

# 利率期限结构模型非线性建模

潘婉彬<sup>1</sup>, 陶利斌<sup>2</sup>, 缪柏其<sup>1</sup>

(1. 中国科学技术大学统计与金融系, 安徽 合肥 230026; 2. 香港大学经济与金融学院, 香港薄扶林道)

**摘要:**应用门限模型对利率期限结构模型中漂移项的非线性进行建模, 提出门限(threshold) CKLS 模型。用基于自助法(bootstrap)的广义似然比检验方法对门限 CKLS 模型进行了检验。检验结论表明:门限 CKLS 模型能较好的刻画利率期限结构模型中漂移项的非线性, 在 0.1 的显著水平下优于 CKLS 模型。

**关键词:**门限模型; CKLS 模型; 非线性; 广义似然比检验

**中图分类号:**F830.91 **文献标识码:**A

## 1 引言

短期无风险利率是金融市场上最基本也是最重要的经济变量之一, 它驱使着整个期限结构的变动, 对其他金融产品的定价和利率风险的管理起着举足轻重的作用。随机扩散模型被广泛应用于描述利率等重要经济变量和资产价格的变动。然而, 对于利率期限结构模型中漂移项是否为线性的问题仍然是利率期限结构模型研究方面的一个热点。以前的研究一直假设其服从一种线性关系。线性的漂移项假设均值回复的程度在所有利率水平上都是相同的, 这是否合理呢? 也就是说, 在特别低或特别高的利率水平时, 均值回复的程度是否会不一样?

自从 Ait - Sahalia (1996)<sup>[1]</sup>发现利率过程的漂移项呈现非线性的特征以来, 很多学者对利率漂移的非线性的现象进行了研究, 越来越多的非线性模型被提出, 进而对利率进行拟合和预测。Stanton (1997)<sup>[2]</sup>采用非参数方法估计了连续时间利率期限模型的漂移项和扩散项, 证实单因子模型的漂移项具有非线性。李和金, 李湛, 李为冰(2002)<sup>[3]</sup>用非参数核估计方法对中国非银行间国债回购市场的短期回购利率作了实证分析, 估计了 Vasicek 和 CIR 模型的漂移函数、扩散函数和边际密度, 实证结果表明漂移函数和扩散函数都是非线性的。Bali 和 Wu (2006)<sup>[4]</sup>用美国隔夜联邦基金利率、7 天欧元存款

利率和美国三个月国库券收益率三个不同的数据集对短期利率漂移的非线性进行了研究, 发现期限越短的利率序列的非线性越明显。Demirtas(2006)<sup>[5]</sup>对刻画短期利率行为的众多模型建立了一个一般化的离散时间模型框架, 以此对不同的模型进行检验, 检验结果表明, 漂移函数为非线性且非对称的模型的预测效果最好, 漂移函数形式的选择错误会导致扩散函数的错误估计。Takamizawa(2008)<sup>[6]</sup>同时利用多个利率序列以及序列间的相互关系来推导利率期限结构, 进而对非线性的漂移进行估计。

以上文献中所提出的非线性模型主要对利率样本总体进行建模, 本文把在非线性建模方面得到广泛应用的门限模型用于对利率期限结构模型中漂移项的非线性进行建模, 把利率状态空间分割成几个子空间, 每个子空间上使用线性逼近的思想和现有的利率扩散模型结合, 提出了门限(threshold) CKLS 模型(简称 TCKLS 模型)。

## 2 模型介绍

### 2.1 利率模型

Chan 等(1992)<sup>[7]</sup>为众多不同的利率期限结构模型建立了一个共同框架, 提出一个一般的随机微分方程(简称为 CKLS 模型), CKLS 模型的具体形式如下:

$$CKLS \quad dr = (\quad + r) dt + r dZ \quad (1)$$

CKLS 模型包括了众多著名的连续时间利率模型, 如 CIR 模型, Vasicek 模型等。

Ait - Sahalia (1996)<sup>[1]</sup>使用非参数方法估计了短期利率的边际密度函数, 发现利率过程的漂移项呈现非线性的特征, 通过对有线性漂移的单因子模

收稿日期:2007 - 12 - 15; 修订日期:2008 - 09 - 30

作者简介:潘婉彬(1977 - ), 女(汉族), 广西桂平人, 中国科学技术大学统计与金融系讲师, 博士, 研究方向:金融工程。

型进行统计检验,得到结果是所有漂移项为线性的参数模型均被拒绝了。他由此提出了一个新的更为复杂的模型能较好地拟合利率数据的特征,从而不能被假设检验所拒绝。

$$dr_t = (\alpha_0 + \alpha_1 r_t + \alpha_2 r_t^2 + \alpha_3 / r_t) dt + \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 r_t + \alpha_2 r_t^2} dW_t \quad (2)$$

