文章编号: 1003- 207(2008)06- 0082- 05

投资项目集合选择问题的非线性规划模型与解法研究

解百臣, 吴育华, 杨顺元

(天津大学管理学院, 天津　300072)

摘　要: 基于项目集合选择问题的定义, 给出了项目集合选择问题求解的一般步骤。依据投资方案组合选择问题的非线性特性, 构建了投资项目集合选择问题的非线性规划模型, 在此模型的基础上提出了基于外点法求解此类问题的改进贪婪搜索算法。研究了采用 surrogate 松弛模型确定初始点和运用改进的贪婪算法搜索最优解的具体实现方法, 给出了实现算法的具体步骤。

关键词: 投资项目集合选择; 非线性; surrogate 松弛模型; 改进的贪婪搜索算法

中图分类号: C931　　文献标识码: A

1　引言

在许多决策问题中, 决策者需要从备择项目集合中选择一组而不是一个项目, 这一类问题被称为项目集合选择问题或称为方案集合选择问题。对于可以简化为线性问题的项目集合选择问题的建模和解法研究, 目前的研究成果已经比较成熟。但对于具有非线性目标函数的项目集合选择问题目前的研究成果仍然比较少。

在应用项目集合选择理论求解许多实际问题, 尤其是投资决策领域的实际问题时, 常常需要考虑这样一种情况。虽然已经将一定的项目组合列入投资计划, 但是由于客观条件如财力、人力及其他资源的限制, 这些项目不能被同时实施, 而只能按照一定的实施次序顺序进行, 这就是在非线性项目集合选择问题中最为普遍的是投资项目集合选择问题。通常这一类问题中, 对于决策者来说, 最为关注的并不是项目收益的原值, 而是项目收益的净现值(net present value, NPV)。净现值的计算通常受组合中各项目的产出, 项目实施顺序等多种因素的影响。当前对该类问题成果有很多, 概括而言可以分为以下三类。

F. Ghasemzadeh 和 N.P. Archer(2000) 将组合优化的理论方法和项目集合选择问题结合, 形成了项目集合选择理论的一般方法[1]; Safer HM 和 Orlin JB(1995) 设计的双目标背包问题的快速启发式算法[2]; Eben- ChaimeM(1996) 提出的用动态规划求解双目标规划问题方法[3]; Ben Abdelaziz F (1999) 等针对多目标背包问题提出的禁忌搜索与模拟退火算法相结合的组合式解法[4], 从多个角度促进了项目集合选择理论求解方法发展。

在项目集合选择求解方法不断发展的同时, 该理论在求解实际问题的应用也越来越广泛。Anandalingam G, Apte UBanker RD, Muralidhar K, Santhnanm R 以及 Schneiderjans Mj 和 Wilson RL 等人从约束类型、建模、求解流程、求解算法等方面对信息系统建设中的项目集合选择问题进行了研究[5-7]; Aaker DA, Baker NR, Czajkowski AF 以及 Fahrni P 和 Ringuest JL 等人对 R&D 方案设计中的项目集合选择问题进行些研究[8-10]。Pal R 和 Sinha K. C. 对财政分配方案的设计进行了研究[11]。

国内关于项目集合选择理论的研究还刚刚起步。高天、翟延慧(2002) 对多目标背包问题的算法提出了改进[12]。夏洁、高金源(2002) 从改进的禁忌搜索算法[13], 陈德泉, 计雷(2002) 从模拟退火算法[14]; 覃刚力、杨家本(2002) 从蚁群算法[15]; 郭彤城、慕春棣(2002) 从并行遗传算法等角度提出了项目集合选择理论的改进算法[16]。

现有解法的共同特点是计算复杂度较高, 而且

收稿日期: 2008- 08- 23; 修订日期: 2008- 11- 17
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70871085); 天津大学青年教师培养基金(TJU- YFF- 08B09)
作者简介: 吴育华(1944-), 男(汉族), 上海人, 天津大学管理学院, 博导, 中国运筹学会副理事长, 研究方向: 冲突分析.

