

石润. 电离层 Alfvén 谐振反馈不稳定性研究. 地球物理学报, 2012, 55(3): 744-750, doi: 10. 6038/j. issn. 0001-5733. 2012. 03. 003.

Shi R. Study of the ionospheric Alfvén resonant feed back instability. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2012, 55(3): 744-750, doi: 10. 6038/j. issn. 0001-5733. 2012. 03. 003.

电离层 Alfvén 谐振反馈不稳定性研究

石 润^{1,2}

1 中国极地研究中心国家海洋局极地科学重点实验室, 上海 200136

2 复旦大学物理系, 上海 200433

摘 要 本文利用分层(磁层、电离层、大气层)模型, 分析了电离层电导率以及磁场方向对电离层 Alfvén 谐振(简称 IAR)反馈不稳定性的影响. 结果表明: 倾斜磁场可以有效改变 IAR 的参数(谐振频率与增长率), 进而改变 IAR 反馈不稳定性的性能, 磁场方向向上时, 在电离层电导率较大且不考虑 Hall 电导率的情况下, 磁场倾斜角的减小有利于电离层不稳定性的形成, 电离层 Hall 电导率可以增大 IAR 反馈不稳定性的增长率, 且对于较大的倾角增长率提升较大.

关键词 分层模型, 电离层 Alfvén 谐振反馈不稳定性, 倾角

doi: 10. 6038/j. issn. 0001-5733. 2012. 03. 003

中图分类号 P352

收稿日期 2011-10-14, 2011-12-02 收修定稿

Study of the ionospheric Alfvén resonant feed back instability

SHI Run^{1,2}

1 *State Oceanic Administration Key Laboratory for Polar Science, Polar Research Institute of China, Shanghai 200136, China*

2 *Department of Physics, Fudan University, Shanghai 200433, China*

Abstract The layered model (magnetosphere, ionosphere and atmosphere) is used to analyze the influence of ionospheric conductivity and dip angle of the magnetic field on the Ionospheric Alfvén Resonant (IAR) feedback instability. The results of the numerical calculation show that the dip angle effectively modifies the parameters (resonant frequencies and the growth rate) of the IAR, which consequently influence the IAR feedback instability; for the upward magnetic field, the decreasing of dip angle is propitious to the formation of the instability for large Pederson conductivity when ignoring the Hall conductance; the consideration of Hall conductance can increase the growth rate, especially for greater dip angle.

Keywords Layered model, Ionospheric Alfvén resonant instability, Dip angle

1 引 言

电离层反馈不稳定性首先由 Sato^[1] 提出, 通过场向电流, Alfvén 波将携带的电子注入到电离层

中, 从而改变电离层电导率, 而其在电离层的反射也因此变化, 波在谐振中不断与电离层作用, 在适当条件下形成正反馈获取电离层能量. 不同于以往电离层在磁层电离层耦合中所处的被动地位, 电离层反馈提供了主动的能量输入, 丰富了磁层电离层耦合

基金项目 国家自然科学基金(40890164, 40974083, 41004061, 41031064)、国家科技支撑计划课题(2006CB806306)、极地科学青年创新基金(JDQ200905)和国家海洋局青年海洋科学基金(2011803)资助.

作者简介 石润, 男, 1983 年生, 博士, 从事电离层 Alfvén 波的研究. E-mail: shirun@pric.gov.cn

理论. 随后, 电离层反馈由 Miura 与 Sato^[2]、Watanabe 与 Sato^[3]、Streltsov 与 Lotko^[4-5]、Lu^[6-7] 等人进一步发展. 这种机制是建立在磁力线谐振 (FLR) 的基础上, 而另一种谐振腔——电离层 Alfvén 谐振腔同样可以激发电离层反馈的不稳定性.

电离层以上 Alfvén 速度沿磁力线的剧烈变化导致了电离层 Alfvén 谐振腔的产生. IAR 的谐振频率在 0.1~10 Hz 之间, 高度范围一般在 3000 km 高度以下, 它与人们所熟知的舒曼谐振、磁力线谐振 (FLR) 一样构成空间中的天然谐振腔. IAR 的概念起初由 Polyakov 等人^[8] 提出, Trakhtengertz^[9-10] 与 Lysak^[11] 分别分析了电离层参数对 IAR 谐振频率与衰减率的影响. 随后, 电离层 Alfvén 谐振腔被大量实验观测所证实^[12-14].