Ait-Sahalia 模型有 8 个未知参数,过于复杂。

Gray(1996)<sup>[8]</sup>指出,现存的短期利率模型在模型拟和和预测方面的表现较差,其出现偏差的一个潜在原因就是在整个样本期内条件均值和方差是固定不变的,也就是说,影响模型条件均值和方差的系数和外生变量是固定的。

Hamilton(1988)<sup>[9]</sup>首次利用一个马尔可夫制度转换模型描述利率变动中的非线性特征,发现与线性自回归模型相比,这个模型能更好地拟和样本数据。在国内,谢赤,钟羽(2004)<sup>[10]</sup>在 Vasicek 模型的基础上结合制度转换模型,研究制度转换是否能对模型的修正起帮助作用。结果显示,制度转换模型能够捕捉到利率变动中的大部分异方差现象。

### 2.2 门限模型

线性模型作为一个强有力的工具应用于大量的科学研究中。当对现实中大量的非线性现象进行建模时,线性模型常常是不适合的。一个自然的想法是把全局线性逼近分成几段,在状态空间的每个子集上进行一个线性逼近。Tong 在 1977 年提出基于分段线性逼近的门限模型,即把状态空间分割成几个子空间,每个子空间上使用线性逼近。Tong(1983)<sup>[11]</sup>介绍了门限模型的理论及应用。由于门限模型在模型拟和和模型解释方面的成功,被广泛应用于经济、环境科学、物理学、水文学等不同领域的非线性建模。

具有  $k(k \geq 2)$  分段的门限模型被定义为:

$$Y_t = \sum_{i=1}^k (b_{0i} + b_{1i} X_t + \alpha_i) I\{X_t \in A_i\}, \quad (3)$$

其中  $b_{ij}$  是未知参数;  $\{A_i\}$  构成  $(-\infty, +\infty)$  的一个分割,  $\sum_{i=1}^k A_i = (-\infty, +\infty)$ , 且  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , for all  $i \neq j$ 。

假定分隔  $\{A_i\}$  已知,参数  $b_{ij}$  的估计利用普通最小二乘估计,记  $\hat{b}_i = (b_{0i}, b_{1i})$ ,最小化:

$$\sum_{i=1}^k L(\hat{b}_i, A_i) \quad (4)$$

其中,  $L(\hat{b}_i, A_i) = \sum_{\substack{X_t \in A_i \\ 0 < t < T}} [Y_t - (b_{0i} + b_{1i} X_t)]^2$ 。

在实际中,分割  $\{A_i\}$  往往是未知的,通常假定

具有形式  $A_i = (r_{i-1}, r_i]$ , 其中,  $-\infty = r_0 < r_1 < \dots < r_k = +\infty$ 。可以通过全面搜索的方式来确定分割:对给定的分割集合  $\{A_i\}$ , 记 (4) 的最小值为  $L(\{A_i\}) = \sum_{i=1}^k L(\hat{b}_i, A_i)$ , 我们求分割  $\{\bar{A}_i\}$ , 它使得  $L(\{\bar{A}_i\})$  达到极小。在实际中,  $k$  常取较小的数值,比如 2,3。门限  $r_i$  在样本范围的某个内点处求得。

本文考虑最简单的情况,即将区间分成两段  $(-\infty, c)$  和  $[c, +\infty)$  的情况。

### 2.3 门限(threshold) CKLS 模型(以下简称 TCKLS 模型)

CKLS 模型  $dr = (\alpha + r) dt + \sigma r dZ$  的 Euler 离散化形式为:

$$r_t = r_{t-1} + (\alpha + r_{t-1}) \Delta t + \sigma r_{t-1} \epsilon_t \quad (5)$$

这里  $Y_t = r_t - r_{t-1}$ ,  $X_t = r_{t-1}$ 。

结合门限模型(4)和模型(5)可得 TCKLS 模型:

$$dr = \begin{cases} (\alpha_1 + r) dt + \sigma r dZ & \text{if } r < c \\ (\alpha_2 + r) dt + \sigma r dZ & \text{if } r > c \end{cases} \quad (6)$$

