确实存在较大的问题。而基于本文改进算法的过程能力指数  $MC_{pm}^*$  则略小于 1, 比较符合实际, 计算结果更为可靠。

表 1 两种算法的计算结果的比较

算法	Taam 算法		本文改进的算法			
	$MC_p$	$D$	$MC_{pm}$	$MC_p^*$	$\theta_M$	$MC_{pm}^*$
估计值	1.227	1.03	1.189	0.983	0.929	0.913

### 7 结语

多元过程能力指数的算法研究是多元统计过程控制技术应用研究的重要方向之一。由于多元过程的复杂性, 先后出现了基于向量表示的 Shahriari 算法、基于合格率原理的 Chen 算法、基于椭圆规格的算法和基于体积比的 Taam 算法等多元过程能力指数的不同算法。这些不同算法的适用性因各自假设条件的不同而存在较大的差异。本文对基于体积比的多元过程能力指数的 Taam 算法的研究表明:

Taam 算法由于“修正的规格区域”的界定存在不足, 加之“修正系数”的概念未能充分考虑多元过程的不同维度的规格范围和实际分布范围的相关信息, 实际的计算结果偏于冒进, 不能客观反映多元过程满足顾客要求的能力, 在实际应用中存在较大问题。本文改进的算法通过重新界定“修正的规格区域”和提出“允许偏移系数”的概念, 有效地解决了 Taam 算法中存在的计算结果过于冒进的问题。数值算例的实际计算结果表明, 本文的改进算法确实比 Taam 算法更科学, 所提出的多元过程能力指数是一个更合理、也更具一般性的多元过程能力定量评价方法。

本文的研究结果适用于定量评价多元生产过程满足顾客要求的程度。这些生产过程应该服从或者近似服从正态分布, 而且顾客要求通常表现为长方体(形)的规格区域。尽管这两项假设条件对于绝大多数多元生产过程而言是可以满足的, 但实践中确实存在许多无法满足这两项假设条件的其他多元生产过程, 如何将本文的研究结果拓展到更为一般的情形, 如具有椭圆(形)规格多元生产过程, 是值得我们进一步研究的方向。另外, 对于具有非长方体(形)规格区域的多元生产过程而言, 即使本文提出的计算方法是完全适用的, 但“修正的规格区域”和“允许偏移系数”的定性描述与定量计算将因不同过程规格区域形状得不同而变得非常复杂, 如何给出通用性的计算公式也是需要进一步探讨的问题。

### 参考文献:

- [1] Samuel Kotz, Norman L. Johnson. Process Capability Indices: A Review 1992~ 2000 [J]. Journal of Quality Technology, 2002, 34(1): 2- 19.
- [2] Taam W, Subbaiah P, Liddy J W. A Note on Multivariate Capability Indices [J]. Journal of Applied Statistics, 1993, 20: 339- 351.
- [3] F. K. Wang, John D. Miskulin, Hamid Shahriari, Comparison of Three Multivariate Process Capability Indices [J]. Journal of Quality Technology, 2000, 32(3): 263- 275.
- [4] 钱仲侯, 王成斌, 孟玉珂. 多元质量控制 [M]. 北京: 中国铁道出版社, 1995.
- [5] José M. Bernardo, Telba Z. Irony. A General Multivariate Bayesian Process Capability Index [J]. The Statistician, 1996, 12: 1- 16.
- [6] 蒋家东, 冯允成, 商广娟. 多元过程能力指数计算方法的比较研究 [J]. 航空标准化与质量, 2006, 3: 16- 20.

- [7] 马义中. 减小和控制多元质量特性波动的理论和方法 [D]. 西安: 西北工业大学, 2002.
- [8] Norma F. Hubele, Abdelaziz Berrado, Esma S. Gel. A Wald Test for Comparing Multiple Capability Indices [J]. *Journal of Quality Technology*, 2005, 37(4): 304 - 307.
- [9] 蒋家东, 商广娟. 多特性工业过程的质量诊断与控制技术 [R]. 北京: 中国航空综合技术研究所, 2005.
- [10] E. J. Foster, R. R. Barton, N. Gautam, L. T. Truss, J. d. Tew. The Process-oriented Multivariate Capability Index [J]. *Internal Journal of Production Research*, 2005, 43(10): 2135- 2148.

## Improvement on Taam Algorithm of Multivariate Process Capability Index Based on the Ratio of Volume

JIANG Jia dong<sup>1,2</sup>, FENG Yun cheng<sup>2</sup>, ZHAO Han ping<sup>3</sup>

(1. China Aero Poly-Technology Establishment, Beijing 100028, China;

2. School of Economic and Management, Beihang University, Beijing 100083, China;

3. College of Resources Science and Technology, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

**Abstract:** With the wide application of multivariate statistical process control techniques, extensive attentions have been paid to the quantitative calculation of multivariate process capability indices. It has been relatively difficult to calculate the multivariate process capability indices, considering the complexity of multivariate processes. None of the existing calculation methods is of universal applicability. This paper firstly reviews and analyses recent literatures on multivariate process capability indices. Secondly, it focuses on Taam algorithm of multivariate process capability index based on the ratio of volume, profoundly discusses its main disadvantages and puts forward an improved algorithm. Finally, it comparatively analyzes the improvement effect of the new algorithm of process capability index by making use of the classic case from Jackson's bivariate process. The calculation results show that Taam algorithm has internal defects and our improved algorithm is more reliable

**Key words:** process capability; multivariate normal distribution; multivariate process capability index