问题的计算复杂度对模型中约束条件的个数 K 非常敏感。约束条件个数的上升, 将导致模型计算复杂度指数提升。这使得即使对于规模不大的非线性项目集合选择问题, 求解也非常困难。事实上, 许多实际问题中, 决策者最关心的并不是能否求得问题在数学意义上的最优解, 而是能否有一种解法在较低的计算复杂度下给出满意解。本文提出了一种求解非线性项目集合选择问题的启发式解法——改进贪婪搜索算法(advanced greedy search, AGS) , 该算法能在较低的计算复杂度下, 给出求解多约束条件下的非线性项目集合选择问题的满意解。它的基本思想是: 针对非线性项目集合选择问题, 首先确定问题的一个初始解 X_0, 然后以这个初始解为起点, 依照一定的搜索策略逐次搜索初始解邻近区域并逐步改进, 直至得到问题的一个满意解作为问题的可行解。

2　投资项目集合选择问题非线性规划模型

(1) 问题描述

假定有一个由 J 个项目构成的备择项目集合 $A = \{a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_J\}$。对于每个备择项目 $a_j \in A, j = 1, \cdots, J$, 都有对应的 K 项资源投入和确定的收益 v_j。在给定的资源约束下, 决策者需要从中选取一个项目组合 $S \subseteq A$。而且项目组合 S 在实施的过程中必须满足两个条件: 一是在同一时间只能实施一个项目; 二是任何一个项目的实施过程不允许中断, 两个相邻项目的实施过程之间也不允许有间隔。在这两个限定条件下, 决策者以最大化项目组合整体的净现值为目标, 试图确定一个最优的项目组合 S 及相应的最优实施顺序 $Seq^*(S)$。

(2) 问题求解的基本思路

由于投资项目决策类问题的特殊性, 对于项目组合 $S \subseteq A$, 不仅项目组合的构成而且项目组合中各项目的实施顺序 $Seq(S)$ 都会影响项目组合的净现值。因而只有同在最优实施顺序下对两个项目组合的净现值比较才有意义。因此投资项目集合选择问题的求解可以分解为两个相互关系的子问题。

1) 求出统一的确定最优实施顺序的准则;

2) 在给定的最优准则下求最优项目组合

Gupta. S. K. 等人证明了项目最优实施顺序是和特定的项目组合构成无关的[1]。包含不同元素的项目组合可以采用一个统一的准则确定各自的最优实施顺序, 关于确定最优实施顺序的准则的定理如下。

定理– 1: 对于任意备择项目 $a_j \in A, j = 1, \cdots, J$, 设:

①实施该项目所需的时间为 $E_j, j = 1, \cdots, J$;

②该项目在实施完成后取得的回报为 $v_j, j = 1, \cdots, J$;

③折现率为 r。

当且仅当集合 A 中的项目按照 $\dfrac{v_j}{[(1+r)^{E_j} - 1]}$ 的非增顺序排列, 项目集合 A 中的项目顺序是最优实施顺序(简称最优排列) 。

在“ 项目最优实施顺序是和特定的项目组合构成无关的” 的条件下, 改进的投资项目决策类问题的求解步骤投资可以分为两个部分:

步骤 1: 求出统一的确定最优实施顺序的准则。

步骤 2: 在给定的最优准则下求解投资项目集合选择问题

这样经过一定的处理, 一个投资项目选择类问题就可以被转化为一个具有非线性目标函数的项目集合选择问题求解。

(3) 非线性项目集合选择问题的规划模型

假设: 1) 设备择项目集合 $A = \{a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_J\}$ 中的各项目已经按照定理 1 给出的确定最优实施顺序的准则排列。

2) 对于 $a_j \in A, j = 1, \cdots, J$, B_j 为项目的开始时间, E_j 为项目的实施时间, T_j 为项目的完成时间, 则有 $T_j = B_j + E_j$。项目完成后取得的回报为 v_j。

3) $NPV(a_j)$ 为项目 $a_j \in A$ 产出的净现值。

4) 定义有限维向量 $X, X = \{x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_J\}^T$。向量 X 中的每一个分量都和备择项目集合中的项目一一对应。也就是说对于 $S \subseteq A$, 可行解 S 可以用 0– 1 向量 X 的某一取值来表示。

在不改变各项目在备择项目集合 A 中相对排列顺序的情况下, 对于任意项目 $a_j \in S$:

$$T_j = B_j + E_j = \sum_{i=1}^{j} E_i \cdot x_i \tag{2– 1}$$

对应的产出净现值可以用下式表示:

$$NPV(a_j) = \frac{v_j}{(1+r)^{T_j}} = \frac{v_j}{(1+r)^{\sum_{i=1}^{j} E_i \cdot x_i}} \tag{2– 2}$$

相应的对于项目组合 $S \subseteq A$, 在不改变各项目在备择项目集合 A 中相对排列顺序的情况下, 其整体净现值可以用下式表示:

$$NPV(S) = \sum_{a_j \in S} NPV(a_j) \qquad (2-3)$$

即投资项目集合选择问题的目标函数可以表示为:

$$Max\ NPV(S) = \sum_{a_j \in S} NPV(a_j)$$

又可行解 S 可以用 J 维0–1向量 X 的某一取值来表示。可得,上式等价于下式 2–4:

$$\max F(X) = \sum_{j=1}^{J} \frac{v_j}{(1+r)^{\sum_{i=1}^{j} E_i \cdot x_i}} \qquad (2-4)$$