Lysak^[15] 对 IAR 作了比较详细的研究, 包括边界条件、电离层电导率、Alfvén 速度梯度以及波频率的变化对 Alfvén 波传播的影响, 并将电离层反馈理论用于 IAR 中, 首次提出了 IAR 反馈不稳定性. 由于 IAR 的谐振频率远大于 FLR 的谐振频率, 因而它的反馈效率也较高, 也被称作快电离层反馈. Alfvén 速度随高度的剧烈变化同样导致了电离层压缩波波导的形成, 压缩波与 Alfvén 波通过电离层的 Hall 效应产生耦合, 这种耦合对电离层 Alfvén 谐振腔的特性产生影响, Pokhotelov 等^[16-17] 研究了电离层 Hall 效应对 IAR 反馈不稳定性的作用, 表明这种 Hall 色散改变 IAR 的频谱, 并提高 IAR 反馈不稳定性的增长率. Lysak 等^[18] (2002) 分析了电离层反馈的能量来源, 指出电离层反馈的能量来源于电离层焦耳热的减少, 反馈不稳定性在电离层电导率较低的情况下更容易产生.

本文在以往研究的基础上, 分析磁场倾斜条件下的 IAR 反馈不稳定性. 这一研究有助于更好地理解电离层反馈不稳定性理论.

2 模型

本文采用 Sciffer^[19] 模型, 将 ULF 波的传播区域分为三层: 磁层、电离层 (视为薄层)、大气层, 磁场 \mathbf{B}_0 在 xz 平面内, 与水平方向成角度 I ^[20], 注意到 I 与磁倾角反向, 所以 $\mathbf{B}_0 = (B_0 \cos I, 0, B_0 \sin I)$, 这里将磁场视为常量. 假设介质在水平方向均匀分布, 并且只随高度变化, 这样 ULF 波可以写为 $e^{i(k_x x + k_y y) - i\omega t}$ 的平面波形式. 本文假设 $k_y = 0$, 即磁流体波只在磁子午面内沿水平方向传播. 以下根据石润等^[20] 传播模

型给出各层传播模型.

2.1 磁层

根据石润等^[20], 用理想 MHD 方程描述 ULF 波在磁层的传播:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \\ \frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial t} = V^2 (\nabla \times \mathbf{B})_\perp, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $V^2 = c^2 V_a^2 / (c^2 + V_a^2)$, $V_a = \sqrt{B^2 / \mu_0 \rho}$ 为 Alfvén 速度, 这里 V 表示修正的 Alfvén 速度, 由于波的传播速度不可能超过光速, 所以引入了修正的 Alfvén 速度. ρ 为等离子体密度, c 为光速. 取 Alfvén 速度的形式

$$V^2 = V_{AI}^2 / (\epsilon^2 + e^{-z/h}), \quad (2)$$

其中 h 为标高, 典型值为 10^3 km. $\epsilon = V_{AI} / V_{AM}$, V_{AI} 为电离层处 Alfvén 速度, V_{AM} 为磁层外部 Alfvén 速度. 由 (2) 式可以看出, ϵ 的值决定 Alfvén 速度梯度的大小, 进而影响 IAR 的谐振特性, 由于电离层以上等离子体浓度受各种条件如太阳活动强度、季节、昼夜、地理位置等的影响, ϵ 的值也将因各种条件而有所不同.

在理想 MHD 条件下 $E_{\parallel} = 0$, 所以有 $E_x \cos I + E_z \sin I = 0$, 又剪切模式与快波模式分别满足以下关系

剪切模式:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0, (\nabla \times \mathbf{E})_{\parallel} = 0; \quad (3)$$

压缩波模式:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, (\nabla \times \mathbf{E})_{\parallel} \neq 0. \quad (4)$$

将以上关系代入 (1) 式, 令 $\beta = \beta_0 e^{-z/2h}$, $\beta_0 = 2\omega h \csc I / V_{AI}$, $\eta = \beta \sin I$, $\eta_0 = 2\omega h / V_{AI}$, 其中 ω 表示波的角频率, 可以看出 β_0 表示以 $2h \csc I / V_{AI}$ 为单位的归一化角频率, 得剪切模式的解为

$$E_x^a = [C_+^a J_{i\beta_0 \epsilon}(\beta) + C_-^a J_{-i\beta_0 \epsilon}(\beta)] \beta^{i2hk_x \cot I}, \quad (5)$$

压缩模的解为

$$E_y^f = C_+^f J_\nu(\eta) + C_-^f J_{-\nu}(\eta), \quad (6)$$

其中, $C_{\pm}^{a,f}$ 分别为剪切与压缩模的系数 (a, f 分别代表 Alfvén 波模和压缩波模), $\nu = \sqrt{[4h^2(k_x^2 + k_y^2) - \eta_0^2 \epsilon^2]}$, J 表示 Bessel 函数. 这里假设 $4h^2(k_x^2 + k_y^2) > \eta_0^2 \epsilon^2$, 当 $\eta \rightarrow 0$, 即 $z \rightarrow \infty$ 时, $J_{-\nu}(\eta) \rightarrow \infty$. 这样为保证解的合理性, 需要 $C_-^f = 0$, 此时压缩波的解给出波场随高度迅速衰减^[20], 这也对应了压缩波波导理论, 即压缩波在电离层波导内沿水平方向传播.

