姚 陈,蔡明刚. 任意空间取向 TI 弹性张量解析表述. 地球物理学报,2009,**52**(9):2345~2348,DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2009.09.019

Yao C, Cai M G. Analytical expression of TI elastic tensor with arbitrary orientation. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2009, **52**(9):2345~2348,DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2009.09.019

任意空间取向 TI 弹性张量解析表述

姚 陈,蔡明刚

中国地震局地质研究所,北京 100029

摘 要 本文理论给出任意空间取向 TI(ATI)四阶弹性张量的解析表述,其以 VTI 弹性常数及其简单组合为系数,包括各向同性项、TI 对称轴方向矢量分量的二次项和四次项,其中 TI 对称轴方向矢量可以在固定坐标系定义,也可以相对三维倾斜界面甚至相对波传播方向. 相比四阶张量变换法和 Bond 变换法,ATI 弹性张量能简洁而透明地为本构关系和波动方程提供四阶张量的所有元素. ATI 弹性张量能为诸多方面的理论研究提供支撑.

关键词 四阶张量变换,Bond 变换,ATI 弹性张量,TI 对称轴方向矢量

DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2009.09.019 **中图分类号** P315 **收稿日期** 2009-01-04,2009-06-18 收修定稿

Analytical expression of TI elastic tensor with arbitrary orientation

YAO Chen, CAI Ming-Gang

Institute of Geology, China Earthquake Administration, Beijing 100029, *China*

Abstract In this paper the analytical expression for elastic tensor of TI with arbitrary orientation (ATI) is given that has coefficients as combination of elastic constants of VTI and includes isotropic term, quadratic and fourth-order terms of the direction vector components of TI symmetry axis. Such direction vector of TI symmetry axis could be defined in the fixed coordinates, can also be relative to three dimensional boundaries of the media and even to wave propagation direction. In comparison with fourth order tensor transformation and Bond transformation, ATI elastic tensor can provide all its components in the constitutive relation and wave motion equation concisely and transparently for theoretical investigation in many aspects.

Keywords Fourth order tensor transformation, Bond transformation, ATI elastic tensor, Direction vector for TI symmetry axis

1 引 言

横向各向同性(TI)为广泛存在的各向异性. 对于天然地震,早已提出周期性叠层、上地幔晶体定向排列和地壳内定向平行排列裂隙均导致 TI,用于解释横波分裂和各向异性层析成像. 对于地震勘探,物理模拟试验提出浅部沉积区的泥岩、页岩、砂岩、灰岩和煤岩等具有 TI 各向异性,如此推动地震理论方法和数据处理解释的新发展.

TI 弹性用四阶张量描述,其连接应力和应变两个二阶张量构成本构关系,为岩体特殊形变研究提供基础,本构关系结合运动方程用来研究 TI 介质中地震波传播特征. TI 弹性张量随方向变化或依赖所在坐标系的空间取向,相应的本构关系和运动方程形式不变而具体表述随之变化. TI 弹性张量是本构关系和运动方程的核心.

当 TI 对称轴垂直水平地表时(VTI),TI 弹性

基金项目 国家自然科学基金项目(40674023)资助.

作者简介 姚 陈,男,1949 年生,博士生导师. 研究方向为地震波各向异性. E-mail:yao.chen@263.net

在垂直面内变化与方位无关，容易得到用5个独立弹性常数表示的弹性张量，此时本构关系和运动方程比较简单，这为30年来VTI介质地震波数值模拟和系统解析研究提供了基础. 对于TI具有水平对称轴(HTI)和入射面内倾斜对称轴(TTI)时，在TI对称轴所在特殊方位，TI弹性张量问题相对简单，这方面已获得一些研究结果；但其他方位TI弹性张量表述复杂，相应研究遇到的困难要大得多.

TI可以有任意空间取向. TI空间取向可以在地表固定坐标系定义，也可以相对三维断层和倾斜界面定义，地表固定坐标系定义的VTI相对后者不再是VTI. TI空间取向还可以相对地震波传播方向来定义. 为此，存在广义的任意空间取向TI问题，简称ATI. VTI可视为ATI的特殊情况，但用VTI解释不了ATI，使得限于VTI模型成为ATI地震波理论方法和观测解释的瓶颈.

