翟振和，孙中苗. 基于配置法的局部重力场延拓模型构建与应用分析. 地球物理学报，2009，**52**(7)：1700～1706，DOI：10.3969/j.issn.0001-5733.2009.07.004

Zhai Z H, Sun Z M. Continuation model construction and application analysis of local gravity field based on least square collocation. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2009, **52**(7)：1700～1706，DOI：10.3969/j.issn.0001-5733.2009.07.004

基于配置法的局部重力场延拓模型构建与应用分析

翟振和[1,2]，孙中苗[2]

1 信息工程大学测绘学院，郑州 450052

2 西安测绘研究所，西安 710054

摘　要　在大地坐标系下利用 Forsberg 局部扰动位协方差模型（即 DPM 模型）导出了实用的局部重力异常协方差模型（即 GAC 模型）和局部扰动重力协方差模型（即 GDC 模型），两种模型形式完全一致. 针对 GAC 模型，提出了两种模型参数的拟合方法，即按照泊松积分向上延拓获得的不同高度数据进行拟合以及按照测量区域的平面实测数据进行拟合，通过某地区的实测数据检验得出两种参数拟合方法得到的参数值相差不大，这种差别在向上和向下延拓过程中的影响可以忽略. 依据本文的算例，GAC 模型作为配置法的协方差模型用于延拓时，其向上延拓的精度在 1.8×10^{-5} m·s^{-2}左右，向下延拓的精度在 5×10^{-5} m·s^{-2}左右，完全满足局部重力场在中等山区的延拓要求. 通过对不同高度下 GAC 模型用于延拓效果的对比，可以得出基于 GAC 模型的延拓精度随着高度的增加而衰减，在满足测量精度要求下其最大向下延拓高度约为 7 km. 总体而言，本文推导的 GAC 模型能够很好地利用地形数据，较好地满足了航空重力测量在局部重力场的延拓要求.

关键词　配置法，局部重力场，向上延拓，向下延拓，协方差模型

DOI：10.3969/j.issn.0001-5733.2009.07.004　　**中图分类号**　P223　　**收稿日期** 2008-09-03，2009-06-09 收修定稿

Continuation model construction and application analysis of local gravity field based on least square collocation

ZHAI Zhen-He[1,2], SUN Zhong-Miao[2]

1 *Institute of Surveying and Mapping of Information Engineering University, Zhengzhou* 450052, *China*

2 *Xi'an Institute of Surveying and Mapping, Xi'an* 710054, *China*

Abstract　Under the geodetic coordinate, the covariance model of gravity anomaly (GAC) and gravity disturbance (GDC) is respectively derived from the covariance model of disturbing potential (DPM) which is established by Forsberg, the results show that both model have the same expression formula. Two methods for parameter estimation of GAC model are described in detail. According to the actual airborne and land surveying, the accuracy of upward continuation based on the GAC model is about 1.8×10^{-5} m·s^{-2}, and the accuracy of downward continuation is about 5×10^{-5} m·s^{-2}. Based on the continuation result of different height, the model's application range is determined as about 7 kilometers. It can be generally concluded that the DPM model and GAC model can fulfill the continuation requirements of airborne surveying.

Keywords　Least square collocation, Local gravity field, Upward continuation, Downward continuation, Covariance model

---

作者简介　翟振和，男，1980 年生，西安测绘研究所工程师，主要从事航空重力数据处理和重力场反演. E-mail：zhaizhenhe1980@163.com

1 引 言

由于测量地球重力场的手段的不同,使得各种测量数据分布于不同高度,为了满足反演重力场的需求,常常要将各种数据归算到同一界面,这便形成了重力场的延拓问题,包括向上延拓和向下延拓.向上延拓具有严密的理论模型,实践中较易实现,但向下延拓是不稳定的,在理论上是个不适定问题,具体来讲就是观测方程是病态方程.处理病态问题的方法包括正则化算法、最小二乘配置法、FFT 法、迭代法等,对此国内外许多学者进行了广泛而深入的研究[1~6].此外基于奇异值分解技术的病态观测方程直接解算方法引起了越来越多的关注,王正杰、归庆明等对截断奇异值的方法进行了深入的研究[7,8],并取得了一定的效果.从实际考虑,局部重力场中的向下延拓问题主要体现在航空重力数据的向下延拓处理,对此,王兴涛等学者利用包括正则化法、直接代表法、虚拟点质量模型等做了深入的分析和对比研究[9,10].在众多的延拓方法中,正则化方法精度最高,但正则化参数的选取较为复杂,直接代表法使用灵活但需要测区内有详细的地形信息,点质量模型受边界效应影响较大,奇异值分解法只对一些特殊的病态问题有效.相比较而言,配置法的优势在于兼具向上延拓和向下延拓的双重功能,在延拓过程中可以融入新的重力数据且能有效估计和改正系统偏差.丹麦学者 R. Forsberg 较早地将配置法运用在航空重力数据的向下延拓中,但更多的是以结论形式给出,并未就具体建立过程做出详细分析,因此本文将从配置法入手构建用于局部重力场的延拓模型,并利用我国自行开发研制的航空重力测量系统(CHAGS)的实测数据对其应用效果做分析比较.

