

基于灰色关联度求解指标权重的改进方法

崔 杰^{1,2}, 党耀国¹, 刘思峰¹

(1. 南京航空航天大学经济与管理学院, 江苏 南京 210016;
2. 淮阴工学院经济管理学院, 江苏 淮安 223001)

摘 要:针对决策过程中指标权重的确定问题,在分析现有权重确定方法不足的基础上,提出了一种基于灰色关联度求解指标权重的改进方法,并对其性质进行了研究。该方法是对决策者给出的主观权重经验判断矩阵进行充分挖掘,提取出一个公共比较权重数列,并建立一个简易的数学模型,使确定的权重同时反映主观程度和客观程度。算例分析说明了该改进方法的简单性与实用性。

关键词:权重;指标;多属性决策;数学模型

中图分类号:O212 **文献标识码:**A

1 引言

在决策过程中,为了对决策对象进行科学、合理地评价,通常需要建立一套科学、完整的评价指标体系,这是评价的基础工作。然而,在评价过程中,还需对各个评价指标确定相应的权重。在多指标决策问题的求解过程中,如何确定指标的权重将是一个非常重要的工作,因为它关系到方案排序结果的可靠性和正确性。国内外已有部分学者对于指标权重的确定方法进行了一些研究。目前,求解指标权重的方法大体上可分为三类:第一类是基于决策者直接给出属性的权重的主观赋权法,例如 Delphi 法^[1]、最小平方和法^[2]和特征向量法^[3]等。第二类是基于决策矩阵信息的客观赋权法,例如主成分分析法^[4]、熵法^[5]和多目标最优化方法^[6]、线性规划法^[7]、误差分析法^[8]等。第三类是基于第一类和第二类的主客观集成赋权法,例如折衷系数综合权重法^[9]、线性加权单目标最优化法^[10]、熵系数综合集成法^[11]、基于粗集理论的综合权重求解法^[12]、基于模糊判断矩阵的专家法^[13]、组合赋权法^[14]、

Frank - Wolfe 法^[15]等。利用主观赋权法确定决策方案指标的权重,虽然反映了决策者的主观判断或经验,实施过程相对简单,但方案的排序可能有很大的主观随意性,结果也容易受决策者的知识缺乏的影响;利用客观赋权法求解指标权重,虽然通常是基于比较完善的数学理论与方法,但其忽视了决策者的主观信息,造成了一定程度的信息缺失。主客观集成赋权法的数学理论基础相对比较完美,并且也得到了一些初步的研究成果^[9-15],但不足在于算法的复杂度普遍比较高,在一定程度上影响了其应用性。文献[16]提出一种利用灰色关联度求解指标权重的主客观集成方法。该方法的依据于灰色理论,具有较好的数学理论基础,但是其不足在于求得的权重易受决策者对灰色关联度模型中分辨系数的主观取值的不同而出现计算结果的多样性,从而给决策工作带来不便。从科学简单性的原则出发,作者在分析已有研究成果的基础上,提出一种基于灰色关联度求解指标权重的改进方法。

2 决策指标权重的确定方法

通常,一个多指标决策模型包括如下要素^[7]:

(1) 方案集 $S, S = \{s_1, s_2 \dots s_m\}$; 指标集 $P, P = \{p_1, p_2 \dots p_n\}$ 。

(2) 指标权重集合 $W, W = \{w_1, w_2 \dots w_n\}^T$;
 n
 $w_j = 1, w_j > 0, w_j$ 未知。

$j=1$
(3) 决策矩阵 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $a_{i,j}$ 是方案 s_i 在属性 p_j 下的评价价值。

收稿日期:2008 - 01 - 23; 修订日期:2008 - 09 - 18

基金项目:国家自然科学基金资助项目(70473037);江苏省软科学重点项目资助项目(BK2006025);江苏省普通高校研究生科研创新计划资助项目(CX08B - 039R);南京航空航天大学科研创新基金资助项目(Y0811 - 091)

作者简介:崔杰(1978 -),男(汉族),江苏泗阳人,南京航空航天大学博士研究生,研究方向:灰色系统理论、决策分析。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.1 确定指标权重的灰色关联度方法

