

文章编号:1003-207(2008)03-0044-06

应用复合极值理论估计动态流动性调整 VaR

叶五一, 缪柏其

(中国科学技术大学统计与金融系, 安徽 合肥 230026)

摘要:本文首次将一分钟内的交易差价(分内价差)的分布和日收益率的分布结合了起来进行分析,应用复合极值理论给出了动态流动性调整的 VaR 一种估计,同时得到动态流动性调整 VaR 的预测方法,最后对上海汽车股票(600104)和中国石化(600028)两只股票进行了实证分析。

关键词:复合极值理论;高频数据;分内价差;流动性调整;VaR

中图分类号: F830.9 **文献标识码:** A

1 引言

在险价值简称 VaR(Value at Risk),可以被定义为“在一定的期间内,在一定的置信水平(如 95%)下,一个金融头寸所面临的最大的潜在损失”。计算 VaR 的方法主要有三种方法:历史模拟方法、分析方法(方差-协方差方法)和蒙特卡罗模拟方法,Duffie and Pan(1997)^[1],Dowd(1998)^[2],Fallon(1996)^[3]等给出了关于 VaR 估计方法的系统的介绍。

最近对于 VaR 方法的改进主要体现在两个方面:一是计算速度和计算精度的改进,以致引出了压力测试方法,另一方面是对所谓“标准 VaR”的扩展(Beyond VaR)^[4],也即是其他风险测度的出现,包括应用极值理论(Extreme Value Theory)^[5]计算得到的 VaR 以及 Artzner(1999)提出的相容风险测度(Coherent Risk Measure)^[6]。VaR 并不满足相容风险测度的次可加定理,随后便出现了以 ES(Expected Shortfall)为代表的相容风险测度^[7],ES 与 VaR 相比具有一些更加良好的性质,尽管 VaR 的应用领域更加广泛。另外许多学者还对条件 VaR 的估计进行了研究,解决不同条件下的 VaR 的估计问题^[8-9]。近期,关于流动性调整 VaR 的研究得到

了重视。

流动性风险是可交易证券除了价格风险以外面临的另一项重要的风险,长期资本管理公司(LTCM)的崩溃引起了学者对流动性风险研究的重视。近年来,越来越多的学者开始关注和研究 VaR 的流动性扩展模型(Liquidity-adjusted Value at Risk, LaVaR),流动性调整 VaR 越来越被重视,其基本原理是:在传统 VaR 模型的基础上,考虑流动性给市场风险计量带来的误差,以弥补传统的 VaR 模型对流动性问题的忽视,使其能够更贴近现实的市场,更准确地计量实际的风险状况。Bangia, Diebold, Schuermann, Stroughair(BDSS)(1999)选择相对价差为流动性度量指标,是借助流动性指标构建流动性风险衡量模型最具有代表性的文献之一^[6]。将市场风险分割成价格波动风险和流动性风险两个部分。价格波动风险以价差中间价度量,而流动性风险部分则以平均价差和价差波动度量。Heude 和 Wynendaale(2001)等人对 BDSS 模型作了改进或者进行了实证研究^[7]。然而,上述模型都是将流动性风险和收益率风险独立考虑,没有很好地考虑两者之间的相互关系。另外这些模型也没有考虑动态的 LaVaR 估计问题,假定 LaVaR 不随时间变化,这些都和实际情况不相一致。动态 LaVaR 能够更好地捕捉市场变化情况,为投资者提供及时准确的信息。但是要注意一点,动态 LaVaR 和动态 VaR 模型一样,其预测效果不能很好的进行评估。

马逢时等在 1979 年提出了复合极值理论^[8],该理论提出后得到了国内外学者大量引用和应用^[9-11],但是主要应用在海洋极端海气特征的预测

收稿日期:2007-03-26; 修订日期:2008-05-26

资助项目:国家自然科学基金资助项目(10471135);教育部博士点基金;中国科学院和中国科技大学创新基金;中国科学技术大学青年教师基金

作者简介:叶五一(1979-),男(汉族),中国科技大学统计与金融系,博士,讲师,研究方向:风险管理和金融工程。

等领域,在经济领域还没有获得很好的应用,叶五一等应用复合极值理论方法给出了 VaR 的一种估计方法^[12]。本文应用复合极值理论给出了动态 La-VaR 的一种估计方法,将每个交易日内的每分钟的价差作为流动性的一种度量,考虑了该流动性对 VaR 的动态影响,为短期投资者提供了一定的参考。