于是可得具有非线性项目集合选择问题的 0–1 规划模型如下:

$$(M2-1) \qquad \max F(X) = \sum_{j=1}^{J} \frac{v_j}{(1+r)^{\sum_{i=1}^{j} E_i \cdot x_i}}$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{J} w_{kj} x_j \leqslant b_k, k = 1, \cdots, K \\ x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \cdots, J \end{cases}$$

其中向量 $b = (b_1, \cdots, b_k, \cdots, b_K)^T$ 为决策者面临的 K 项资源约束; w_{kj} 为第 j 个项目 a_j 在第 k 项资源上的投入系数。

3 非线性项目集合选择模型的解法研究

(1) 非线性项目集合选择模型的改进贪婪算法的基本思路

该方法的基本思想是首先确定一个超出资源约束的项目组合,称之为初始点[8]。之后根据一定的搜索策略逐步从初始点中剔除“最差”的点,使项目组合的资源需求不断接近资源约束,直至满足资源约束。籍此改进贪婪算法需要解决的两个基本问题:

第一,采用何种算法确定问题的初始解。

第二,如何确定搜索策略。

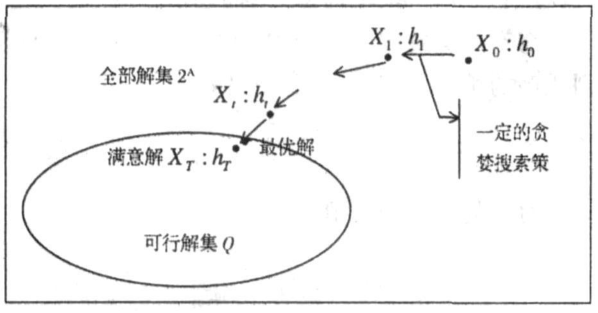

图 1 改进贪婪搜索算法求解过程示意图

搜索策略确定了由当前解到改进解的演化方向,因而也确定了整个解法由初始解到最终满意解的改进途径。搜索策略制定的越合理,算法的收敛速度也就越快。

(2) 改进贪婪搜索算法的求解过程

1) 初始点的确定

确定外点法的初始点可以通过对前述的非线性 0–1 规划模型(M2–1) 的一种松弛算法来实现。采用带 Surrogate 算子的松弛算法构建非线性项目集合选择问题的松弛模型,能够很好的确定改进贪婪算法的外点。其基本步骤如下,设本文上述非线性项目集合选择问题的 0–1 规划模型 M2–1 为问题的一个原始模型,Surrogate 乘子如下:

$$U = \{u_1, \cdots, u_k, \cdots, u_K\}$$

原模型中的 K 个约束被替换为一个约束:

$$\sum_{k=1}^{K} \left(u_k \cdot \sum_{j=1}^{J} w_{kj} x_j \right) \leqslant \sum_{k=1}^{K} (u_k \cdot b_k) \qquad (2-12)$$

则问题的松弛模型可以表示为:

$$(M2-3) \qquad Max \quad F(X)$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{k=1}^{K} \left(u_k \cdot \sum_{j=1}^{J} w_{kj} x_j \right) \leqslant \sum_{k=1}^{K} (u_k \cdot b_k) \\ x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \cdots, J \end{cases}$$

通过 Surrogate 乘子的变换,原来有 K 个约束的 0–1 规划问题被转化为一个单约束的 0–1 规划问题,大大降低了问题的复杂度。但是,由于采用式(2–12) 替换原问题的约束是一种不等价的变换,所以对于原问题和松弛问题的最优解满足以下关系:

$$OPT(M2-3) \geqslant OPT(M2-1)$$

即松弛问题的最优解必定优于或等于原问题的最优解,因而是原问题的一个松弛界。结合前人研究成果的基础上本文提出 Surrogate 乘子计算方法如下:

$$u_k = \frac{\sum_{k=1}^{K} b_k}{b_k \cdot K^2} \qquad (2-13)$$

于是可以得出原问题的松弛模型如下:

$$(M2-3) \qquad Max \quad F(X)$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{1}{b_k} \cdot \sum_{j=1}^{J} w_{kj} x_j \right) \leqslant K \\ x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \cdots, J \end{cases}$$

采用核法、Combo 法等可以求得该模型的最优解 X_0,即为改进贪婪搜索算法的初始解。

2) 搜索策略

改进贪婪算法的搜索策略就是从项目集合中选择一个“最差”的项目,并将它从项目集合中剔除。因此改进贪婪算法的搜索策略实际上就是一个确定“最差项目”的策略。所以搜索策略过程可以视为从