2 基于配置法的延拓模型

配置法的核心思想就是构造准确有效的协方差模型,而后利用这个模型完成延拓或估计系统偏差等功能,实际上配置法用于延拓的过程相当于利用已测信号推估一定高度的未测信号,这也是最小二乘配置的基本原理,本文将以重力异常数据的延拓为例建立延拓模型,延拓模型包括两部分,即函数模型和随机模型.

首先建立函数模型

$$L = \boldsymbol{A}X + \boldsymbol{F}\boldsymbol{Y} + \Delta, \tag{1}$$

式中,L 表示观测值,X 表示系统性参数,$\boldsymbol{A}$ 表示系数矩阵,Δ 表示观测噪声,$\boldsymbol{F}=[B \quad 0]$,$\boldsymbol{B}$ 表示已测信号的系数矩阵,$\boldsymbol{Y}=[\Delta g \quad \Delta g']^{\mathrm{T}}$,其中 Δg 为已测重力信号,$\Delta g'$为未测重力信号.

随机模型为

$$E(\Delta) = 0, E(Y) = 0, C_L = \boldsymbol{B}C_{\Delta g}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} + C_{\Delta}, \tag{2}$$

其中 E 表示取数学期望,C_L 表示观测值的自协方差,$C_{\Delta g}$表示已测重力信号的自协方差.

通过求解得系统性参数的估值为

$$\overline{X}_A = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}C_L^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}C_L^{-1}L, \tag{3}$$

已测重力信号的滤波值

$$\overline{\Delta g} = C_{\Delta g}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}C_L^{-1}(L - \boldsymbol{A}\overline{X}_A), \tag{4}$$

未测重力信号估值为

$$\overline{\Delta g}' = C_{\Delta g'\Delta g}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}C_L^{-1}(L - \boldsymbol{A}\overline{X}_A). \tag{5}$$

其中 $C_{\Delta g'\Delta g}$ 表示未测重力信号与已测重力信号的互协方差,而噪声协方差 C_{Δ} 则根据观测数据的实际情况分配一定的量值,式(5)即为最终的延拓公式,根据该公式即可完成向上延拓和向下延拓.

2.1 局部扰动位协方差模型的构建

从式(5)可以看出,为了建立延拓模型必须首先构建出能够反映局部重力场空间变化的重力信号协方差模型,而所有的扰动重力场信号都可以通过扰动位求得,因此首先应构造出满足延拓需要的局部扰动位模型,而后利用扰动场元的线性关系获得扰动场元间的协方差模型.相比较于全球协方差模型的复杂性,Forsberg(1987)[1]根据多个地区的实测重力数据建立了一个较为实用的扰动位协方差模型.

$$C_{TT}(r_i, Z_i) = f\sum_{i=0}^{3}\alpha_i\left[\frac{3}{4}Z_i r_i + \left(\frac{1}{4}r_i^2 - \frac{3}{4}Z_i^2\right)\ln(Z_i + r_i)\right], \tag{6}$$

式中

$Z_i = Z_p + Z_Q + D_i$, $i=0,1,2,3$, P, Q 表示空间两点.

$D_i = D + iU$, D, U 分别表示高频衰减因子和低频衰减因子.

$r_i = \sqrt{s^2 + Z_i^2}$, s 表示空间两点间的平面距离.

$s = \sqrt{(X_p - X_q)^2 + (Y_p - Y_q)^2}$, X, Y, Z 表示站心坐标系中一点的三维坐标.

为了更加深入地了解该模型,有必要对其建立过程进行简单的概述.

首先 Z 方向的重力数据协方差 $C_{z,z'}$ 在频域符合以下经验公式:

$$\phi_{z,z'}(\omega) \propto \frac{1}{\omega^2}\mathrm{e}^{-\omega D}, \tag{7}$$

式中 $\phi_{z,z'}(\omega)$ 表示协方差 $C_{z,z'}$ 在频域的形式，$\propto$ 表示正比关系，D 表示高频衰减因子.