2 复合极值理论介绍

定理:设 ξ, η 为随机变量,其分布函数分别为 $G(x), Q(x)$, 记 ξ_i 为 ξ 的第 i 次独立观测值,设 n 是与 (ξ, η) 独立的非负整数随机变量,记

$$P\{n = k\} = p_k, k = 0, 1, \dots, \sum p_k = 1, \text{ 定义}$$

$$\text{随机变量 } \zeta = \begin{cases} \eta, & \text{当 } n = 0 \\ \max_{1 \leq i \leq n} \{\xi_i\}, & \text{当 } n \geq 1, \end{cases}$$

则 ζ 的分布函数为 $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k [G(x)]^k - p_0 [1 - Q(x)]$ 。

定理的证明见文献 [8], 记 $F_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k [G(x)]^k$, 则 $F_0(x)$ 正是由 n 的分布和 ξ 的分布所构成的复合极值分布,可以由 n 和 ξ 的分布完全决定,容易看出:

①若 $p_0 = 0$, 则 $F(x) = F_0(x)$

②如果 η 有上界 M (即 $P\{\eta > M\} = 0$), 则对 $x > M$, $F(x) = F_0(x)$

在估计 VaR 时,只考虑损失大的部分,②的条件可以得到满足,另外对于泊松分布和二项分布,①中 $p_0 = 0$ 的条件也是近似满足的。因此我们在计算 VaR 时可以用 $F_0(x)$ 来近似 $F(x)$ 。

实际中经常用到泊松分布,若 n 服从泊松分布, $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, \dots$, 则: $F_0(x) = \exp(-\lambda [1 - G(x)])$ (1)

3 动态流动性调整 VaR 的估计

复合极值理论在海洋预测等领域获得了很好的应用,本文将应用该方法来对动态流动性调整 VaR 进行分析,其中应用一分钟内交易价差作为流动性的度量,将一分钟高频数据和日收益率数据结合起来进行分析,得到了很有意义的结果。

3.1 n 的分布的确定及流动性度量

本文首先对一分钟高频数据进行了分析,用一分钟内最高价和最低价的差值(分内价差)度量流动

性的好坏,差值越小说明该只股票流动性越好。

由于报价的限制,在一天内分内价差的最小单位为 1 分,可以看作是一个离散型随机变量用 n 来描述(取值为 $0, 1, 2, \dots$),实证分析发现该随机变量可以很好地用泊松分布来拟合。

假设在一天内(假设共有 N 个观测值),随机变量 n 的样本观测值为 n_1, n_2, \dots, n_N , 将得到这一系列观测值作为 n 的样本,用泊松分布拟合。

由极大似然(或者矩估计)可以得到泊松分布参数 λ 的估计:

$$\hat{\lambda} = \bar{n}, \text{ 其中 } \bar{n} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i,$$

这里如果 $\hat{\lambda}$ 的值越大,说明该股票在该天内价差的均值就越大,其流动性也就越差。拟合优度检验可以采用普通的 Pearson - χ^2 检验。

3.2 收益率分布 $G(x)$ 的确定

假设 S_t 是某金融资产第 t 天的价格,用 r_t 表示其对数回报,即: $r_t = \log(S_t/S_{t-1})$, 为了计算回报分布的下分位点,令 $x_t = -r_t$ 。

由定理可以看出 $G(x)$ 可以为任何一种连续分布, VaR 估计中的方差-协方差方法假设收益率服从正态分布,但是直接进行 VaR 计算会带来较大的偏差,但是由文献 [8] 可以看出对于复合极值分布来说, $G(x)$ 的选择对复合极值分布的影响较小。鉴于本文的主要问题是动态流动性调整 VaR 的估计,且正态分布可以方便地估计,我们假设 ξ 服从正态分布,即 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。其它分布假设下的动态 VaR 可以类似的得到。