坐标系不同，弹性张量不同. 不同坐标系的弹性张量符合张量变换法则. 原则上可基于VTI的弹性张量通过四阶张量变换得到ATI弹性张量. 等价地，将VTI四阶张量转化为二阶矩阵元素表示，再通过Bond变换[1]同样能得到ATI的弹性张量. 四阶张量变换和Bond变换是至今获取ATI弹性张量的两种方法，但无论采用哪一种方法，因涉及到一系列与角度有关的旋转坐标系的变换，ATI弹性张量元素的具体表述都非常复杂. 以往通过数值方法实现四阶张量变换和Bond变换，但数值法透明度低，从中难以找到ATI各张量元素及与上述空间取向的关系，这直接影响后续的理论方法研究和观测解释. 作为本构关系和运动方程核心的ATI弹性张量，其解析表述成为有待解决的理论问题.

本文给出ATI四阶弹性张量简易和便于应用的解析表达式，其以VTI的5个弹性常数为参数，以TI对称轴的方向矢量分量为变量，简称ATI弹性张量；论证ATI弹性张量等价于四阶张量变换，简要说明ATI弹性张量的应用并指出其所具优势.

2 ATI弹性张量的解析表述

TI具有轴对称性，故TI的空间取向能用TI对称轴的方向矢量惟一确定. 我们将ATI的四阶弹性张量表示为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{c}_{ijkl} = & C_{1122}\delta_{ij}\delta_{kl} + C_{1212}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \\
& + (C_{3333} - C_{1111})n_i n_j n_k n_l \\
& + (C_{1133} - C_{1122})(\delta_{ij}n_k n_l + \delta_{kl}n_i n_j \\
& - 2n_i n_j n_k n_l) + (C_{1313} - C_{1212})(\delta_{ik}n_l n_j \\
& + \delta_{il}n_k n_j + \delta_{jk}n_l n_i + \delta_{jl}n_k n_i - 4n_i n_j n_k n_l), \quad (1)
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{c}_{ijkl}$ 是ATI弹性张量，大写字母 C_{pqos} 表示VTI弹性常数，δ_{ij} 是Kronecker符号，n_i，$i=1,2,3$ 是TI对称轴方向矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的分量. 该式中有VTI的6个弹性常数，因 $C_{1122}+2C_{1212}=C_{1111}$，故实际包括VTI的5个独立的弹性常数.

(1)式中等号右侧前两项与 n_i 无关，为各向同性项，类似于各向同性张量的表述[2]，其余三项与 n_i 有关，统称各向异性项，各项前面的系数分别为VTI不同弹性常数的组合，每组中两个弹性常数差异的大小标志TI各向异性的强弱.

容易看出，(1)式满足对称性 $\boldsymbol{c}_{ijkl}=\boldsymbol{c}_{ijlk}=\boldsymbol{c}_{jikl}=\boldsymbol{c}_{jilk}$，是应力对称、应变对称及应变能守恒的结果[2]，因此ATI弹性张量最多有21个不同的弹性常数.

当 $C_{3333}=C_{1111}$，$C_{1133}=C_{2233}$ 和 $C_{1313}=C_{1212}$ 时，(1)式中各向异性项的三个系数均为零，$\boldsymbol{c}_{ijkl}$ 降为与 n_i 无关的各向同性张量.

需要指出，ATI必然有各向同性背景值，相应的两个拉梅常数能够通过VTI的5个弹性常数惟一确定，而ATI弹性张量可以表示为各向同性背景张量附加弹性偏离张量，这对于ATI弹性和柔度相互转换及进一步发展不同空间取向TI的复合各向异性方法至关重要. 我们在这里给出的 c_{ijkl} 是各向同性背景张量附加弹性偏离张量的等价表述. (1)式中的各向同性项并不是各向同性背景张量，如通常 $C_{1122}\neq\lambda$，λ 为各向同性背景拉梅常数. 我们将在其它文章系统论述 c_{ijkl} 的各向同性背景和弹性偏离表述及所涉及的问题.

3 ATI弹性张量等效于四阶张量变换

以下我们理论证明(1)式给出的是ATI弹性张量.