由于式(7)在低频部分含有大量能量，使得由频域转换至空域时会导致积分无穷大，因此将式(7)进一步改进为

$$\phi_{z,z'}(\omega)=f(1-\mathrm{e}^{-\omega U})^n\frac{1}{\omega^2}\mathrm{e}^{-\omega D}, \tag{8}$$

式中 f 表示比例系数，U 表示低频衰减因子，为了避免协方差函数的奇异，n 必须满足 $n\geqslant 3$ 的条件，考虑到描述方便，因此 n 取值为 3. 此时将式(8)展开得：

$$\begin{aligned}&\phi_{z,z'}(\omega)\\&=(\mathrm{e}^{-\omega D}-3\mathrm{e}^{-\omega(D+U)}+3\mathrm{e}^{-\omega(D+2U)}-\mathrm{e}^{-\omega(D+3U)})\frac{f}{\omega^2}\\&=f\sum_{i=0}^{3}\alpha_i\frac{\mathrm{e}^{-\omega(D+iU)}}{\omega^2},\end{aligned} \tag{9}$$

式中 $\alpha_0=1,\alpha_1=-3,\alpha_2=3,\alpha_3=-1$.

将式(9)转换至空域并积分得到扰动位协方差的空域形式，即式(6). 实际上 Forsberg 建立的协方差模型不是真正意义上的三维空间协方差模型，只是近似三维的实用模型，因此 Forsberg 也将自己建立的模型称为平面对数协方差模型.

考虑到运用地形数据以及大地坐标的实用性，将式(6)用大地坐标替换得到局部扰动位模型，简称 DPM 模型：

$$\begin{aligned}&C_{TT}(r_i,H_i)\\&=f\sum_{i=0}^{3}\alpha_i\left[\frac{3}{4}H_ir_i+\left(\frac{1}{4}r_i^2-\frac{3}{4}H_i^2\right)\ln(H_i+r_i)\right],\end{aligned} \tag{10}$$

式中，f，α 具体含义同上式，$H_i=H_p+H_Q+D_i$，H 代表大地高，$D_i=D+iU$，$i=0,1,2,3$，D，U 含义同上；$r_i=\sqrt{S^2+H_i^2}$，S 表示空间两点间的平面距离；$S=a\sqrt{(\varphi_p-\varphi_q)^2+(\lambda_p-\lambda_q)^2}$，$\varphi$，$\lambda$ 分别为两点的纬度和经度，a 为经纬度与距离的转换参数.

2.2 局部重力异常协方差模型的构建

首先考虑扰动位在大地水准面上的基本微分方程：

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{P_0}-\frac{1}{\gamma_0}\left(\frac{\partial\gamma_0}{\partial n}\right)_{Q_0}T_{P_0}=-\Delta g_{P_0}, \tag{11}$$

式中 P_0 是大地水准面上的一点，Q_0 是对应于 P_0 椭球面上的一点，γ_0 表示 Q_0 点的正常重力. n 方向表示正常重力的反方向，在椭球面上大地高 H 方向与 n 方向正好相同. 因此

$$\frac{\partial T}{\partial H}=\frac{\partial T}{\partial n},\ \frac{\partial\gamma_0}{\partial H}=\frac{\partial\gamma_0}{\partial n}, \tag{12}$$

由于正常重力可近似为 $\gamma_0=\dfrac{FM}{\rho^2}$，由此可得

$$\frac{\partial\gamma_0}{\partial H}=\frac{2\gamma_0}{\rho}T, \tag{13}$$

式中 ρ 表示地心向径，FM 表示引力常数与地球质量的乘积.

将式(12)、(13)代入式(11)得重力异常与扰动位间的关系：

$$\Delta g=-\frac{\partial T}{\partial H}-\frac{2}{\rho}T. \tag{14}$$

根据扰动场元间的线性关系按照协方差传播定律可得重力异常间协方差为

$$\begin{aligned}C(\Delta g_p,\Delta g_q)&=COV\left(-\frac{\partial T}{\partial H_p}-\frac{2}{\rho_p}T,-\frac{\partial T}{\partial H_q}-\frac{2}{\rho_q}T\right)\\&=\frac{\partial^2C_{TT}}{\partial H_p\partial H_q}+\frac{2}{\rho_q}\frac{\partial C_{TT}}{\partial H_p}+\frac{2}{\rho_p}\frac{\partial C_{TT}}{\partial H_q}\\&\quad+\frac{4}{\rho_p\rho_q}C_{TT},\end{aligned} \tag{15}$$

C_{TT} 表示扰动位协方差模型，ρ_p，ρ_q 分别是 p，q 两点的地心向径.