3.3 动态流动性调整 VaR 的估计

由上述方法得到了 x_t 的复合极值分布后,就可以得到股票收益率的 VaR。由前面的分析可以知道,随机变量 n 可以看作是股票在某天流动性的一种度量,因此 x_t 的上分位点 \hat{x}_p , 可以看作是流动性调整 VaR 的一种估计,通过每个交易日中分内价差的均值来进行调整。又由后面的分析可知,单只股票在每个交易日的分内价差均值会发生变化,因此由本文的方法可以得到动态的流动性调整 VaR。

假设置信水平为 p , 则由(1)式可以得到 x_t 的上 p 分位点 \hat{x}_p 满足:

$$G(\hat{x}_p) = 1 + (1/\hat{\lambda}) \ln p \quad (2)$$

由(2)式得出的 \hat{x}_p 就是所要估计的流动性调整 VaR。

在实际中,单只股票在每个交易日中价差的均值并不是稳定的,因此股票的流动性随着时间变化,

我们用 $\hat{\lambda}_t$ 来表示第 t 天股票的价差分布的参数估计值,那么将该值代入(2)式便可以得到动态流动性调整 VaR 的估计:

$$LaVaR_t = G^{-1}(1 + (1/\hat{\lambda}_t)\ln p) \quad (3)$$

其中 $G^{-1}(\cdot)$ 为分布函数 $G(\cdot)$ 的反函数。

容易发现,LaVaR 随着 $\hat{\lambda}_t$ 的增大而变大,说明如果股票流动性变的较差($\hat{\lambda}_t$ 值变大),那么经过流动性调整的 VaR 值也变的越大,这和实际情况以及已有的 LaVaR 模型的结论是一致的^[13-14]。

4 实证分析

4.1 数据描述

本文随机选取上海股市的两只股票上海汽车(600104)和中国石化(600028)作实证分析,对 2005 年 1 月 4 日到 2005 年 9 月 29 日的一分钟高频数据

和相应的日收益率数据进行分析。数据全部来自 CCER 金融历史数据库,由于日收益率的研究一般采用对数回报,本文也采用对数回报而不是百分比回报。

4.2 分内价差分布的确定

本文采用的是一分钟高频数据来确定流动性价差的分布 n ,每个交易日有 241 个一分钟高频数据。因为本文将要讨论持有期为一天的动态 LaVaR 估计,因此要讨论每个交易日的流动性价差的分布问题。经过研究发现在每个交易日中,价差的大小(以分为单位)能够很好地用 Poisson 分布来拟合。即在每个交易中满足 $P\{n = k(\text{分})\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$, λ 为待估参数。下面表格给出随机抽取 4 天的 Poisson 分布拟合情况。

表 1 上海汽车(600104)Poisson 分布拟合表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\hat{\lambda}_t$	χ^2 统计量
No1	70	118	39	9	3	1	1	0	0	1.02075	0.092283
No2	115	116	9	1	0	0	0	0	0	0.56846	0.249234
No3	24	134	68	11	4	0	0	0	0	1.32365	0.337715
No4	50	144	35	7	4	1	0	0	0	1.06224	0.237122

由上表可以看出, n 用泊松分布的拟合效果很好,对于拟合最差的 No3,查 χ^2 分布表也可得到 $\chi^2_3(0.3377) > 0.95$,因此 n 用泊松分布拟合,拟合效果非常好。朱国庆等(2004)^[15]验证了股票指数收益率的损失超过一定阈值的次数 n 服从泊松分布。叶五一等(2007)^[16]则应用泊松分布很好地拟合了一定时期内超过一定阈值的汇率收益率的次数的分布。

其他每天的结果可以类似得到,实证发现对于两只股票来说,几乎每个交易日的交易价差都可以用 Poisson 分布拟合,具体结果以图的形式给出,图 1 给出了两只股票每天的卡方检验统计量 χ^2 值,在图 2 中给出了拟合优度检验。