将 $\hat{\boldsymbol{n}}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 带入到(1)式，利用 $C_{1111}=C_{2222}$，$C_{1133}=C_{2233}$，$C_{1313}=C_{2323}$ 和 $C_{1122}+2C_{1212}=C_{1111}$，容易验证这时 $\boldsymbol{c}_{ijkl}$ 给出VTI弹性张量的所有元素，即垂直对称轴时ATI弹性张量为VTI的弹性张量.

令 $\boldsymbol{c}_{ijkl}$ 和 C_{pqos} 分别为ATI的和VTI的弹性张量，β_{ip} 为旋转笛卡儿坐标系的坐标变换矩阵元素，它们满足以下四阶张量变换关系

$$\boldsymbol{c}_{ijkl} = \beta_{ip}\beta_{jq}\beta_{ko}\beta_{ls}C_{pqos}. \quad (2)$$

将(1)式张量表述代换(2)式中的 C_{pqos}，利用

$\bar{n}_i=\beta_{ip}n_p$，特别利用关系

$$\beta_{jp}\beta_{kq}\delta_{pq}=\delta_{jk},\tag{3}$$

容易验证四阶张量变换后的 $\boldsymbol{c}_{ijkl}$ 相比(1)式表述形式不变，只是将 VTI 对称轴方向矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 改为 ATI 对称轴方向矢量 $\hat{\bar{\boldsymbol{n}}}$，这就证明了本文给出 ATI 弹性张量为完备表述.

四阶张量变换后(1)式表述形式不变可简单解释为，沿 ATI 的对称轴方向看 TI 弹性与在垂直方向看 VTI 弹性这两者相同，故 ATI 和 VTI 这两个弹性张量具有共同的弹性常数组合系数，并具有相同的表述形式，两者差异仅在于 TI 对称轴方向矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 不同. 以下我们进一步讨论 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的解析表述.

4　ATI 对称轴方向矢量

以往是相对地表固定坐标系定义 TI 对称轴方向. 由于在地表坐标系还有界面(及断层面)的法向矢量以及地震波传播的方向矢量，为满足构造和传播方面的理论需求，我们提出包括这几种情况的 TI 对称轴方向矢量的扩展定义. 以下主要讨论相对地震波传播方向的 TI 对称轴的单位方向矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}$，将相对界面法向和地表固定坐标系的情况作为特殊情况处理. 我们先推导给出 ATI 对称轴单位方向矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的解析表述.

令 φ_c 和 θ_c 分别为 TI 对称轴在固定坐标系的方位角和顶角，依据这两个角旋转坐标系得到 TI 坐标系，从固定坐标系到 TI 坐标系的坐标变换为 $\boldsymbol{A}(\theta_c,\varphi_c)$. 设 θ 和 φ 分别为相传播方向在固定坐标系的入射角和方位角，从固定坐标系到地震波相传播方向坐标系(简称相传播坐标系)的坐标变换为 $\boldsymbol{B}(\theta,\varphi)$. 为此，从 TI 坐标系到相传播坐标系的坐标变换为 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，其矩阵表述为

$$\boldsymbol{G}=\{\alpha_{jk}\}=\begin{pmatrix}\sin\theta_c\sin\theta+\cos\theta_c\cos\theta\cos\bar{\varphi}_c & -\cos\theta\sin\bar{\varphi}_c & \sin\theta_c\cos\theta\cos\bar{\varphi}_c-\cos\theta_c\sin\theta\\ \cos\theta_c\sin\bar{\varphi}_c & \cos\bar{\varphi}_c & \sin\theta_c\sin\bar{\varphi}_c\\ \cos\theta_c\sin\theta\cos\bar{\varphi}_c-\sin\theta_c\cos\theta & -\sin\theta\sin\bar{\varphi}_c & \cos\theta_c\cos\theta+\sin\theta_c\sin\theta\cos\bar{\varphi}_c\end{pmatrix},\tag{4}$$

其中 $\bar{\varphi}_c=\varphi_c-\varphi$ 为相对 TI 对称轴的相对方位.

从相传播坐标系到 TI 坐标系的坐标变换为 $\{\beta_{jk}\}$，显然有 $\beta_{jk}=\alpha_{kj}$.