考虑到 $\dfrac{\partial C_{TT}}{\partial H_p}=\dfrac{\partial C_{TT}}{\partial H_q}=\dfrac{\partial C_{TT}}{\partial H_i}$，以及 DPM 模型的一般形式，即

$$\begin{aligned}&C_{TT}(r_i,H_i)\\&=\left[\frac{3}{4}H_ir_i+\left(\frac{1}{4}r_i^2-\frac{3}{4}H_i^2\right)\ln(H_i+r_i)\right],\end{aligned} \tag{16}$$

对 DPM 模型的一般形式求导得：

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_{TT}}{\partial H_i}&=\frac{3}{4}r_i+\frac{3}{4}H_i\frac{H_i}{r_i}\\&+\left[\frac{1}{2}H_i-\frac{3}{2}H_i\right]\ln(H_i+r_i)+\left[\frac{1}{4}r_i^2-\frac{3}{4}H_i^2\right]\frac{1}{r_i}\\&=r_i-H_i\ln(H_i+r_i),\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2C_{TT}}{\partial H_i^2}&=\frac{H_i}{r_i}-\ln(H_i+r_i)-\frac{H_i}{H_i+r_i}\left(1+\frac{H_i}{r_i}\right)\\&=-\ln(H_i+r_i).\end{aligned} \tag{18}$$

将式(17)，(18)代入式(15)得到局部重力异常协方差的一般形式：

$$\begin{aligned}C_{\Delta g\Delta g}(r_i,H_i)&=\ln(H_i+r_i)\left[\frac{r_i^2-3H_i^2}{\rho_p\rho_q}-\frac{2H_i}{\rho_p}\right.\\&\left.-\frac{2H_i}{\rho_q}-1\right]+\left[\frac{2r_i(\rho_p+\rho_q)+3H_ir_i}{\rho_p\rho_q}\right],\end{aligned} \tag{19}$$

由式(19)可得重力异常协方差的完整形式为：

$$C(\Delta g_p,\Delta g_q)=f\sum_{i=0}^{3}\alpha_iC_{\Delta g\Delta g}(r_i,H_i). \tag{20}$$

式(20)中 f，α_i 含义同上，通过式(20)可以发现该模

型虽然严密，但模型展开后过于复杂，既不利于 f 的确定，也不利于实际的应用，若能在保证效果的前提下进行简化，则更具有实用价值. 由于局部重力场的区域有限，再加上航空重力测量高度有限，因此 $\frac{r}{\rho}$，$\frac{H}{\rho}$的最大量级一般在 0.1 左右，再加上模型的四个部分会有一定的抵消，因此这个量级对结果应该没有大的影响，实际计算也证明对最终结果的影响在 1/100 量级，因此在模型中可以忽略有关这两部分的影响，通过进一步简化后得到局部重力异常协方差模型的完整形式为：

$$C(\Delta g_p,\Delta g_q)=f\sum_{i=0}^{3}\alpha_i(-\ln(H_i+r_i)). \tag{21}$$

式(21)即为简化后的局部重力异常的协方差实用模型，为了描述方便，本文简称 GAC 模型.

关于重力异常的协方差模型，Forberg 并未详细推导过，但其在 2002 年会议文献中提出的局部重力异常协方差模型[11,12]与本文推导的 GAC 协方差模型非常相似：

$$C(\Delta g_p,\Delta g_q)=-f\sum_{i=0}^{3}\alpha_i\ln(D_i+r_i), \tag{22}$$

式中 $r_i=\sqrt{S^2+(D_i+H_p+H_q)^2}$，其他符号意义同上.

2.3 局部扰动重力协方差模型的构建

和重力异常数据一样，扰动重力数据也是实际常用的数据类型之一，本节将在大地坐标系下按照上述思想推导扰动重力协方差模型，扰动重力与扰动位间的关系为

$$\delta g=g_p-\gamma_p=-\left(\frac{\partial W}{\partial n}-\frac{\partial U}{\partial n}\right)=-\frac{\partial T}{\partial n}, \tag{23}$$

考虑到椭球面上大地高 H 方向与 n 方向正好相同，因此

$$\delta g=-\frac{\partial T}{\partial H}, \tag{24}$$

按照协方差传播定律可得空间 p，q 两点扰动重力协方差为

$$C_{\delta g_p,\delta g_q}=\frac{\partial^2 C_{TT}}{\partial H_p\partial H_q}. \tag{25}$$

将局部扰动位协方差模型代入上式得到一般形式：

$$C_{\delta g_p,\delta g_q}=-\ln(H_i+r_i), \tag{26}$$

其完整形式为

$$C(\delta g_p,\delta g_q)=f\sum_{i=0}^{3}\alpha_i C_{\delta g\delta g}(r_i,H). \tag{27}$$

式(27)即为扰动重力协方差的完整形式，本文简称 GDC 模型，式中符号意义如前所示.