TCKLS 模型离散形式为:

$$r_t = \sum_{i=1}^k (\alpha_i + r_{t-1}) I\{r_{t-1} \in A_i\} \quad (7)$$

其中  $E[\epsilon_t] = 0$ ,  $E[\epsilon_t^2] = \Delta t$ ,  $\{A_i\}$  为:  $\{(-\infty, c), [c, +\infty)\}$ 。

## 3 TCKLS 模型的估计方法

### 3.1 估计漂移函数的参数

对给定的数据  $\{r_t, t = 0, 1, \dots, n\}$ , 考虑 TCKLS 模型的 Euler 离散化形式(7), 假定分隔  $\{A_i\}$  已知,即给定门限的一个初始值  $c$ , 参数  $\alpha_i, \sigma_i$

的估计可根据最小二乘方法通过最小化:  $\sum_{i=1}^k L(\hat{b}_i, A_i)$  可得。其中,  $L(\hat{b}_i, A_i) = \sum_{\substack{r_{t-1} \in A_i \\ 0 < t < n}} [r_t - (\alpha_i + r_{t-1})]^2$ 。

### 3.2 门限参数的确定

在实际应用中,门限  $c$  在样本范围的某个内点处求得。对给定的样本  $\{r_t, t = 0, 1, \dots, n\}$ , 记样本的最小值为  $r_{\min}$ , 样本的最大值  $r_{\max}$ 。门限  $c$  对状态空间  $[r_{\min}, r_{\max}]$  的分割  $\{A_i\} = [r_{\min}, c) \cup [c, r_{\max}]$ ,  $i = 1, 2$ , 门限参数  $c$  可以通过全面搜索的方式来确定分割。可把状态空间  $[r_{\min}, r_{\max}]$  等分为

1000 或更多的格点,当门限参数  $c$  遍历这些格点时,根据最小二乘法可求出残差平方和  $L(\{A_i\}) = \sum_{i=1,2} L(\tilde{r}_i, A_i)$ ,具体表达见(4)。对于每一个固定的  $c$ ,有一个  $L(\{A_i\})$ ,这些  $L(\{A_i\})$  的最小值所对应的门限参数  $c$  就是我们的估计值,它使得残差平方和  $L(\{A_i\})$  达到极小,此时,根据最小二乘所得到的参数估计值  $\hat{r}_i$  和  $\hat{c}$  就是我们估计得到的漂移函数的参数。在实证应用中,因为位于两个样本点内的分割所得到的残差平方和  $L(\{A_i\})$  是一样的,所以把样本  $\{r_t, t = 0, 1, \dots, n\}$  进行排序后,依次选择  $[r_{\min}, r_{\max}]$  中的样本点作为分割就可以了。

### 3.3 估计扩散函数的参数

得到参数的估计值  $\hat{r}_i$  和  $\hat{c}$  后,即可求得利率的扩散部分  $\{u_t\}$ :

$$u_t = \frac{1}{\sigma} (r_t - (\hat{r}_t + \hat{c}r_{t-1})) I\{r_{t-1} \leq \hat{c}\} \quad (8)$$

显然  $\hat{c} = r_{t-1} u_t$ ,其中  $\{u_t\}, iid \sim N(0,1)$ 。

给定  $r_{t-1}$  下,  $\hat{c}$  的条件对数似然函数可近似表达为

$$-\frac{1}{2} \log(\sigma^2 r_{t-1}^2) - \frac{\hat{c}^2}{2\sigma^2 r_{t-1}^2} \quad (9)$$

对不同  $t$ ,上式进行求和可得到对数似然函数

$$l = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n [\log(\sigma^2 r_{t-1}^2) + \frac{\hat{c}^2}{r_{t-1}^2}] \quad (10)$$

最大化似然函数(10)即可得到  $\hat{\sigma}, \hat{c}$ 。

## 4 中国银行间市场 7 天回购利率实证研究

### 4.1 数据说明:

我们选择银行间国债市场中交易量最大的银行间 7 天内回购平均利率(R07D)作为市场利率的代表。数据跨期 1999 年 9 月至 2005 年 8 月,共计 294 个周数据。数据来源于中国债券信息网 <http://www.chinabond.com.cn>。数据的时序图见图 1 和图 2。

图 3 为银行间 7 天内回购利率与利率变化散点图,从图 3 可以直观的看出,利率与利率变化之间的关系并不是线性的,具有很强的非线性特征。我们接下来将尝试把利率状态空间分割成几个子空间,每个子空间上使用线性逼近的方法来刻画这种非线性特征。