专家在分析判断各评价指标的权重时,由于未知的因素较多,因而经验判断值不能准确地反映各个指标的重要性。灰色关联分析作为一种系统分析技术,是分析系统中各因素关联程度的一种方法。将其用于确定评价指标的权重实际上是对各位专家经验判断权重与某一专家的经验判断的最大值(设定)进行量化比较,根据其彼此差异性的大小以分析确定专家群体经验判断数值的关联程度,即关联度。关联度越大,说明专家经验判断趋于一致,该指标在整个指标体系中的重要程度就越大。权重也就越大。据此对各个指标进行规一化处理,从而确定其相应的权重。计算方法与步骤如下^[16]:

(1) 聘请专家进行权重的经验判断,确定参考序列

设有 n 个评价指标,有 m 个专家同时对各个指标的权重作出经验判断,从而组成各个指标权重的经验判断数据列,可分别表示为:

$$\begin{aligned} X_1 &= (x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(m)) \\ X_2 &= (x_2(1), x_2(2), \dots, x_2(m)) \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ X_n &= (x_n(1), x_n(2), \dots, x_n(m)) \end{aligned}$$

从 X_1, X_2, \dots, X_n 中挑选一个最大的权重值作为“公共”参考权重值,各个专家的参考权重值均赋予此值,从而组成参考数据列 $X_0, X_0 = (x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(m))$

(2) 计算关联系数及关联度

根据 X_0 和 X_1, X_2, \dots, X_n , 利用下式求出各个专家对各个评价指标权重经验判断值与“公共”参考权重值之间的关联系数 $o_i(k)$ 和关联度 o_i :

$$o_i(k) = \frac{\min_i \min_k |x_0(k) - x_i(k)| + \max_i \max_k |x_0(k) - x_i(k)|}{|x_0(k) - x_i(k)| + \max_i \max_k |x_0(k) - x_i(k)|}$$

$$o_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n o_i(k)$$

(ρ 为分辨系数, $\rho \in (0, 1)$, 一般取 $\rho = 0.5$)

各个数列的关联度大小,直接反映了各个评价指标相对于设定数列的相对重要(即权重大小)的程度。

(3) 以 o_i 作为各个决策指标的权重值。即 w_i

$$= o_i$$

2.2 确定评价指标权重的灰色关联度方法的缺陷

对上述确定指标权重的灰方法进行综合微观分析,我们发现其存在以下缺陷:

(1) 指标权重的取值具有不确定性。

由于影响 o_i 的因素很多,如参考序列 X_0 , 比较序列 X_i 数据变换方式,分辨系数 ρ 等。尤其当 ρ 取值不同时,关联度大小就不同,从而 o_i 不唯一,因此求得的权重值具有不确定性。

(2) 一般取 $\rho = 0.5$, 则恒有 $o_i > 0.333$, 权重区分度较弱。

证明: 记 $d_i(k) = |x_0(k) - x_i(k)|$, $\min_i \min_k d_i(k) = m$, $\max_i \max_k d_i(k) = n$, 则

$$\begin{aligned} o_i(k) &= (m + 0.5n) / (d_i(k) + 0.5n) \\ &= m / (d_i(k) + 0.5n) + 0.5n / (d_i(k) + 0.5n) \end{aligned}$$

由于 $m \geq 0, n \geq 0$, 故当 $d_i(k) = n$ 时, $(x_0(k), x_i(k))$ 最小, 即对任意 i, k 有

$$\begin{aligned} o_i(k) &> (m + 0.5n) / (n + 0.5n) \\ &> m / (n + 0.5n) + 0.5n / (n + 0.5n) > 0.333 \end{aligned}$$

因此, $(x_0(k), x_i(k))$ 最小取值是 0.333, 从而使得任何参考序列 X_0 与比较序列 X_i 的关联度都至少接近于中等, 即求得的指标权重均在 0.333 以上, 难以区分指标之间的重要程度, 难以满足实际决策的需求。因此, 我们对其进行了改进, 提出一种新的求解指标权重的方法。