将 GDC 模型与 GAC 模型对比发现，两者形式完全一致，因此，GDC 模型参数的拟合以及使用也与 GAC 模型一致，这样在大地坐标下，就将两类重力数据的协方差统一起来，这对于实际应用而言极其方便.

2.4 GAC 模型参数的拟合

由于重力异常数据是常用的数据类型，因此本文将利用实测数据建立 GAC 模型，为了建立完整的 GAC 模型还必须要确定模型中的三个参数，即比例系数 f 以及高频衰减因子 D 和低频衰减因子 U. 从严格意义上讲，应该利用测量区域不同层面上的实测重力数据按照协方差定义建立空间一定距离上的离散协方差值，而后利用这些离散值在某一准测下拟合 GAC 模型的参数. 假设测量区域有大量的地面重力数据，此时可以利用 Possion 积分将这些数据延拓到不同高度，而后按照上述思想进行拟合.

考虑实际的测量情况，在航空重力测量区域一般只有空中的测量数据，从 2.1 节也看到，本文采用的 DPM 模型是一个近似的空间协方差模型，为此为了方便实际应用，本文将航空重力数据视为平面数据，利用该平面的数据去拟合模型中的参数. 此时 GAC 模型与高度参数 H 无关，即 H_p、H_q 为常数，忽略此常数影响，则 GAC 模型的平面形式为：

$$\begin{aligned}C(\Delta g_p,\Delta g_q)_{\text{plane}}=&-f\ln\left(D+\sqrt{s^2+D^2}\right)\\&+3f\ln\left(D+U+\sqrt{s^2+(D+U)^2}\right)\\&-3f\ln\left(D+2U+\sqrt{s^2+(D+2U)^2}\right)\\&+f\ln\left(D+3U+\sqrt{s^2+(D+3U)^2}\right),\end{aligned} \tag{28}$$

考虑两点间平面距离为 0 的特殊情况，此时两点间的协方差等于该区域重力异常的方差$\overline{C_0}$，由此可以得到：

$$f=\overline{C_0}/\ln\left(\frac{D_1^3D_3}{D_0D_2^3}\right). \tag{29}$$

将式(29)代入式(28)中，则协方差参数的拟合转化为对 D、U 的确定. 首先建立平面上一定距离上协方差函数的离散值，对于格网数据，可以通过选取格网距离 ν 倍数相同的点的重力异常计算该距离上的协方差：

$$\begin{aligned}C(\nu)&=M(f^*\times f^*)\\&=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m-q}f_{ik}^*f_{i,k+q}^*+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n-q}f_{ik}^*f_{i+q,k}^*}{n\times(m-q)+(n-q)\times m},\end{aligned} \tag{30}$$

f^* 表示观测值与该地区平均值的差值，n，m 分别表

示格网的行数和列数,q 表示格网大小的整倍数,而且 q 只能取 n,m 中较小的一个,$q=0,1\cdots\min(n,m)-1$. 通过式(30)获得离散的协方差值后,就可以建立观测方程,求解 D 和 U,对于求解方法,本文选用的是非线性最小二乘拟合,求出 D 和 U 后就可以通过式(29)获得 f. 但是在实际应用中还应注意,若测量区域较小且分辨率较低,此时离散的协方差值将会随距离增大而变化剧烈,甚至会出现负值或与实际情况相反的变化趋势,利用这些数据进行拟合参数将会使参数的确定失去意义,为了解决这个问题,可以选取一些具有代表性的平面协方差模型,如高斯平面模型、Hirvonen 模型、Poisson 模型、2 次 Markov 模型等,利用这些模型改善离散协方差值带来的不利影响.

3 延拓模型的检验分析

为了检验 GAC 模型是否能够满足延拓的需要,本文将利用实测数据按照 Possion 积分法和配置法分别进行向上延拓和向下延拓的试验. 所采用的数据包括利用航空重力测量系统(CHAGS)获取的某中等山区 5′分辨率(大约 9 km)的航空重力实测数据(平均大地高为 3.4 km,范围 55′×1°15′)以及相应该区域的地面实测重力异常数据,地面数据的范围为 11°×11°(其中实测数据范围为 8°×11°,其余数据用 EGM96 模型填充),该区域地形数据较少范围为 2°×2°,分辨率 5 min.