2.2 电离层

将电离层视为无厚度的薄片, 边界条件通过法

拉第定律给出,其内电流与电场的关系由(7)式给出^[19]:

$$\begin{bmatrix} j_x^I \\ j_y^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^I \\ E_y^I \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= \frac{\Sigma_p \Sigma_d}{\Sigma_d \sin^2 I + \Sigma_p \cos^2 I}, \\ \Sigma_{12} &= -\Sigma_{21} = \frac{\Sigma_h \Sigma_d \sin I}{\Sigma_d \sin^2 I + \Sigma_p \cos^2 I}, \\ \Sigma_{22} &= \frac{(\Sigma_p^2 + \Sigma_d^2) \cos^2 I + \Sigma_p \Sigma_d \sin^2 I}{\Sigma_d \sin^2 I + \Sigma_p \cos^2 I}, \end{aligned}$$

$\Sigma_d, \Sigma_p, \Sigma_h$ 分别为电离层高度积分纵向、Pederson、Hall 电导率,而 Σ_{mn} (m, n 为电导率张量中元素的位置)可理解为等效电离层电导率,代替了以往磁力线垂直于电离层时电离层 Pederson、Hall 电导率,此时场向电流对电离层边界贡献隐含在等效电离层电导率中. 一般情况下纵向电导率远大于 Pederson 和 Hall 电导率,即 $\Sigma_d \gg \Sigma_p, \Sigma_h$.

2.3 大气层

ULF 波在大气层的解由石润等^[20]给出.

2.4 边界条件

由安培定律,电离层上下边界通过(8)式联系起来

$$\mathbf{n}_z \times \Delta \mathbf{b} = (-\Delta b_y, \Delta b_x, 0) = \mu_0 (j_x^I, j_y^I, 0), \quad (8)$$

式中 \mathbf{n}_z 表示 z 方向的单位向量, $\Delta \mathbf{b}$ 表示上下两边界磁场扰动的变化.

如果考虑自洽电离层,场向电流携带的电子可以改变电离层电导率,引起 Alfvén 波的反射的变化,从而改变场向电流,这构成了 IAR 的反馈机制,这种反馈在一定条件下形成正反馈, IAR 的反馈不稳定性由此产生. 假设电导率正比于电子浓度

$$\delta \Sigma_p / \Sigma_p = \delta \Sigma_h / \Sigma_h = \delta n / n_0, \quad (9)$$

电离层电子浓度变化满足连续性方程

$$\frac{d\delta n}{dt} = S - R(n^2 - n_0^2), \quad (10)$$

其中 S 表示由粒子沉降产生的源项, R 表示复合率, n_0 表示不考虑场向电流的等离子体密度,这里,我们假设 S 与场向电流 j_{\parallel} 成正比, $S = Qj_{\parallel} \sin I$ (根据 Sato^[1]),这里考虑了磁倾角的因素,其中 $Q = \delta / (e\Delta z)$,这里 Δz 表示电离层厚度, δ 表示一个沉降电子激发的电子-离子对的数目,它与沉降电子的能量近似成线性关系.

$$S = Qj_{\parallel} \sin I = \frac{Q}{\mu_0 V_{AI}} \left(\cos I \frac{i\beta}{2h\beta_0} J'_- + \cos I \frac{i\beta^2}{2h\beta_0} J''_- - \frac{k_x \beta}{\beta_0 \sin I} J'_- \right) \beta^{i2hk_x \cot I} C^a. \quad (11)$$

在本文中只考虑反馈不稳定性的线性阶段,而不考虑电子浓度变化与背景电子浓度相当的情况,所以假设电子浓度变化远小于背景电子浓度 ($\delta n \ll n_0$),令 $\tau = 4hRn_0 / (\sin I V_{AI})$,对(10)式进行 Fourier 变换得到

$$\delta n = \frac{iS}{\omega - k_x u_{0x} + 2iRn_0} = \frac{i}{\beta_0 + i\tau} \frac{Q}{\mu_0 V_{AI}^2 \sin I} \left(i \cos I J'_- + i \cos I \beta_0 J''_- - \frac{2hk_x}{\sin I} J'_- \right) \beta_0^{i2hk_x \cot I} C^a, \quad (12)$$

这里 u_{0x} 表示电离层等离子体在 x 方向上的背景漂移速度.