给定的初始点 X_0, 经过一组中间点 $X_1, \cdots X_t, \cdots X_{T-1}$ 最终到达一个用户满意解 X_T 的改进过程。求解过程主要面临如下两个问题:

①投入和产出之间的权衡。因为项目都有投入和产出两个方面, 如何对一个项目在这两个方面的特性作出权衡将对最终的最优解产生影响, 现实中通常采用效率优先准则。

②多项资源投入权重的确定。多项资源投入权重的确定通常采用木桶原理的基本思想。给最为稀缺的资源以最大的权重。或者说给影子价格最大的资源以较高的权重, 这样就能保证在给定的资源约束下, 尽可能的增加项目组合中项目的数量, 提高项目组合的整体产出。具体的权重确定策略如下:

改进贪婪搜索算法的求解过程为一个有限的 T 次迭代优化过程, 对应这 T 次迭代过程有一个 T+1 维的解序列 $\{X_0, \cdots, X_t, \cdots, X_T\}$。其中 X_T 为问题的最终解。X_t 为问题的中间解, $0 \leqslant t < T$。对于 $X_t, t = 0, \cdots, T$, 对应的 K 项资源剩余记为 $\theta_t = \{\theta_{t0}, \cdots, \theta_{tk}, \cdots, \theta_{tK}\}$。根据改进贪婪搜索算法的基本思想, 有:

$$\begin{cases} \theta_t \geqslant 0 \text{ 成立}, 0 \leqslant t < T \\ \theta_t \geqslant 0 \text{ 不成立}, t = T \end{cases}$$

即对于每一个中间解, 其对应的项目组合都至少有一项资源需求超出资源约束。

这里我们采用变权的思想设定各项资源的相对权重[8]。问题求解的每一个迭代优化过程, 由于各自的资源使用情况不同, 各项资源的权重设定也不同。对于第 t 次迭代优化过程 $X_t \rightarrow X_{t+1}$, 当其位于中间解 X_t 时, 相应的剩余量为 $\theta_t = \{\theta_{t1}, \cdots, \theta_{tk}, \cdots, \theta_{tK}\}$, 其中 $\theta_{tk} < 0, k \in \{1, \cdots, K\}$ 代表对应的项目组合中资源需求超出资源约束的部分, 也就是木桶原理中的"短木板"; $|\theta_{tk}|$ 越大, 该项资源的相对稀缺程度也就越高。设定资源权重为 $\delta_t = \{\delta_{t1}, \cdots, \delta_{tk}, \cdots \delta_{tK}\}$, 有计算式如下:

$$\delta_{tk} = \begin{cases} 0, \theta_{kt} \geqslant 0 \\ -\theta_{kt}, \theta_{kt} < 0 \end{cases}$$

$$0 \leqslant t \leqslant T-1 \qquad (2-15)$$

(3) 改进贪婪搜索算法的完整步骤如下:

①采用 Surrogate 松弛模型, 确定问题的初始解 X_0, 并根据 X_0 确定相应的项目组合 S_0, 项目资源需求 h_0。

②令阶段指标 $t \leftarrow 0$, 也就是将 t 赋值为 1。

③计算 t 阶段 K 项资源的剩余量: $\theta_{tk} = b_k - h_{tk}, k = 1, \cdots K$。如果有剩余资源向量 $\theta_t = \{\theta_{t0}, \cdots, \theta_{tk}, \cdots, \theta_{tK}\} \geqslant 0$ 则转第⑦步, 否则继续。

④已有的剩余资源向量 $\theta_t = \{\theta_{t0}, \cdots, \theta_{tk}, \cdots, \theta_{tK}\} \geqslant 0$, 代入式(2-15)得 t 阶段的权重向量 $\delta_t = \{\delta_{t1}, \cdots, \delta_{tk}, \cdots \delta_{tK}\}$, 并计算全部项目 $a_j \in S_t$ 在 t 阶段的效率指数 Eff_{tj}。

⑤将 $\underset{a_j \in S_t}{Min}(Eff_{tj})$ 对应的项目 a_j^* 从项目组合 S_t 中剔除。有 $S_{t+1} = S_{t+1}/\{a_j^*\}$, 与 S_{t+1} 对应的解为 X_{t+1}。

⑥$t \leftarrow t+1$, 转第二步。

⑦$T \leftarrow t$

对于当前项目集合 S_T, 从集合 A/S_T 中寻找一个项目 a_i, 使得:

$$\forall k = 1, \cdots, K \text{ 有}, \theta_{Tk} = b_k - \sum_{a_j \in S_T} w_{kj} - w_{ki} \geqslant 0$$