3.1 参数拟合检验

首先利用泊松积分向上延拓的思想,将该地区的全部地面重力实测数据分别延拓至不同高度,延拓至空中数据范围为 1°×1°,高度间隔为 1 km,最高至 5 km. 通过这些不同高度的实测数据对 GAC 模型的参数进行拟合,本文称之为方法 1. 其次利用平面数据进行参数拟合的思想,分别利用地面的重力数据和航空重力数据(范围 55′×1°15′)拟合 GAC 模型参数,本文称之为方法 2、方法 3.

在利用不同高度数据拟合时,首先建立空间两点在不同高度和 H_l 不同水平距离 S_q(单位 km)的离散协方差值.

$$H_l = 3,4,5,6, l = 1,2,\cdots,4, \tag{31}$$

$$S_q = q\times 9,\ q = 0,1,2,\cdots,10, \tag{32}$$

$$C_{l,q} = M(f^*\times f^*) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m-q} f^*_{ik} f^*_{i,k+q} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n-q} f^*_{ik} f^*_{i+q,k}}{n\times(m-q)+(n-q)\times m}$$

$$n = 11 \quad m = 15, \tag{33}$$

f^* 仍表示某一平面观测值与该区域平均值的差值,此时该区域平均值为所有不同高度重力数据的平均值. 获取离散的协方差后,就可以将这些值作为 GAC 模型的观测值,建立观测方程进而求解三个未知参数 f、D、U. 观测方程为

$$C_{l,q} - f\sum_{i=0}^{3}\alpha_i(-\ln(H_i + r_i)) = 0. \tag{34}$$

由于观测方程本身为非线性方程,且模型本身相对复杂,当观测数据较多时,参数的确定转化为三元非线性方程组的求解,求解方法有二分法、弦截法、牛顿法等,本文选用牛顿法. 利用以上三种方法获得区域 GAC 模型的参数拟合值见表 1.

表 1 利用三种方法拟合 GAC 模型参数值

Table 1 The parameters of GAC model determined by three methods

各种方法	区域方差 $(10^{-5}\mathrm{m\cdot s^{-2}})^2$	高频衰减因子(km)	低频衰减因子(km)	比例系数
方法 1		4.1	105.3	269.6
方法 2	867.2	2.1	102.2	294.8
方法 3	736.5	2.8	109.8	269.4

3.2 向上、向下延拓检核

向上延拓检核就是利用延拓模型将地面实测数据 $\Delta_{g\mathrm{Land}}$(数据范围 2°×2°)延拓至一定高度(航空重力测量高度 3.4 km),形成空中相应区域的空中重力异常数据 $\Delta_{g\mathrm{Air}}$,同时利用泊松积分(利用全部地面数据)向上延拓作为标准,对 GAC 模型的效果进行检验. 不考虑系统性参数及观测噪声的影响,由式(5)可得向上延拓数学模型为

$$\Delta_{g\mathrm{Air}} = C_{\mathrm{AirLand}}(C_{\mathrm{LandLand}})^{-1}\Delta_{g\mathrm{Land}}, \tag{35}$$

式中 C_{AirLand} 表示 $\Delta_{g\mathrm{Air}}$ 与 $\Delta_{g\mathrm{Land}}$ 的互协方差,C_{LandLand} 表示 $\Delta_{g\mathrm{Land}}$ 与 $\Delta_{g\mathrm{Land}}$ 的自协方差,两者都按照 GAC 模型进行计算. 为了检验不同参数在向上延拓中差别,分别利用方法 1、方法 2 获得的参数进行向上延拓并与 Possion 积分延拓结果比较(见表 2).

表 2 基于两种参数的向上延拓结果比较

(单位:$10^{-5}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$)

Table 2 The comparison between GAC model and Possion model in upward continuation based on two kinds of parameters

不同参数	差值均值	标准偏差	最小差值	最大差值
方法 1 参数	0.3	1.7	−4.8	4.9
方法 2 参数	0.3	1.8	−4.7	5.1

为了验证向下延拓的效果,对航空重力实测数据 $\Delta_{g\mathrm{Air}}$(测高平均为 3.4 km)进行向下延拓,并与地面重力异常数据比较,不考虑系统性参数的影响,由式(5)可得向下延拓的数学模型为

$$\Delta_{g\mathrm{Land}} = C_{\mathrm{LandAir}}(C_{\mathrm{AirAir}} + C_{\mathrm{Air}\Delta})^{-1}\Delta_{g\mathrm{Air}}, \quad (36)$$

式中 $C_{\mathrm{Air}\Delta}$ 表示航空重力实测数据的观测噪声的协方差,根据航空重力测量的实际情况,观测噪声标准差取 $3\times10^{-5}\ \mathrm{m/s^2}$. C_{LandAir} 表示 $\Delta_{g\mathrm{Land}}$ 与 $\Delta_{g\mathrm{Air}}$ 的互协方差,C_{AirAir} 表示航空重力实测数据的自协方差,两者都按照 GAC 模型进行计算,其中计算 C_{LandAir} 时,可将 $\Delta_{g\mathrm{Air}}$ 数据的高程数据统设为 3.4 km. 分别利用方法 1、方法 3 的参数及 GAC 模型进行向下延拓并与地面已测数据比较,结果见表 3.