3 基于灰色关联度求解指标权重的改进方法及其性质

由于求解指标权重的灰方法在计算过程中容易受分辨系数 ρ 取值的影响, 使得计算的权重值具有主观不确定性, 从而给决策工作带来了不便。为了克服该缺陷, 我们提出了一种基于灰色关联度求解指标权重的改进方法。该方法从专家对指标权重的经验判断值出发, 借鉴了灰色相近关联度的思想, 以最大的专家经验判断值为参照序列, 根据文中提出的公式(1)、(2)(见下文), 进行计算, 再经过归一化处理, 最后求得各决策指标的权重值。该算法是以专家组的权重经验判断值为原始输入数据来进行纯数值计算, 无需涉及如灰色关联度算法中易受决策者个体影响的分辨系数一类的主观设定参数, 计算过程不受决策者主观因素的干扰, 充分利用了专家经验判断值的主观信息, 同时利用简易的数学模型进行指标权重的客观计算, 因此得到的权重在反映

主观程度的同时,能够充分地反映客观程度。

3.1 求解指标权重的改进方法

(1) 确定评价指标,聘请专家进行权重的经验判断

设有 n 个评价指标,有 m 个专家同时对各个指标的权重作出经验判断,从而组成各个指标权重的经验判断数据列(见 2.1),可用矩阵形式表示如下:

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_1(2) & \dots & x_1(m) \\ x_2(1) & x_2(2) & \dots & x_2(m) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_n(1) & x_n(2) & \dots & x_n(m) \end{bmatrix}$$

(2) 确定参考序列

从 X 中挑选一个最大的权重值作为“公共”参考权重值,各个专家的参考权重值均赋予此值,从而组成参考数据列 X_0 。

$$X_0 = (x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(m))$$

(3) 求各个指标序列 X_1, X_2, \dots, X_n 与参考数据列 X_0 之间的距离

$$D_{0i} = \sum_{k=1}^m (x_0(k) - x_i(k))^2 \quad (1)$$

(4) 求各个指标的权重

$$w_i = \frac{1}{1 + D_{0i}} \quad (2)$$

(5) 求各个指标的归一化权重

$$w_i^* = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (3)$$

3.2 求解决策指标权重改进方法的性质

通过对式(1)、(2)、(3)进行综合微观分析,我们发现改进的算法具有以下特性:

性质 1 $\frac{1}{(m+1)(n-1)} w_i^* \leq 1, \sum_{i=1}^n w_i^* = 1$

证明: $0 < w_i^* \leq 1$, 由式(1)、(2)可知: $0 < D_{0i}$

$m, \frac{1}{1+m} w_i \leq 1$, 因此, $\frac{1}{(m+1)(n-1)} w_i^*$

$= \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \leq 1$, 由式(3)得 $\sum_{i=1}^n w_i^* = 1$ 显然成立,证毕。

由此可见,权重随着指标总数的增加和专家数的增加而减少,与实际情况相吻合。

性质 2 平移变换权重保值性

即参考序列值和指标序列值同时增加相同的常数 $l(0 < l < 1 - x_i(k))$, 权重取值不变。

证明: 令 $X_i = (x_i(1) + l, \dots, x_i(k) + l), X_0 = (x_0(1) + l, \dots, x_0(k) + l)$

$$w_i = \frac{1}{1 + D_{0i}}, w_i^* = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^m w_i} = \frac{1}{1 + D_{0i}} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^m (x_i(k) + l - (x_0(k) + l))^2} = \frac{1}{1 + D_{0i}} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^m (x_i(k) - x_0(k))^2} = \frac{1}{1 + D_{0i}} = w_i, w_i^* = w_i^*$$

则 $w_i = \frac{1}{1 + D_{0i}} = \frac{1}{1 + D_{0i}} = w_i, w_i^* = w_i^*$, 证毕。

性质 3 其他指标序列不变条件下,某个指标序列与参考序列距离越小,权重越大

证明: 令 $A = w_i = \frac{1}{1 + D_{0i}}, B = \frac{1}{1 + D_{0j}}$

$D_{0i} < D_{0j}, A = w_i = \frac{1}{1 + D_{0i}}, B = \frac{1}{1 + D_{0j}}$

由于 $A < B$, 因此 $w_i^* = \frac{A}{B} = \frac{A+k}{B+k} > \frac{A}{B} (k > 0)$ 即 $w_i^* > w_j^*$, 证毕。