### 4.2 参数估计结果

根据前面介绍的模型估计方法,TCCLS 模型

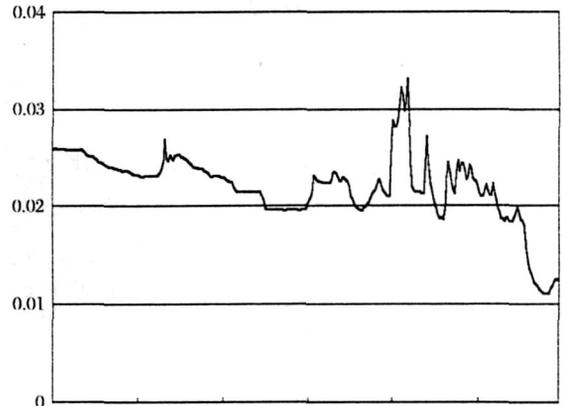


图 1 银行间 7 天内回购平均利率 ( $r_t$ ) 走势图

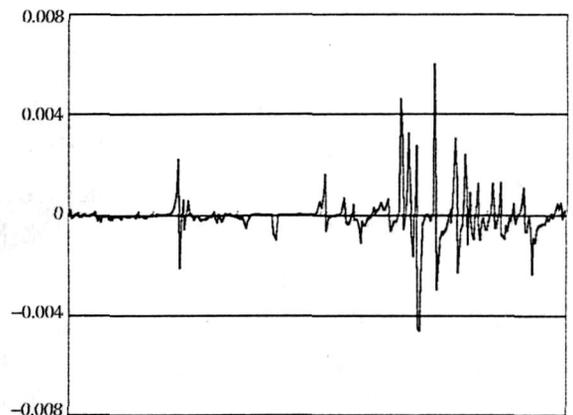


图 2 利率变化 ( $dr_t = r_{t+1} - r_t$ ) 走势图

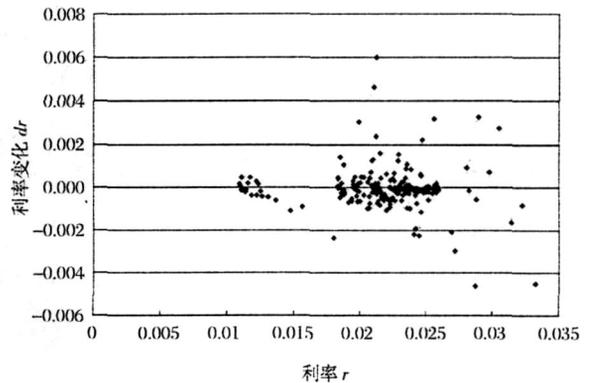


图 3 银行间 7 天内回购利率与利率变化散点图  
参数估计结果如下表:

表 1 TCCLS 模型参数估计结果

TCCLS	门限参数 $c$				
$r < c$	-0.009	0.335	1.387	1.430	0.021
$r > c$	0.123	-5.307			

为了和 CKLS 模型做比较,我们采用 Nowman (1997)<sup>[12]</sup> 中的极大似然估计方法对中国银行间市场 7 天回购利率(数据同上)估计的 CKLS 模型(具体参数估计方法参考 Nowman(1997)):  $dr = (\dots + r) dt + \sigma r dz$ ,估计参数结果如下:

表 2 CKLS 模型参数估计结果

Models				
CKLS	0.020	- 1.066	0.913	1.315

对于利率扩散模型的四个参数,其中特别重要的是  $\alpha$  值和  $\beta$  值。 $\alpha$  值为负值,意味着利率变化有均值回复特征。 $\beta$  值又称为利率敏感系数, $\beta$  值大于 1,说明利率波动率的水平效应显著,对利率水平具有较高敏感性。

从 CKLS 模型的估计参数来看, $\alpha$  值为负值,这意味着整体来看利率变化有均值回复特征;利率敏感系数  $\beta$  值大于 1,这说明中国利率波动率的水平效应显著。

从 TCKLS 模型的估计参数来看,我们发现,利率处于较低水平与较高水平时,均值回复特性有较大的区别。当利率低于门限值 0.021,即处于较低水平时, $\alpha$  值为正值,即利率变化没有均值回复特征;而当利率高于门限值 0.021,即处于较高水平时, $\alpha$  值为负值,利率变化的均值回复特征显著。这表明利率期限结构模型的漂移项的确存在非线性性,利率均值回复的程度在不同的利率水平上呈现出不同的特点。TCKLS 的利率敏感系数  $\beta$  值大于 1,和 CKLS 模型比较一致。

