

文章编号: 1003-207(2008)06-0041-05

一类产品质量成本优化问题的研究

余福茂¹, 王富忠², 沈祖志³

(1. 杭州电子科技大学管理科学与信息工程研究所, 浙江 杭州 310018;

2. 浙江科技学院经管学院, 浙江 杭州 310023; 3. 浙江大学管理学院, 浙江 杭州 310058)

摘要: 在生产实际中, 工艺指标往往难以精确控制在某一具体数值上, 据此提出了针对质量控制范围决策的质量成本优化问题。以电石产品质量成本优化为应用背景, 定义了基于边际分析思想的质量成本函数, 建立了基于质量指标控制范围决策的非线性规划形式的质量成本优化模型, 给出了模型的求解思路, 并通过实际数据进行验证, 该方法比传统质量管理策略具有较大程度的改进。

关键词: 最佳质量成本; 质量成本函数; 优化; 非线性规划

中图分类号: F273.1; F224 **文献标识码:** A

1 引言

自20世纪50年代初质量成本概念提出以来, 关于最优质量成本及质量成本优化模型的研究吸引了众多学者的兴趣。Juran(1951)将质量成本分为质量控制成本和瑕疵损失成本两部分, 并以经济学中的边际成本概念来分析最优质量成本^[1], 成为后来研究的基础。Porteus(1986)从产品质量与生产经济性关系角度对质量成本模型(COQ)的研究^[2], 以及Taguchi(1986)提出的质量损失函数(QLF)^[3]是早期关于质量成本优化的代表性成果, 分别成为质量成本优化研究的重要分支领域, 并至今仍产生重要影响。

早期研究所提出的质量成本曲线只是定性的描述了质量成本各组成要素间的关系, 为最低点的求解提供了思路。随着经济的发展, 这种模型日益暴露出缺陷, 近年来的许多研究结论都证明了早期关于最佳质量均衡点的认识和寻找方法并不正确。随着6Sigma质量管理方法的成功案例不断增多, 研究者重新审视了传统的COQ模型。Miller和Morris假设质量成本为质量水平的凸函数, 同时假设收益在一定范围内为质量水平的增函数, 使用边际分析方法进行质量成本优化^[4]。Chiadamrong(2003)建立了描述质量成本曲线的经验模型, 其质量成本

包括传统PAF成本和隐性机会成本, 目的在于帮助生产者清楚地了解产品质量成本全貌^[5]。Freiesleben(2004, 2005)认为企业经营的目标是收益最大化而非成本最小化, 因此应该从企业收益最大化的角度来研究最佳质量水平^[6,7]。近来, 还有一些学者则从供应链质量成本^[8]、“经济”质量损失^[9]等角度对质量成本优化进行研究。

我国学者关于质量成本优化问题也做了深入研究。虞镇国(1998)、白宝光和张世英(2005)分别对传统质量成本优化观点的正确性提出质疑^[10,11]。王培欣和刘桑伟(2006)阐述了根据不同的资料利用统计分析所建立的投入与损失成本曲线是不同的, 因而最低点的位置未必在早期质量成本控制模型所描述的两条曲线的交点位置^[12]。赵云辉、孙振和白宝光(2006)从利润最大化角度出发, 通过比较龚珀茨曲线和柯布-道格拉斯函数模拟质量成本的优劣, 从而选择更加适宜的质量成本曲线^[13]。潘尔顺和李庆国(2005)改进了田口损失函数, 在持有成本和准备成本基础上, 考虑返工、返修及质量损失成本, 建立了综合的成本模型^[14]。

注意到在以往关于质量成本优化的研究中, 其决策变量是针对质量控制“点”而设立。然而在实际控制中时, 由于各种干扰的影响, 决定质量的有关生产工艺指标往往很难控制在一点上, 而只能控制在某一范围内, 从而质量指标也只能相应地控制在某范围内。此时, 关于质量成本的优化, 将归结为基于生产工艺指标实际执行值分布的特点, 针对质量指标控制范围决策的质量成本优化问题。在理论上这