4 算例

采用文献[16]提供的基础数据来说明本文给出的方法。从四个方面对农作物种子质量进行评价,评价指标分别为发芽率 X_1 、纯度 X_2 、净度 X_3 、含水量 X_4 。首先聘请 10 位有经验的种子培育和评价专家对各个评价指标的权重进行经验判定,其判断值如表 1。

表 1 各评价指标权重的经验判断值

专家 权重 指标	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_1	0.4	0.2	0.4	0.2	0.6	0.2	0.3	0.1	0.6	0.3
X_2	0.3	0.3	0.4	0.3	0.2	0.5	0.2	0.3	0.2	0.3
X_3	0.2	0.3	0.1	0.1	0.1	0.2	0.1	0.3	0.1	0.2
X_4	0.1	0.2	0.1	0.4	0.1	0.1	0.4	0.3	0.1	0.2

表 1 是各列是每个专家赋予各个指标的权重,从表中可以看出最大的经验判定权重为 0.6,因此可设定参考数列 X_0 中专家赋予的参考权重均为 0.

$$X = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.6 & 0.3 & \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.3 & \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & \end{bmatrix}$$

将这些数列的数据代入式(1)、(2)、(3)进行计算,得到指标 X_1, X_2, X_3, X_4 的归一化权重集合为:

$$W^* = \left\{ w_1^* \quad w_2^* \quad w_3^* \quad w_4^* \right\} = \left\{ 0.31 \quad 0.28 \quad 0.19 \quad 0.22 \right\}$$

即对于综合评价农作物种子质量来说,发芽率指标权重为 0.31,纯度指标权重为 0.28,净度指标权重为 0.19,含水量指标权重为 0.22

为了说明本文提出的求解权重的改进方法的有效性,我们选择了两个具有代表性的求解指标权重的经典方法:Delphi 法^[1]与熵法^[5].为了便于叙述,将文献[1]中的 Delphi 法记为方法 1;将文献[5]中的熵法记为方法 2;将本文提出的求解权重的改进方法记为方法 3.分别利用算例中提供的基础数据,结合两种经典的权重求解方法进行计算(计算过程略).通过求解,得到的实验结果如表 2 所示,并根据权重区分度,将三种不同的权重求解方法进行了对比分析.

表 2 三种求解指标权重方法计算结果的比较

方法类型	指标权重				权重区分度
	w_1	w_2	w_3	w_4	
方法 1	0.26	0.25	0.25	0.24	小
方法 2	0.27	0.26	0.23	0.24	小
方法 3	0.31	0.28	0.19	0.22	大

从三种方法得到的结果可以看出,运用方法 1 与方法 2 得到的指标重要度权重在指标间并不能形成有效地区分,即各指标的重要度都差异不大,这样的结果不能突显出决策者认为确实重要的指标,会从很大程度上掩盖了重要度较高的指标在整体中本应占有的位置.

如上例中,农作物种子“发芽率”与“纯度”两项指标,从方法 1 与方法 2 得到的权重结果看,二者的重要程度与其他指标几乎相同,差异非常小.而在方法 3 处理的结果中却体现出了明显的区分度,而这种重要性的区隔恰好体现了计算过程中,改进方法在客观程度方面的充分反映.此外,从方法 3 的计算结果来看,指标按照权重从大到小的排序,依次

6. 将 X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 视为数列且数列项由权重的经验判断值构成, X_0 为参考数列,其他称为比较数列,即:

为发芽率,纯度,含水量和净度,定量计算结果与专业常识相一致.

从上述算例分析过程和结果中,我们不难看出,本文提出的求解指标权重的改进方法在指标重要性分析问题上是一种极为有效的方法,它以专家的经验判断权重数据为基础,通过简易的数学模型进行权重求解.它将从很大程度上解决以往传统方法所面临的区分性及简易实用性问题.