β_{jk} 为(2)式中的坐标变换矩阵元素. 显然，$\{\beta_{jk}\}$ 矩阵的第三列，即(4)式中矩阵第三列为 TI 对称轴的方向矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}=(n_1,n_2,n_3)$，该矢量的三个分量依次为

$$n_1=\sin\theta_c\cos\theta\cos\bar{\varphi}_c-\cos\theta_c\sin\theta,\tag{5}$$

$$n_2=\sin\theta_c\sin\bar{\varphi}_c,\tag{6}$$

$$n_3=\cos\theta_c\cos\theta+\sin\theta_c\sin\theta\cos\bar{\varphi}_c.\tag{7}$$

以上 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 包含 4 个角度，简记为 $\hat{\boldsymbol{n}}(\theta_c,\varphi_c,\theta,\varphi)$，带入到(1)式很容易得到 ATI 弹性张量 $\boldsymbol{c}_{ijkl}$ 的所有分量. 以下简要说明其在 6 个方面的应用：

(1)将 θ 和 φ 视为变量，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 随传播方向变化，相应 $\boldsymbol{c}_{ijkl}$ 随传播方向变化，利用其中 6 个元素能进一步给出均匀 ATI 介质中三类体波传播特征随方向的变化，这同时为射线方法扩展到 ATI 和三维倾斜界面引起的三维路径提供了基础.

(2)各向异性反射率法要求计算不同方位的传播矩阵[3]. 令 $\theta=0$，则有

$$\hat{\boldsymbol{n}}(\theta_c,\varphi_c,\varphi)=(\sin\theta_c\cos\bar{\varphi}_c,\sin\theta_c\sin\bar{\varphi}_c,\cos\theta_c)\tag{8}$$

为相对传播方位的 ATI 对称轴的方向矢量，相应的 $\boldsymbol{c}_{ijkl}$ 可用于计算理论地震图和各向异性震源辐射[4~6].

(3)令 $\theta=0$ 和 $\varphi=0$，则有

$$\hat{\boldsymbol{n}}(\theta_c,\varphi_c)=(\sin\theta_c\cos\varphi_c,\sin\theta_c\sin\varphi_c,\cos\theta_c),\tag{9}$$

将(9)式带入到(1)式给出在地表固定坐标系 ATI 的 $\boldsymbol{c}_{ijkl}$，其用于本构方程和波动方程可将有限差分法等理论地震图的计算扩展到 ATI 介质条件[7,8].

(4)设 θ_n 和 φ_n 为地下界面法线的两个角度，代换 $(\theta,\varphi)\rightarrow(\theta_n,\varphi_n)$ 得到 $\hat{\boldsymbol{n}}(\theta_c,\varphi_c,\theta_n,\varphi_n)$，相应的 $\boldsymbol{c}_{ijkl}$ 则为界面坐标系的 ATI 弹性张量，可用于三维倾斜界面上地震波反射、透射的 TI 条件和应力-应变所导致界面附近形变的研究. 对于断层位错，将这里的 $\boldsymbol{c}_{ijkl}$ 带入到地震矩张量表达式 $\boldsymbol{m}_{ij}=\boldsymbol{c}_{ijkl}n_k\nu_l$，可得到 ATI 各向异性矩张量的解析表述，用于解释地震矩张量的反演结果[9].

(5)如将 $\hat{\boldsymbol{n}}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 带入到(1)式则得到 HTI 的弹性常数，其与 VTI 各个弹性常数的关系是角标 1↔3 互换. 特殊地 $\bar{\varphi}_c=0$，TI 对称轴在垂直路径面内，则有 TTI 的方向矢量和弹性常数. 这表明 ATI 弹性张量可将以往提出的 VTI、HTI 和 TTI 这些特殊空间取向 TI 的弹性张量和各向异性参数统一起来，而不需将 VTI 和 HTI 的参数分别定义.

(6)ATI 弹性张量通常有 21 个非零分量，类似于三斜各向异性具有 21 个弹性常数. 如何从地震反演得到的 21 个弹性常数确认其为 ATI 所致是有待

解决的理论问题.从ATI弹性张量的解析表述能给出相应的判据并解决这一问题.