收稿日期: 2008-06-20; 修订日期: 2008-11-21

作者简介: 余福茂(1975-), 男(汉族), 山西应县人, 杭州电子科技大学管理科学与信息工程研究所, 副教授, 管理学博士, 研究方向: 决策优化、物流与供应链管理。

是一个非常值得探讨的重要问题。

2 实际背景

在重要的基础化工产品电石的生产过程中,其生产设备是电极炉,每一炉的产品由于其工艺特性会同时存在不同等级品,如一级品、二级品等,某电石厂由于质量管理比较严格,不存在二级以下产品。

对该厂 575 炉电石生产数据的统计分析后发现,当每炉所产电石的一项重要工艺指标:发气量(单位重量电石注水后所产乙炔气量)高时,其二级品率就低,相应一级品率就高。由于二级品售价明显低于一级品售价,故产品的单位收入也高。然而,此时其原料、动力的单耗也高,从而产品的单位变动成本也高。经统计分析还发现,作为只能控制在一定范围内的工艺指标(发气量),其实际执行值往往服从正态分布。随着该厂控制水平的提高,虽然该指标控制范围有所缩小,但是并不可以近似为具体的控制点。由此看来,对质量指标(二级品率)控制范围的选择,宜直接从工艺指标(发气量)控制范围的选择入手,再转换成质量指标的控制范围。

当工艺指标控制范围的长度按现有控制水平初步确定后,对质量指标(二级品率)控制范围的选择,就有两种决策视角:

视角 1: 从保证低二级品率的视角(即高质量视角)来选择质量指标控制范围。

视角 2: 从质量成本极小化的视角来选择质量指标控制范围。即依据与质量控制指标相关的工艺指标实际执行值分布的统计规律,在保证质量控制指标均值达标的前提下,使得质量成本均值极小化的视角来选择。

该厂原来是按高质量视角来选择质量控制范围的,以保证该厂电石产品质量全国领先的水平。同时,该厂也希望我们从质量成本均值极小化的视角来进行探索,这就成为本文研究的实际背景。

3 基于质量控制范围决策的质量成本优化模型构建

以上实际背景中基于质量成本均值极小化的质量指标控制范围选择,正是本文引言中提出的一类新的质量成本优化问题的具体化。在构建这类基于质量控制范围决策的质量成本优化模型时,显然更宜按传统质量成本优化模型的观点,首先构建质量总成本函数。

3.1 质量成本函数的构建

根据近期历史统计数据,将工艺控制指标实际执行值的取值范围 $[x_1, x_2]$ 划分为 n 个子区间,每个子区间的长度为 $(x_2 - x_1)/n_0$ 。记 x_i 为子区间 i 内工艺控制指标实际执行值的均值, $i = 1, 2, \dots, n$; y_i 为子区间 i 内产品质量指标均值, $i = 1, 2, \dots, n$; k 为产品质量等级,按等级从高到低顺序排序,不妨取 $k = 1, 2$; p_k 为 k 级产品售价, $k = 1, 2$, 且 $p_1 > p_2$; F_i 为子区间 i 内原料的单位变动成本均值, $i = 1, 2, \dots, n_0$ 。

首先,根据数组 (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, 基于回归分析,得到平均二级品率 (y) 与工艺控制指标 (x) 的经验公式:

$$y = y(x) \tag{3.1}$$

于是,产品的单位收益函数为:

$$P(x) = p_1(1 - y(x)) + p_2y(x) \\ = p_1 - (p_1 - p_2)y(x) \tag{3.2}$$

再根据数组 (x_i, F_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, 基于回归分析得原料平均单位变动成本 F 与工艺控制指标 x 的经验公式:

$$F = F(x) \tag{3.3}$$

于是,与 x 相关的产品单位边际贡献为:

$$c(x) = P(x) - F(x) \tag{3.4}$$

当从(3.4)式中分解出

$$c(x) = G - z(x)$$

其中, G 为大于 0 的常量,则 $z(x)$ 即为本问题的质量总成本函数。

3.2 优化模型的构建

记 f_i 为工艺控制指标实际执行值落在前述范围 $[x_1, x_2]$ 之第 i 个子区间的频率, $i = 1, 2, \dots, n$; xx 为产品质量指标均值的控制上限; x_0 为工艺指标控制范围的“起点”(决策变量); H 为工艺指标控制范围的“长度”(按控制水平确定的参量)。