如果存在这样的 a_i, 则改进的贪婪搜索算法下的最优项目组合为 $S_T \cup \{a_i\}$;

否则改进的贪婪搜索算法下的最优项目组合为 S_T。

4 结语

本文首先定义了项目集合选择问题。然后回顾了对于可以简化为线性问题的项目集合选择问题的建模和解法研究。结合线性模型的优点, 在此基础上构建了投资项目集合选择问题的非线性规划模型, 常用的动态规划模型尽管能够有效的解决非线性项目集合选择问题建模的要求, 但计算复杂度对模型中约束条件的个数 K 非常敏感。随着约束条件个数的上升, 将导致模型计算复杂度指数模式提升。为此, 文章提出了一种改进的贪婪算法, 该方法能以较低的计算复杂度, 求解多约束条件下的非线性项目集合选择问题, 并研究了采用 surrogate 松弛模型确定初始点和运用改进的贪婪算法搜索最优解的具体实现方法。

参考文献:

[1] Ghasemzadeh, N. P. Archer. Project portfolio selection through decision support [J]. Decision Support Systems, 2000, 29: 73-88.

[2] Safer H M, Orlin J B. Fast approximation schemes for multi- criteria . ow, knapsack, and scheduling problems [Z]. Technical report, Sloan School of Management, MIT, Cambridge, MA, working paper, 1995: 3757-95.

[3] Eben- Chaime M, Parametric solution for linear bicriteria knapsack models[J]. Management Science, 1996, 42

(11):1565- 1575.

[4] Ben Abdelaziz F., Chaouachi J., Krichen S. A hybrid heuristic for multiobjective knapsack problems[C]. In: Voss S, Martello S, Osman I, Roucairol. Meta- heuristics. Advances and trends in local search paradigms for optimization, Kluwer, Dordrecht, 1999: 205- 212.

[5] Apte U., Sankar CS, Thakur M., Turner JE. Reusability- based strategy for development of information systems: implementation experience of a bank[J]. MIS Quarterly, 1990, 14(4): 421- 433.

[6] Muralidhar K., Santhnanm R., Wilson RL. Using the analytic hierarchy process for information system project selection[J]. Information and Management, 1990, 18(1): 87- 95.

[7] Sanathanam R., Kyparisis GJ. A multiple criteria decision model for information system project selection[J]. Computers Ops Res, 1995, 22(8): 807- 818.

[8] Aaker DA, Tyebjee TT. A model for the selection of interdependent R&D projects[J]. IEEE Transactions on Engineering Management, 1978, 25(2): 30- 36.

[9] Badri MA, Davis DL, Davis DF, Hollingsworth J. A multi- objective course scheduling model: combining faculty preferences for courses and times[J]. Computers and Operations Research, 1998, 25(4): 303- 316.

[10] Fahrni P., Spatig M. An application- oriented guide to R&D project selection and evaluation methods[J]. R&D Management, 1990, 20(2): 155- 171.

[11] Pal, R., Sinha, K.C.. Optimization approach to highway safety improvement programming[C]. 1998: 1- 9.

[12] 高天, 翟延慧. 特殊多维 0- 1 背包问题的约束简化方法- 不等式单约束生成法[J]. 东北师大学报: 自然科学版, 2002, 34(3): 21- 26.

[13] 夏洁, 高金源. 基于禁忌搜索的启发式任务路径规划算法[J]. 控制与决策, 2002, 17(11): 773- 776.

[14] 陈德泉, 计雷. 模拟退火算法在项目群优选中的应用[J], 中国管理科学, 1994(1): 11- 17.

[15] 覃刚力, 杨家本. 自适应调整信息素的蚁群算法[J]. 信息与控制, 2002, 31(3): 198- 210.

[16] 郭彤城, 慕春棣. 并行遗传算法的新进展[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(2): 15- 23.

On the Non-Linear Programming Model of the Investment Portfolio Selection Problem

XIE Bai-chen, WU Yu-hua, YANG Shun-yuan

(Management School, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: Based on the conception of subset selection problem, the general processes for solving the problem are given. As the investment portfolio selection problem is of non- linear feature, an aimed model of the investment portfolio selection problem is formulated. Therefore, an exterior point heuristic algorithm is constructed, the surrogate model aimed to determine original point and the advanced greedy search algorithm aimed to obtain optimal point are put forward, and the whole processes of the algorithm are addressed.

Key words: investment portfolio selection; non- linear; surrogate model; advanced greedy search algorithm