表 3　基于两种参数的向下延拓结果比较
(单位:$10^{-5}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$)

Table 3　The results of downward continuation according to GAC model based on two kinds of parameters

不同参数	差值均值	标准偏差	最小差值	最大差值
方法 1 参数	4.9	5.1	−7.1	22.3
方法 3 参数	4.8	5.1	−8.1	23.0

从表 2 可以看出,以泊松积分向上延拓方法为基准,则利用 GAC 模型向上延拓的精度在 $1.7\times10^{-5}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 左右,选用的两组参数对最终结果影响不大. 若以地面重力数据为基准,则从表 3 的数据得出利用 GAC 模型向下延拓的外部检核精度在 $5\times10^{-5}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 左右,但是从延拓结果看,存在一定的系统偏差. 相比较于正则化方法,配置法在该区域获得的延拓结果略差,但对于山区而言,这一精度已经能够满足实际测量规范的要求($5\times10^{-5}\sim7\times10^{-5}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$),同时在向下延拓过程中,两组参数取得的结果基本一致,因此,从实践上证明了 2.4 节提出的基于平面观测数据拟合模型参数的思路是可行的.

3.3　延拓模型的适用性分析

从前面的叙述中可以看出,DPM 模型是一个近似三维的空间协方差模型,虽然通过上节的计算验证了向下延拓的精度,但在实际应用中,该模型必然受到相应的限制,为了验证其适用范围,需要对模型的延拓精度进行分析讨论,即检验模型自身在延拓过程中的精度,以此论证其适用范围. 为此,首先利用 GAC 模型将地面数据(2°×2°)延拓至一定高度,分别是 3、4、5、7、8 km,延拓至空中数据范围为 1°30′×1°30′,并认为地面数据不含观测噪声,而后再利用该模型将空中数据延拓至地面的同样范围. 在向下延拓过程中,将向上延拓误差和模拟观测误差($4\times10^{-5}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$)作为空中数据的观测噪声标准差,并对每一高度的数据分别拟合模型参数,通过向下延拓数据与地面已测数据的比较确定 GAC 模型在不同高度下的延拓误差. 最终的比较结果见表 4.

表 4　不同延拓高度下的延拓效果统计(单位:$10^{-5}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$)

Table 4　The results of downward continuation under different geodetic height

延拓高度(km)	差值均值	标准偏差	最小差值	最大差值
3	0.1	2.8	−8.4	8.7
4	0.2	4.1	−12.5	12.5
5	0.2	5.1	−16.1	15.1
7	0.3	7.4	−24.3	19.3
8	0.2	8.0	−26.9	19.9

从表 4 可以看出,随着延拓高度的上升,向下延拓精度总体呈下降趋势,当延拓高度达到 7 km 时,GAC 模型的延拓误差已经超出了 $7\times10^{-5}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. 而 5 km 以下,假设航空重力测量的精度在 $4\times10^{-5}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 左右,则利用 GAC 模型进行延拓会取得较好的效果. 综合以上考虑,在本文算例的条件下,GAC 模型在中等山区的最大向下延拓高度应小于 7 km,这也从另一方面说明本文使用的 DPM 扰动位协方差模型只适合于有限高度,因此也可以理解为一个平面的协方差模型.

4　结　论

本文利用 Forsberg 扰动位协方差模型将配置法成功运用于局部重力场的延拓问题,在此过程中,建立了重力异常、扰动重力协方差模型,并对模型参数的拟合进行了深入的讨论,具体总结如下:

(1)在大地坐标系利用 Forsberg 模型导出了实用的局部重力异常协方差模型(即 GAC 模型)和局部扰动重力协方差模型(即 GDC 模型),通过比较发现两者形式完全一致,因此在实际研究中可以灵活选取重力异常和扰动重力数据作为向下延拓的对象.

(2)针对 GAC 模型的三个参数,分别按照两种方法进行,其一是利用泊松积分向上延拓获得多个高度层的数据,在获得离散协方差值基础上利用这些数据求解三元非线性方程组. 其二是将 GAC 模型改化为平面形式,而后直接使用航空重力实测数

据以及相应范围的地面实测数据,模拟二维的平面协方差模型,并按照非线性最小二乘拟合求解 GAC 模型的三个参数.通过两种方法比较发现,两组参数相差不大,在向上延拓和向下延拓计算中对最终结果的影响不大,因此在航空重力测区,没有地面实测数据的情况下,可以按照第二种方法进行参数拟合.