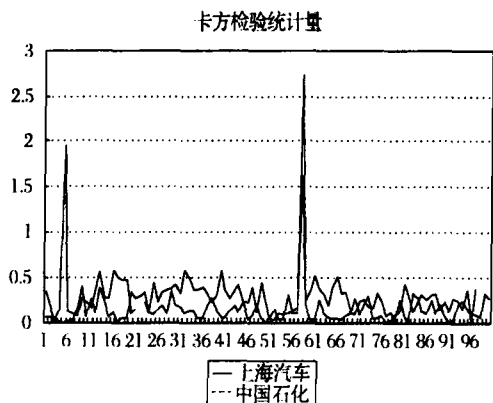


图 1 方统计量 χ^2 值

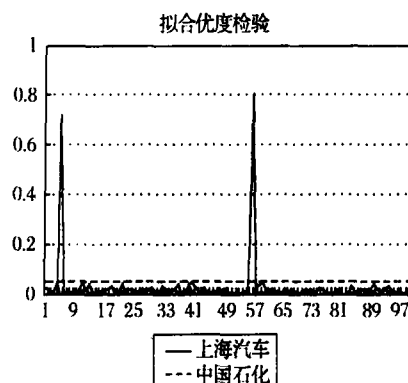


图 2 拟合优度检验图

由图 1 可以看出,除了少数几个交易日的统计量较大外,其它的交易日都较小,其中中国石化相对来说拟合情况更好些,只是出现了一个异常的交易日。同样在图 2 中,我们对不同自由度下卡方统计量的 p -value 进行了计算,由图 2 可以看出,除了对应的这少数几天,其他的 P -Value 都在 0.05 以下,即拟合优度都在 95% 以上,在某些天里甚至达到 99.9%,说明用 Poisson 分布对分内价差进行拟合能够取得很好的效果。

另外,由图 1 可以看出,在第 57 个交易日里,中国石化和上海汽车同时发生异常,时间为 2005 年 4 月 1 日。在该日有市场传闻称,国务院在 30 日常务

会议结束后,总理专门召集金融、证券、财政、国资等部门开了碰头会,做出了重大决定。主要内容与非流通股和新股发行的一些问题相关,此传闻明显影响了市场,因此拟合的异常情况可以认为是由国务院的决定引起的。而且由具体的交易情况看出,在该日,上海汽车直到上午 10:30 才发生第一笔交易,大部分交易者都持观望态度。因此可以说在这一天市场的交易不是按照正常的情况进行的,因此出现了两种股票在该日的异常情况。在第 5 个交易日,上海汽车也发生了异常情况,该日为 2005 年 1 月 10 日,在该日传出“IPO 询价 20 日开闸,首批四家将同时亮相”的传闻,在此传闻影响下,市场直接低开两点后顺势下探,最低曾探 1236.09 点。因此市场也受到了传闻的影响,导致了异常情况的发生。

另外,为了对两只股票每个交易日的价差的平均情况有个了解,图 3 给出了参数 λ_t 的估计值。

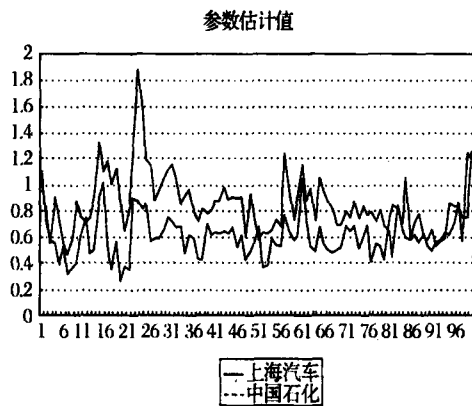


图 3 参数 λ_t 估计值

由图 3 看出,总体来说,中国石化在每个交易日内的价差相对来说要比上海汽车小,说明中国石化这只股票流动性相对较好。

4.3 正态检验及 $G(x)$ 的确定

本文中两只股票日收益率的正态性统计量被计算出来如表 2 所示:

	均值 μ	标准差 σ	偏度	峰度
上海汽车	-0.0025	0.0237	-0.2824	4.0841
中国石化	-9.9511e-004	0.0176	-0.5789	4.4261

根据上表可以看出两只股票收益率的偏度都不为零,但是都不是很大,说明对数回报的分布虽然不是对称分布,但是偏度不大,而且峰度相对比较小,比较接近于正态分布的峰度,说明单只股票收益率分布的尾部相对较轻,而市场指数收益率的偏度和峰度都远远大于这里的汇率收益率的情况^[8]。因此在本文中,我们选用正态分布来拟合收益率分布

$G(x)$,根据上表我们还可以得到正态分布 $G(x)$ 的参数 μ 和 σ 的估计。确定了价差的分布以及收益率的分布 $G(x)$ 以后,就可以应用复合极值分布进行动态流动性调整 VaR 的计算。

4.4 动态流动性调整 VaR 的估计

按照 4.2、4.3 部分的分析,可以得到 $G(x)$ 在正态假设下的两只股票的动态 LaVaR 值,应用公式 (3) 估计分别对两只股票进行置信水平为 95% 的动态 LaVaR 的计算,得到了每天的 LaVaR 值,如图 4 所示:

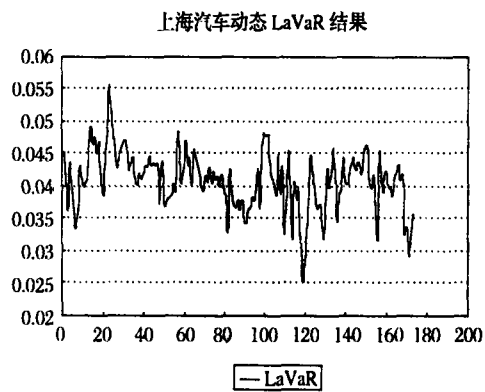


图 4 95% 置信水平下上海汽车动态 LaVaR 图

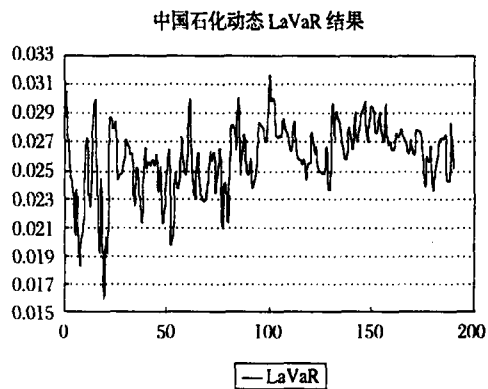


图 5 95% 置信水平下中国石化动态 LaVaR 图

由图 4 可以看出,两只股票的动态 LaVaR 的结果都能体现流动性对 VaR 的调整,流动性差的交易日,相应的 LaVaR 越大。另外,不同的交易日,由于流动性的不同,所得到的 LaVaR 有较大的不同,因此考虑流动性对 VaR 带来的调整有很大的实际意义。

4.5 动态流动性调整 VaR 的预测

由公式 (3) 可以看出,由于除 λ_t 外其他的参数都不是动态的,因此动态 LaVaR 的动态性仅与参数 λ_t 有关,只要能够得到 λ_t , 所服从的时间序列模型,就能对其做预测,也就可以对动态 LaVaR 进行预测。

对每天分内价差的均值(图 3 中参数 λ_t 估计

值)可以应用线性时间序列模型进行分析。由单位根检验以及样本 ACF 以及 PACF 发现原始序列不是平稳的,因此首先分别对两只股票的 λ_t 进行差分,经过差分后的序列为平稳序列,而且用 ARMA 模型能够很好的拟合。

(1) 上海汽车股票分析

经过分析发现上海汽车股票的 λ_t 一阶差分后的序列为平稳序列,差分后的序列能够很好地由 ARMA(1,1)进行拟合,结果如下(括号中为系数估计的标准差),且由残差 ACF 以及 PACF 图来看,残差基本上为平稳序列(如图 5 所示):

$$X(t) = 0.5760X(t-1) + Z(t) - 0.9214Z(t-1)$$

(0.1695) (0.1065)