将工艺指标控制范围 $[x_0, x_0 + H]$ 也划分为 n 个长度为 H/n 的子区间,为简化起见,取 $x'_h = x_0 + (2h - 1)H/(2n)$, 即子区间 h 的中值, $h = 1, 2, \dots, n$ 。记 f_h 为 x'_h 在子区间 h 取值的频率, $h = 1, 2, \dots, n$; $\bar{y}(x_0)$ 为 $[x_0, x_0 + H]$ 内产品质量指标均值; $\bar{z}(x_0)$ 为 $[x_0, x_0 + H]$ 内产品质量总成本均值。于是,

$$\bar{y}(x_0) = \sum_{h=1}^n f_h y(x_0 + (2h - 1)H/(2n)) \tag{3.5}$$

$$\bar{z}(x_0) = \sum_{h=1}^n f_h z(x_0 + (2h - 1)H/(2n)) \tag{3.6}$$

从而基于质量控制范围决策的质量成本优化模型可用如下非线性规划 (简记 NLP) 描述:

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{h=1}^n f_h z (x_0 + (2h-1)H/(2n)) \\ \text{s. t.} \\ \sum_{h=1}^n f_h y (x_0 + (2h-1)H/(2n)) &\leq x_1 \quad (1) \\ x_1 &\leq x_0 \leq x_2 - H \quad (2) \end{aligned}$$

根据该模型仅一个决策变量和其约束条件简单的特点, 可采用如下十分简单的算法来求得 (NLP) 的最优解:

在区间 $[x_1, x_2 - H]$ 的范围内, 以 \bar{z} 极小化为目标, 采用黄金分割法直接搜索满足约束条件 (1) 的 x_0 , 直至达到规定的搜索精度。

在求得工艺指标“最佳”控制范围 $[x_0^*, x_0^* + H]$ 后, 再由 (3.1) 式求得质量指标的“最佳”控制范围。

4 应用情况及分析

4.1 基础数据分析

针对前述实际背景, 根据实际生产数据 (表一), 通过回归分析得到 (3.1) 式和 (3.3) 式的具体描述, 显然是很重要的基础工作。

表 1 575 炉电石生产数据

发气量 x_i	平均变动成本 $F(x_i)$	二级品率 y_i
290	990	0.7103
300	1080	0.2308
305	1105	0.1377
310	1180	0.0776
315	1225	0.0478
320	1275	0.0306
330	1370	0.0143

由表一可绘制 x_i 和 F_i 的散点图, 发现 F_i 与 x_i 有很好的线性相关关系, 故基于数组 (x_i, F_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, 通过线性回归可得单位变动成本 F 与发气量的经验公式:

$$F(x) = 9.66x - 1817 \quad (4.1)$$

关于 $y_i (y_i < 1)$ 与发气量 $x_i (x_i > x_1)$ 的散点图则如图 1 所示:

从图 1 中不难发现 y_i 与 x_i 有“双曲型”的非线性关系。进一步分析可以发现: 当 $x_i \rightarrow \infty$ 时, $y_i \rightarrow 0$; 当 $x_i \rightarrow k$ 时, $y_i \rightarrow 1$ 。这里, k 的具体含义是, 当产品的二级品率为 100% (即一级品率为 0) 时, 电石的“临界发气量”。虽然 k 未知, 但根据实际数据的变化趋势有: $275 < k < 285 < x_1$ 。

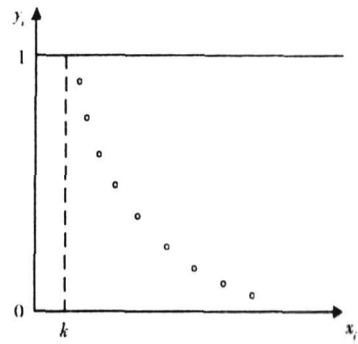


图 1 y_i 与 x_i 散点图

于是, 可设 y_i 与 x_i 的非线性关系由如下经验公式描述:

$$y = B / ((x - k)^A + B) \quad (4.2)$$

$(A > 0, B > 0; 275 < k < 285)$

若按最小二乘法原理, 直接基于数组 (x_i, y_i) 来求解 (4.2) 式的回归系数 A, B, K , 将涉及较困难的非线性方程组的求解, 而且所求得的回归系数也未必满足 (4.2) 式的要求。