(3)利用 GAC 模型及拟合获得的参数按照配置法思想将某地区实测的航空重力数据进行向下延拓,通过与地面数据的比较可以得到向下延拓的精度在 $5\times10^{-5}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 左右,完全满足航空重力测量在山区的测量要求,但最终延拓结果中存在一定的系统偏差.

(4)通过对不同高度下 GAC 模型延拓效果的对比,可以得出 GAC 模型的延拓精度随着高度的增加而衰减,在目前山区的测量精度要求下,其最大向下延拓高度应小于 7 km.

总体而言,配置法用于局部重力场向上、向下延拓时能够满足测量规范要求,但是需要指出的是配置法使用的前提应当是能够构建准确的先验信息,而这需要大量实测数据的支持.当航空重力测量数据较少时,将会使其协方差函数的建立失去实际意义,从而无法满足向下延拓的要求.此外对配置法中协方差模型的选取以及延拓的效果还需要更多实际算例的检验和讨论.

参考文献(References)

[1] Rene Forsberg. A new covariance model for inertial gravimetry and gradiometry. *Journal of Geophysical Research*,1987,**92**(2):1305～1310

[2] 朱非洲.航空重力测量向下延拓技术[硕士论文].河南:信息工程大学测绘学院,2002
Zhu F Z. The methods of downward continuation about airborne gravimetry [Master′s thesis]. Henan: Institute of surveying and mapping of Information Engineering University,2002

[3] Michael Kern. An Analysis of the Combination and Downward Continuation of Satellite, Airborne and Terrestrial Gravity Data,UCGE REPORTS,2003

[4] 申文斌,鄢建国,晁定波.虚拟压缩恢复法在向下延拓问题中的应用.测绘信息与工程,2006,**31**(4):1～4
Shen W B,Yan J G,Chao D B. Application of the fictitious compress recovery approach in the downward continuation. *Journal of Geomatics* (in Chinese),2006,**31**(4):1～4

[5] 徐世浙.迭代法与 FFT 法位场向下延拓效果的比较.地球物理学报, 2007,**50**(1):285～289
Xu S Z. A comparison of efects between the iteration method and FFT for downward continuation of potential fields. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese),2007,**50**(1):285～289

[6] 张 皥,陈 琼,丛明日.航空重力测量数据向下延拓中空间协方差函数特性研究.测绘科学,2006,**31**(4):51～53
Zhang H, Chen Q, Cong M R. The trait research of covariance function in airborne gravimetry downward continuation. *Science of Surveying and Mapping* (in Chinese), 2006,**31**(4):51～53

[7] 王振杰,欧吉坤.一种新的病态问题奇异值修正方案及其在大地测量中的应用.自然科学进展,2004,**14**(6):672～676
Wang Z J, Ou J K. A new correction method for ill-posed problem in geodesy. *Processing in Natural Science* (in Chinese),2004,**14**(6):672～676

[8] 归庆明,郭建峰.病态平差模型直接解算方法的研究.大地测量与地球动力学, 2004,**24**(3):15～18
Gui Q M, Guo J F. Study on methods for solving ill-conditioned equation. *Journal of Geodesy and Geodynamics* (in Chinese), 2004,**24**(3):15～18

[9] 王兴涛,石 磐,朱非洲.航空重力测量数据向下延拓的正则化算法及其谱分解.测绘学报, 2004,**33**(1):33～37
Wang X T, Shi P, Zhu F Z. Regularization methods and spectral decomposition for the downward continuation of airborne gravity data. *Acta Geodaetica* (in Chinese), 2004, **33**(1):33～37

[10] 王兴涛, 夏哲仁, 石 磐等.航空重力测量数据向下延拓方法比较.地球物理学报,2004,**47**(6):1017～1022
Wang X T,Xia Z R,Shi P,et al. A comparison of different downward continuation methods for airborne gravity data. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2004,**47**(6):1017～1022

[11] Rene Forsberg. Downward continuation of airborne gravity data- an Arctic case story. In: Proceeding of the 3rd Meeting of the International Gravity and Geoid Commission. 2002. 26～30

[12] Tziavos I N, Andritsanos V D. Numerical investigation of downward continuation methods for airborne gravity data. GGSM 2004 IAG International Symposium Porto,Portugal, 2004. 119～124

(本文编辑 胡素芳)