5 讨 论

计算ATI介质中地震波传播,经典的做法是四阶张量变换,即先依据上述 α_{kj} 实现从TI坐标系到相传播坐标系的张量变换,再依据相应的张量元素计算三类体波的传播特征.本文依据 α_{kj} 的反变换 β_{jk} 进行四阶张量变换,给出ATI弹性张量,从相应元素计算三类体波的传播特征.参照传播方向改变TI空间取向,相比固定TI空间取向改变传播方向,这两者是等价的.

如将 β_{jk} 带入到(2)式,各张量元素的解析表述将非常繁琐和冗长,难以找出各元素与TI空间取向的关系.从(3)式二阶张量缩并可以看出,ATI弹性张量简化了四阶张量变换过程,这是ATI弹性张量解析表述简洁的原因. ATI弹性张量与TI空间取向的关系很明确.

以上两点是ATI弹性张量的实质.

Bond变换与四阶弹性张量变换等价.ATI弹性张量解析等价于四阶弹性张量变换,故也等价于Bond变换.Bond变换用于ATI同样存在解析表述繁琐复杂的问题.对于这三者之间的关系,将在另外文章作进一步的数值对比讨论.

连接二阶应力张量和二阶应变张量有两个理论表述:从应力到应变用柔度张量,从应变到应力用弹性张量.这两个本构关系在波动和力学性质研究方面有各自的优势.近些年弹性张量和柔度张量的相互转换问题更为突出.相比四阶张量变换,Bond变换的一个重要优势是将四阶弹性张量和四阶柔度张量分别表示为6×6阶矩阵的形式,再利用矩阵互逆得到两个张量之间的转换.本文给出ATI弹性张量的理论表述,并行地有ATI柔度张量的理论表述,这将使ATI这两个四阶张量之间的相互转换相比Bond方法大为简捷.此问题将在另外文章论述.

6 结 语

ATI四阶弹性张量能表述为各向同性项附加关于TI对称轴方向矢量分量的二次项和四次项,各项的系数为VTI的弹性常数及其简单组合,TI对称轴方向矢量可参照地表固定坐标系,也可以相对三维空间取向界面和相对地震波传播方向,但整体表述具有内在的一致性.

ATI弹性张量等价于四阶张量变换和Bond变换,但避免了后两者的复杂和繁琐,能简洁和透明地提供所有弹性张量元素,用于本构关系和波动方程.

基于TI对称轴方向矢量表述的ATI弹性张量解析具有独特的优势,其严格和紧凑的解析表述能为各方面的理论方法研究提供支撑.

参考文献(References)

[1] Auld B A. Acoustic Field and Waves in Solids. New York: John Wiley and Sons Inc, 1973

[2] Aki K, Richards P G. Quantitative Seismology: Theory and Methods. New York: W. H. Freeman, 1980

[3] Crampin S. A review of wave motion in anisotropic and cracked elastic-media. *Wave Motion*, 1981, **3**: 343～391

[4] Yao Chen, Xiong Yangwu. Far-field radiation pattern from an anisotropic dislocation point source. *Can J. Expl. Geophys*, 1993, **29**: 315～323

[5] Yao Chen, Xiong Yangwu. Shear-wave splitting from local earthquakes modeled by synthetic seismograms. *Can J. Expl. Geophys*, 1993, **29**: 324～331

[6] Yao Chen, Chen Xiangguo, Lei Jun. Seismic synthetics study of 4 components for sea floor reflection. Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1999. 804～807

[7] 王德利,何樵登,韩立国.裂隙型单斜介质中多方位地面三分量记录模拟.地球物理学报,2005,**48**(2):386～393
Wang D L, He Q D, Han L G. Multi-azimuth three-component surface seismic modeling for cracked monoclinic media. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2005, **48**(2): 386～393

[8] 刘恩儒,岳建华,刘 彦.具有离散裂缝空间分布的二维固体中地震波传播的有限差分模拟.地球物理学报,2006,**49**(1):180～188
Liu E R, Yue J H, Liu Y. Finite difference simulation of seismic wave propagation in 2-D solids with spatial distribution of discrete fractures. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2006, **49**(1): 180～188

[9] 蔡晓刚.各向异性ATI介质地震矩张量理论研究[博士论文].北京:北京大学地球物理系,2009
Cai X G. The theoretical studies on seismic moment tensor in anisotropic ATI media [Ph. D. thesis] (in Chinese). Beijing: Geophysics Department, Peking University, 2009

(本文编辑 胡素芳)