于是, 不妨将 (4.2) 式转化为:

$$1/y - 1 = (x - k)^A / B \quad (4.3)$$

由于 $y < 1, x > k$, 故对 (4.3) 式两边取对数得:

$$\ln(1/y - 1) = A \ln(x - k) - \ln B \quad (4.4)$$

若 k 已知, 记 $u = \ln(1/y - 1)$, $v = \ln(x - k)$, $a = A$, $b = -\ln B$, 则 (4.4) 式简化为:

$$u = av + b \quad (4.5)$$

取 $u_i = \ln(1/y_i - 1)$, $v_i = \ln(x_i - k)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则基于数组 (u_i, v_i) 即可通过线性回归求得 a, b 。从而, $A = a$, $B = e^{-b}$ 。

虽然实际上 k 是未知的, 然而通过上述线性化的分析, 则显然可采取基于黄金分割法在 (275, 285) 范围内对 k 的搜索与线性回归相结合的迭代算法, 来求出上述回归系数。

实际求解得 $k = 276.21, A = 3.777, B = 50111$, 而且拟合效果很好, 其相关系数达 0.99。

4.2 质量总成本的构建

由于电石的一、二级产品的售价分别为 $p_1 = 2800$ 元/吨, $p_2 = 2100$ 元/吨。再将 4.1 节中所求得的回归系数代入 (4.2) 式, 这样由 (3.2) 式所给出的产品单位收益函数可具体描述如下:

$$P(x) = 2800 - \frac{3507700}{(x - 276.21)^{3.777} + 50111} \quad (4.6)$$

从而由 (4.1) 式和 (4.6) 式, 将 (3.4) 式所给出的

产品单位边际贡献, 具体描述为:

$$c(x) = 4617 - \frac{3507700}{(x - 276.21)^{3.777} + 50111} - 9.66x \quad (4.7)$$

于是电石的质量总成本函数即为:

$$z(x) = \frac{3507700}{(x - 276.21)^{3.777} + 50111} + 9.66x \quad (4.8)$$

4.3 电石质量指标最佳控制范围求解与分析

根据在[290, 330]范围内发气量历史数据, 基于步长 2, 所划分子区间对频数的统计, 求得 $f_i (i = 1, 2, \dots, 20)$, 取 $H = 10$, $xx = 305$, 并将(4.8)式代入(NLP), 求解(NLP)后, 得到发气量工艺指标 x 的最佳控制范围为[300.38, 310.38], 由(4.2)式, 即得其对应质量指标(电石二级品率)的控制范围为[0.231, 0.0478]。

由(3.6)式可得, 此时质量指标均值为 $\bar{y}(300.38) = 305.38$ 。由(3.6)式可得, 此时产品单位边际贡献均值 $\bar{z}(300.38) = 1658.1$ (元/吨)。

若采用厂方原来按追求“零瑕疵”的高质量视角, 取工艺指标 x 的控制范围为[315, 325]。即质量指标控制范围为[0.0477, 0.0206]。则有 $\bar{y}(315) = 320$, $\bar{z}(315) = 1523.7$ (元/吨)。

注意到此时, $\bar{z}(300.38) - \bar{z}(315) = 34.4$ (元/吨)。按该厂年产电石 3.6 万吨计, 采用“最优质量成本”控制方案, 将比原方案年增收益 123.84 万元。这就说明, 针对这一实际背景, 片面追求高质量水平显然是不可行的。

5 结语

本文针对电石产品生产实践中的工艺指标控制问题, 基于边际分析的思想, 构建了质量控制范围决策问题的质量成本函数和质量成本优化模型, 并建议用黄金分割法求得质量指标控制范围。实践应用效果表明, 对于工艺控制指标与质量、收益指标之间变动关系有规律可循的质量指标(或工艺指标)控制范围决策问题, 所给出的优化思路和方法是可行的。