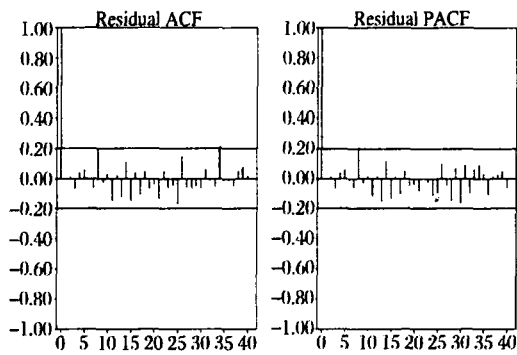


图 6 上海汽车残差 ACF 及 PACF 图

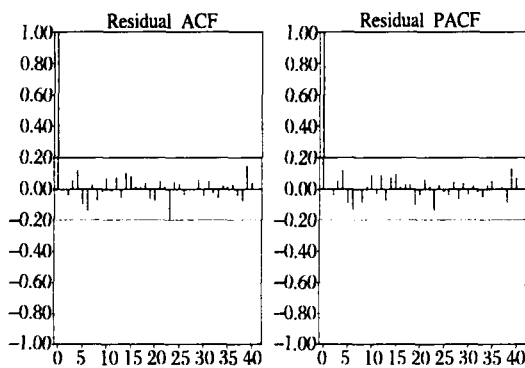


图 7 中国石化残差 ACF 及 PACF 图

(2) 中国石化股票分析

经过分析发现对中国汽车股票 λ_t 进行两阶差分后的序列为平稳序列,差分后的序列能够很好地由 ARMA(1,2)进行拟合,结果如下,且由残差 ACF 以及 PACF 图来看,残差基本上为平稳序列(如图 6 所示):

$$X(t) = 0.4702X(t-1) + Z(t) + 0.0089Z(t-1) - 0.9898Z(t-2)$$

(0.0915) (0.0147) (0.0148)

有了 λ_t 的时间序列模型,就可以根据以前的日内价差均值数值来预测未来的 λ_t ,有了预测得到的 λ_t 值,就可以根据式(3)得到 LaVaR 的预测值,即可以对流动性调整 VaR 进行预测,这对短期投资者来说,有着非常重要的意义。

5 结束语

由以上的分析可以看出,股票在每个交易日内一分钟价差的大小可以看作是流动性风险的一种度量。由于报价的限制,分钟内价差可以看作是离散型随机变量,经过实证分析,该随机变量可以很好地用 Poisson 分布来拟合。在本文中,由于收益率的分布的具体形式对复合极值分布的影响较小,我们应用正态分布对两只股票进行了收益率分布的拟合,由于单只股票的峰度和偏度都很小,可以用正态分布进行拟合。

关于 VaR 的计算方法已经有很多,也出现了“标准 VaR”改进的一些方法,本文提出的这种用复合极值理论计算动态 LaVaR 的方法,第一次将在每个交易日内金融资产的价差的分布和收益率的分布结合了起来,考虑了小概率下的大损失事件,也就考虑了收益率的尾部部分。由于价差可以看作是流动性的一种度量,而且我们假定价差在每个交易日内可以变化,因此应用复合极值理论得到的 VaR 可以看作是动态的流动性调整的 VaR,通过流动性的大小对 VaR 进行调整,这样就可以使得风险管理者可以同时考虑流动性风险和市场风险。该方法不仅计算简单,当数据相对较少时也能用该方法处理,得到的结果也很理想。最后我们对日内价差的均值进行了时间序列模型分析,结果也非常理想,因此就可以对流动性调整 VaR 进行预测,这样就可以给短期投资者提供很多有用的信息。