### 4.3 广义似然比检验

TCKLS 模型是否优于 CKLS 模型,我们对两个模型进行广义似然比检验。原假设  $H_0$  和对立假设  $H_1$  分别是:

$$H_0: r_t = r_t - r_{t-1} = \alpha + \beta r_{t-1} + \epsilon_t$$

$$H_1: r_t = \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \beta_i r_{t-1} + \epsilon_t) I\{r_{t-1} \in A_i\}$$

其中,分割  $\{A_i\}$  为:  $\{(-\infty, c), [c, +\infty)\}$ 。  
广义似然比统计量为:

$$T = \frac{n}{2} \log \frac{RSS_0}{RSS_1} \tag{11}$$

其中,  $RSS_0 = \sum_{t=1}^n [r_t - (\alpha + \beta r_{t-1})]^2$ ;  $RSS_1 = \sum_{i=1}^k \sum_{t=1}^n [r_t - (\alpha_i + \beta_i r_{t-1})]^2 I\{r_{t-1} \in A_i\}$ 。

为了求出统计量  $T$  的 p - value,需要知道原假设下  $T$  的分布。这自然会产生一个问题:在原假设下,统计量  $T$  的渐进分布是否依赖于参数。但分布的解析形式很难求,我们可以通过 bootstrap 方法来估计分布。Fan, Zhang, Zhang (2001)<sup>[13]</sup> 证明了,对于不同的参数的选择,广义似然比统计量在原假设下的渐进分布一阶不依赖于原假设模型下的参

数。这说明,在我们的检验中, $T$  在原假设模型下的分布并不严重依赖于参数  $\alpha$ 、 $\beta$  的值,只要把它们设置为比较合理的值, $T$  的分布就可以被很好的模拟出来。

对于给定的数据集,不能确定原假设是否成立。我们不对  $\{\epsilon_t\}$  的分布加任何限制,因此采用非参数的条件自助法(bootstrap),Fan, Yao (2003)<sup>[14]</sup> 给出了算法的步骤:

(1) 从 TCKLS 模型所得的中心化残差  $\{\hat{\epsilon}_t - \bar{\epsilon}\}_{t=1}^n$  的经验分布生产自助法残差  $\{\epsilon_t^*\}_{t=1}^n$ ,其中  $\bar{\epsilon}$  是  $\{\epsilon_t\}$  的平均。构造自助法样本如下:  $X_t^* = r_{t-1}$ ;  $Y_t^* = \alpha + \beta r_{t-1} + \epsilon_t^*$ 。

(2) 基于自助法样本  $(X_t^*, Y_t^*)$ ,计算检验统计量  $T^* = \frac{n}{2} \log \frac{RSS_0^*}{RSS_1^*}$ 。

(3) 重复以上两个步骤多次,用  $\{T^*\}$  的经验分布作为广义似然比统计量  $T$  在原假设下分布的近似。

(4) 用  $\{T^*\}$  大于统计量  $T$  的百分比作为检验的 p 值的估计。

检验结果得到统计量  $T$  的 p - value = 0.084。在 0.1 的显著水平下可以拒绝原假设。这表明,门限 CKLS 模型能较好的刻画利率期限结构模型中漂移项的非线性性,在 0.1 的显著水平下优于 CKLS 模型。

## 5 TCKLS 模型与制度转换模型(Regime - Switching Model) 的比较

### 5.1 制度转换模型

使用制度转换模型来刻画利率行为的最重要的经济动因是货币政策的变化。考虑一个具有  $k$  个制度的模型,  $S_t$  为指示变量,表示  $t$  时刻所在的制度,那么,基于制度转换的 CKLS 模型的形式为:

$$r_t = r_t - r_{t-1} = (S_t) \alpha + (S_t) \beta r_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t / \sigma_{\epsilon_t} \sim N(0, \sigma^2(S_t) r_{t-1}^{2(S_t)}) \tag{12}$$

其中,  $S_t = i, i = 1, 2, \dots, k$ 。

制度转换模型的重要特征是:不同结构的制度伴随着某种随时间变化的概率而出现,而制度转换模型作为一种新的建模方法有很多优点:第一,越来越多的实证表明,短期利率与长期利率的变动过程具有随机制度转换的特点。第二,经济环境和经济政策的改变会影响利率的制度转换。第三,利率制度转换模型能够捕捉到利率变动中的非线性特征。

### 5.2 TCKLS 模型与制度转换模型比较

TCCLS 模型与制度转换模型都刻画了利率变动中的非线性性,但两者是有区别的。其主要区别在于:

一、TCCLS 模型通过分割状态空间建模非线性,平稳性可以被保持。制度转换模型解释由于经济周期或货币政策的变化导致利率的随机行为随时间发生突变的现象,其制度转换按时间发生,其结果常常导致非平稳过程。

二、制度转换模型假设制度变化的时点,即在什么时间发生制度的转换与状态变量  $s_t$  有关,  $s_t$  的选择需要先根据实际的经济环境和考虑各种影响利率的政策的变化后作出判断,不同的人有可能会有不同的结论,带有一定的主观性。而 TCCLS 模型的门限值的确定是根据最小预报误差的原则,由实际利率数据求得。描述的是当利率超过某一个水平时,利率变动的模式会发生变化的情况。

## 6 结语

本文应用门限模型对利率期限结构模型中漂移项的非线性性进行建模,提出 TCCLS 模型。基于自助法(bootstrap)的广义似然比检验表明:门限 CCLS 模型能较好的刻画利率期限结构模型中漂移项的非线性性,在 0.1 的显著水平下优于 CCLS 模型。应该指出的是,本文主要对利率模型漂移函数的非线性性进行建模,而 Bali 和 Wu(2006)<sup>[4]</sup>指出,漂移的非线性性和扩散函数的形式有关,对扩散函数中用 GARCH 模型对波动率进行建模可减轻漂移的非线性性,所以,考虑模型中扩散函数更加灵活多变的波动率形式是一个可进一步研究的方向。

## 参考文献:

[1] Ait-Sahalia Y. Testing Continuous-Time Models of the

Spot Interest Rate [J]. Review of Financial studies, 1996, 9:385 - 426.

- [2] Stanton, R. A nonparametric model of term structure dynamics and the market price of interest rate risk [J]. The Journal of Finance, 1997, 52:1973 - 2002.
- [3] 李和金,李湛,李为冰. 非参数利率期限结构模型的理论及实证研究 [J]. 数量经济技术经济研究, 2002, 2:48 - 51
- [4] Bali, T. G., Wu, L. A Comprehensive Analysis of the Short-term Interest-rate Dynamics [J]. Journal of Banking and Finance, 2006, 30:1269 - 1290.
- [5] Demirtas, K. O. Nonlinear Asymmetric Models Of The Short-Term Interest Rate [J]. Journal of Futures Markets, 2006, 26: 869 - 894.
- [6] Takamizawa, H. Is Nonlinear Drift Implied by the Short End of the Term Structure? [J]. The Review of Financial Studies, 2008, 21: 311 - 346.
- [7] Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A., Sanders, A. B. An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate [J]. Journal of Finance, 1992, 47: 1209 - 1227.
- [8] Gray S F. Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process [J]. Journal of Financial Economics, 1996, 42:27 - 62.
- [9] Hamilton J D. Rational Expectations Econometric Analysis of Changes in Regime: An Investigation of the Term Structure of Interest Rates [J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1988, 12:385 - 423.
- [10] 谢赤,钟羽. 关于制度转换 Vasicek 利率期限结构模型 [J]. 科学技术与工程, 2004, 4(9):798 - 803.
- [11] Tong, H. Threshold Models in Non-linear Time Series Analysis [M]. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [12] Nowman, B. Gaussian Estimation of Single-Factor Continuous Time Models of the Term Structure of Interest Rates [J]. Journal of Finance, 1997, 52: 1695 - 1706.
- [13] Fan, J., Zhang, C. M. and Zhang, J. Generalized Likelihood Ratio Statistics and Wilks Phenomenon [J]. The Annals of Statistics, 2001, 29:153 - 193.
- [14] Fan, J., Yao, Q. Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods [M]. Springer-Verlag, New York, 2003:406 - 410.

## A Nonlinear Model of Term Structure Dynamics

PAN Wan-bin<sup>1</sup>, TAO Li-bin<sup>2</sup>, MIAO Bai-qi<sup>1</sup>

(1. University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China;

2. School of Economics and Finance, The University of Hong Kong, Pokfulam Road, Hong Kong)

**Abstract:** The threshold model is employed to capture the nonlinearity of the drift term in the models of the term structure of interest rates. A generalized pseudo-likelihood ratio test is introduced to test the threshold CCLS model. The results show that the threshold CCLS model can better describe the nonlinearity of the drift term than CCLS model at 0.1 significant level.

**Key words:** threshold model; CCLS model; nonlinear; the generalized pseudo-likelihood ratio test