注意到本文的实际背景具有一定的广泛性, 例如在纯碱的生产过程中, 其产品中杂质(盐)的含量是一个重要的综合性工艺指标, 实际执行值的分布也具有一定的统计规律, 为保证产品合格对盐含量有严格的控制。经统计分析发现, 在产品的合格品中, 当盐含量降低, 将使优质品率提高, 从而使其质量指标——非优质品率降低。由于盐是包含在销售

产品中, 故此时产品的收益率也降低。然而, 非优质品的售价明显低于优质品的售价, 这就对产品的销售收入产生微妙的影响。同时要使含盐量降低, 又需多消耗蒸汽, 从而增加成本。显然此时仍然需按传统质量成本优化理论来构建质量总成本函数, 然后基于第 3 节中所给出的优化模型(NLP)来求得“最佳”质量控制范围。同样, 从优化结果看, 针对此实际背景, 片面追求“高质量”仍然不可行。这就表明零瑕疵质量管理学派的理论假设并不符合这类实际问题的。因此, 对质量成本研究的各种理论“适用性”问题, 值得进一步深入研究, 这将有利于理论对实践的有效指导。

参考文献:

- [1] Juran, J. M. Quality Control handbook [M]. New York: McGraw Hill, 1951.
- [2] Porteus, E. L. Optimal lot-sizing, process quality improvement and setup cost reduction [J]. Operations Research, 1986, 34 (1): 137- 144.
- [3] Taguchi, G.. Introduction to Quality Engineering: Designing Quality into Products and Processes [M]. Asian Productivity Organization, Tokyo, Japan, 1986.
- [4] Miller, J. R., Morris, J.S. Is Quality Free or Profitable [J]. Quality Progress, 2000, 33 (1): 50- 53.
- [5] Chiadam rong, N. The development of an economic quality cost model [J]. Total Quality Management & Business Excellence, 2003, 14(9): 999- 1014.
- [6] Freiesleben, J. On the limited value of cost of quality models [J]. Total Quality Management & Business Excellence, 2004, 15(7): 953- 963.
- [7] Freiesleben, J. The economic effects of quality improvement [J]. Total Quality Management & Business Excellence, 2005, 16(7): 1- 8.
- [8] Srivastava, S. K. Towards estimating Cost of Quality in supply chains [J]. Total Quality Management & Business Excellence, 2008, 19(3): 193- 208.
- [9] Freiesleben, J. A proposal for an economic quality loss function [J]. International Journal of Production Economics, 2008, 113: 1012 - 1024.
- [10] 虞镇国. 质量成本模式的缺陷 [J]. 系统工程理论与实践, 1998, (9): 139- 141.
- [11] 白宝光, 张世英. 质量成本模型及其优化 [J]. 科学管理研究, 2005, 23(3): 29- 31.
- [12] 王培欣, 刘桑伟. 质量成本控制模型比较研究. 哈尔滨工业大学学报(社会科学版), 2006, 8(5): 98- 102.
- [13] 赵云辉, 孙振, 白宝光. 基于利润最大化的质量成本数学模型的研究 [J]. 内蒙古工业大学学报(自然科学版), 2006, 25(1): 76- 80.
- [14] 潘尔顺, 李庆国. 田口损失函数的改进及在最佳经济生

产批量中应用[J], 上海交通大学学报, 2005, 39(7):

1119- 1122.

Study on Quality Cost Optimizing Problem

YU Fu mao¹, WANG Fu zhong², SHEN Za zhi³

(1. Institute of Management Science & Information Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China;

2. School of Economics & Management, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China;

3. Management School, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

Abstract: In the real production, process indices are often difficult to be controlled at some certain values, based on which the problem of optimization for quality cost control is put forward to the decision-making for quality control scope. For example, a quality cost function is defined based on marginal analysis for the applications of optimization for quality cost control of calcium carbide products. Thus the optimization for their quality cost is modeled with the nonlinear programming method founded on the decision-making for quality control scope. The solution of the proposed model is deduced and verified by effective data further, which indicates that the proposed method is better improved than ever.

Key words: quality cost; quality cost function; optimizing