本文的研究还存在一定的不足之处,本文采用正态分布对单只股票收益率的边缘分布进行拟合,还可以尝试应用其他分布来拟合。另外本文只给出了流动性调整 VaR 的一种估计方法,得到复合极值分布后,还可以对 ES 等相容风险测度进行分析和比较。

参考文献:

[1] Duffie, D. and J. Pan. An overview of value at risk [J]. The Journal of Derivatives, 1997, 5: 7-49.
 [2] Dowd, K. Beyond value at risk: The New Science of Risk Management [M]. New York: Wiley, 1998.
 [3] Fallon, W. Calculating value-at-risk[R]. Wharton Financial Institutions Center. University of Pennsylvania, 1996.
 [4] Pearson, Neil D. Smithson, Charles. VaR: The state of play[J]. Review of Financial Economics, 2002, 11(3): 175-189.

- [5] 叶五一, 缪柏其. 应用改进 Hill 估计计算在险价值[J]. 中国科学院研究生院学报, 2004, 21(3): 305-309.
- [6] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J-M, Heath, D. Coherent Measures of Risk [J]. *Mathematical Finance*, 1999, 9(3): 203-228.
- [7] Acerbi, C. and D. Tasche, On the coherence of expected shortfall [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2002, 26: 1487-1503.
- [8] Engle, R. F., and S. Manganelli, CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles [J]. *Journal of Business and Economic Statistics*, 2004, 22: 367-381.
- [9] 叶五一, 缪柏其, 应用门限分位点回归模型估计条件 VaR[J]. *系统工程学报*, 2008, 23(2): 154-160.
- [10] Bangia, A., Diebold, F., Schuermann, T. & Stroughair, J. Modeling Liquidity Risk with Implications for Traditional Market Risk Measurement and Management [Z]. Working Paper, The Wharton School-University Pennsylvania, 1999.
- [11] Francois-Heude, Iain, Van Wynendaale, Pascal. Integrating Liquidity Risk in a Parametric Intraday VaR Framework[Z]. 2001. VaR Methods.
- [12] 马逢时, 刘德辅. 复合极值分布理论及其应用[J]. *应用数学学报*, 1981, (4): 14-19.
- [13] Liu T F, Ma F S. Prediction of extreme wave heights and wind velocities [J]. *Journal of the Waterway Port Coastal and Ocean Division, ASCE*, 1980, (4): 469-479.
- [14] Liu D. F. (Liu. T. F.). Poisson-Logistic Compound Bivariate Extreme Distribution and Its Application for Designing of Platform Deck Clearance [C]. *Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE*, 2003, 373-395.
- [15] 刘德辅, 王莉萍, 宋艳, 庞亮. 复合极值分布理论及其工程应用[J]. *中国海洋大学学报(自然科学版)*, 2004, (5): 893-902.
- [16] 叶五一, 缪柏其, 惠军. 应用复合极值理论计算 VaR [J]. *运筹与管理*, 2007, (1): 63-66.
- [17] 宋逢明, 谭慧. VaR 模型中流动性风险的度量[J]. *数量经济技术经济研究*, 2004, (6): 114-123.
- [18] Bangia, A., Diebold, F., Schuermann, T. & Stroughair, J. Modeling Liquidity Risk with Implications for Traditional Market Risk Measurement and Management [Z]. Working Paper, The Wharton School-University Pennsylvania, 1999.
- [19] 朱国庆, 张维, 程博. 关于上海股市收益厚尾性的实证研究[J]. *系统工程理论与实践*, 2001, (4): 70-73.
- [20] 王春峰. *金融市场风险管理* [M]. 天津大学出版社, 2001.

Using Compound Extreme Value Theory to Evaluate Dynamic LaVaR

YE Wu-yi, MIAO Bai-qi

(University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: In this paper, the spreads of the highest and the lowest prices in one minute and the day-by-day return are combined to be analyzed for the first time, and an estimator and a forecasting method of dynamic liquidity adjusted Value at Risk are presented based on compound extreme value theory. Finally an empirical analysis of two stocks is proposed.

Key words: compound extreme value theory; high frequency data; pread in one minute liquidity-adjusted value at risk (LaVaR)