5 结束语

确定决策指标权重的方法是目前管理决策领域研究的热点之一.传统的权重求解方法无法同时反映决策者的主观信息和决策的客观信息,而且算法的复杂度较高,实用性较差.本文立足于科学简单性原则,在现有的研究基础上,提出了一种求解指标权重的主客观集成方法,该方法在决策者给出的主观权重矩阵的基础上,构建了一个理想权重数列,并提出了一个基于理想权重数列的数学模型.由于该算法充分利用了专家的经验判断值,在计算过程中并未涉及需要决策者主观设定的参数,因而计算过程不受决策者主观因素的干扰,故求得的权重值在反映主观程度的同时,也能更好的体现了客观程度.另外,算例分析结果也充分体现了这一点.

参考文献:

[1] Mareschal B. Weight stability intervals in multi - criteria decision [J]. European Journal of Operational Research, 1998, (33) :54 - 64.

[2] Saaty T.L. A scaling method for priorities in hierarchical structures [J]. Journal of Mathematical Psychology, 1997, (15) :234 - 281.

[3] Hwang CL, Lin MJ. Group decision making under multiple criteria: methods and applications [M]. Springer, Berlin, 1997.

[4] Johanna M. Harte, Pieter Koele and Gjsbert van Engelenburg. Estimation of attribute weights in a multi - attribute choice situation[J]. Acta Psychological, 1996, 93

- (1 - 3) : 37 - 55.
- [5] F. Herrera, L. Martinez, P.J. Sanchez, Managing non-homogeneous information in group decision making [J]. *European Journal of Operational Research*, 2005, 166: 115 - 132.
- [6] Zeshui Xu. A method for multiple attribute decision making with incomplete weight information in linguistic setting[J]. *Knowledge - Based Systems*, 2007, 20(8) : 719 - 725.
- [7] Z. S. Xu, A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations[J]. *Information Sciences*, 2004, 166: 19 - 30.
- [8] 尤天慧, 樊治平. 区间数多指标决策中确定指标权重的一种客观赋权法 [J]. *中国管理科学*, 2003, 11(2) : 92 - 95.
- [9] Ying - Ming Wang, Celik Parkan, Ying Luo. A linear programming method for generating the most favorable weights from a pairwise comparison matrix[J]. *Computers & Operations Research*, 2008, 35(12) : 2008, Pages 3918 - 3930.
- [10] 樊治平, 张全, 马建. 多属性决策中权重确定的一种集成方法[J]. *管理科学学报*, 1998, (3) : 50 - 53.
- [11] 吴坚, 梁昌勇, 李文年. 基于主观与客观集成的属性权重求解方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2007, (3) : 383 - 387.
- [12] 曹秀英, 梁静国. 基于粗集理论的属性权重确定方法[J]. *中国管理科学*, 2002, (5) : 98 - 100.
- [13] 周宇峰, 魏法杰. 基于模糊判断矩阵信息确定专家权重的方法[J]. *中国管理科学*, 2006, (3) : 71 - 75.
- [14] 徐泽水, 达庆利. 多属性决策的组合赋权方法研究[J]. *中国管理科学*, 2002, (2) : 84 - 87.
- [15] 黄岩, 张国春. 一种新的计算组合预测权重的方法[J]. *管理工程学报*, 2001, (2) : 44 - 47.
- [16] 罗庆成. 灰色系统新方法 [M]. 浙江: 农业出版社, 1992: 157 - 161.

An Improved Approach for Determining Weights of Attributes in Decision Making Based on Grey incidence

CUI Jie^{1, 2}, DANG Yao-guo¹, LIU Si-feng¹

(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;
2. College of Economics and Management, Huai Yin Institute of Technology, Huai an 223001, China)

Abstract : In order to determine attribute weights in multiple attribute decision making, this paper analyzes the limitations of the present approaches to determining weights of attributes, and proposes an improved approach to determining weights of attributes in decision making based on grey incidence, then studies the properties of the improved method. The approach can fully mine the information from the subjective judgment of experience weight matrix given by decision makers. A public series of comparison of weights is extracted, a simple mathematic programming model is constructed, and the subjective information of weights given by decision makers and the objective information of the decision matrix are integrated. Finally, the analysis of an example demonstrates the simplicity and validity of the improved approach.

Key words : weight; attribute; multiple attributes decision making; mathematic programming model