由式(7)、(8)、(9)可得存在背景电场的电离层边界条件为

$$\begin{cases} \mu_0 \left(\Sigma_{11} E_x^I + \Sigma_{11} E_{0x}^I \frac{\delta n}{n_0} + \Sigma_{12} E_y^I + \Sigma_{12} E_{0y}^I \frac{\delta n}{n_0} \right) = \frac{i}{\omega} \left[\lim_{z \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial E_x^m}{\partial z} - \frac{\partial E_z^m}{\partial x} \right) - \lim_{z \rightarrow 0^-} \left(\frac{\partial E_x^{\text{atm}}}{\partial z} - \frac{\partial E_z^{\text{atm}}}{\partial x} \right) \right], \\ \mu_0 \left(\Sigma_{21} E_x^I + \Sigma_{21} E_{0x}^I \frac{\delta n}{n_0} + \Sigma_{22} E_y^I + \Sigma_{22} E_{0y}^I \frac{\delta n}{n_0} \right) = \frac{i}{\omega} \left[\lim_{z \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial E_y^m}{\partial z} - \frac{\partial E_z^m}{\partial y} \right) - \lim_{z \rightarrow 0^-} \left(\frac{\partial E_y^{\text{atm}}}{\partial z} - \frac{\partial E_z^{\text{atm}}}{\partial y} \right) \right], \end{cases} \quad (13)$$

其中 E_{0x}^I, E_{0y}^I 分别为电离层 x, y 方向的背景电场,并且在处理中忽略了扰动的二阶项. 方程右边表达式物理量中的上标 m, atm 分别代表磁层和大气层.

3 电离层反馈不稳定性

取磁层 ULF 波的解为 $E_x^a = C_-^a J_{-i\beta_0 \epsilon}(\beta) \beta^{i2hk_x \cot I}$ 与 $E_y^f = C_+^f J_\nu(\eta)$, 即只考虑剪切出射波与压缩波随高度衰减的情况(值得注意的是解的选取需要考虑磁场的方向,由于本文选取的背景磁场方向向上,所以选取剪切模的解为 $E_x^a = C_-^a J_{-i\beta_0 \epsilon}(\beta) \beta^{i2hk_x \cot I}$, 而当背景磁场方向向下即 $\sin I < 0$ 时,剪切模的解为 $E_x^a = C_+^a J_{i\beta_0 \epsilon}(\beta) \beta^{i2hk_x \cot I}$), 与大气层的解代入(13)式. 令 $\alpha_{mn} = \mu_0 V_{AI} \Sigma_{mn}, \alpha_p = \mu_0 V_{AI} \Sigma_p, \alpha_h = \mu_0 V_{AI} \Sigma_h$ 表示归一化电离层电导率,得到色散关系

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n_0} \frac{i}{\beta_0 + i\tau} \frac{Q}{\mu_0 V_{AI}^2} \left(\text{icos}IJ'_- + \text{icos}I\beta_0 J''_- - \frac{2hk_x J'_-}{\sin I} \right) \\ & \times \left[(\alpha_{11} E'_{0x} + \alpha_{12} E'_{0y}) - \frac{\alpha_{12} \sin I \beta_0 J_v (\alpha_{21} E'_{0x} + \alpha_{22} E'_{0y})}{\alpha_{22} \sin I \beta_0 J_v + i \sin I \beta_0 J'_v - i 2hk_x J_v \coth(-k_x d)} \right] \\ & + \alpha_{11} \sin I J_- + i J'_- + \frac{\alpha_{12}^2 \sin^2 I \beta_0 J_- J_v}{\alpha_{22} \sin I \beta_0 J_v + i \sin I \beta_0 J'_v - i 2hk_x J_v \coth(-k_x d)} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

左式中第一项是由电离层反馈性引入的,后三项给出不考虑反馈时 IAR 的色散关系。

根据 Pokhotelov^[16],在 $k_{\perp} h \gg 1$ 条件下, $\beta \approx \beta_0$ 附近, Bessel 函数以指数形式变化: $J_{k_x h}(\eta) \propto \exp(-k_x z)$, 所以 $J'_{k_x h} = 2hk_x J_{k_x h} / \eta$. 另外在 $k_{\perp} d \gg 1$ 条件下, 即波的水平尺度远小于大气层高度, $\coth(-k_x d) = -1$. 令 $\kappa_{px} = E_{x0} / n_0 \cdot \alpha_p Q / (\mu_0 V_{AI}^2)$, $\kappa_{py} = E_{y0} / n_0 \cdot \alpha_p Q / (\mu_0 V_{AI}^2)$, 则(14)式可写为

$$\begin{aligned} & \frac{i}{\beta_0 + i\tau} \left(\text{icos}IJ'_- + \text{icos}I\beta_0 J''_- - \frac{2hk_x J'_-}{\sin I} \right) \left[\left(\frac{\kappa_{px}}{\sin^2 I} + \kappa_{py} \frac{\alpha_h}{\alpha_p \sin I} \right) + \frac{\alpha_h \beta_0}{\alpha_p \sin I \beta_0 + i 4hk_x} \left(\frac{\alpha_h}{\alpha_p \sin I} \kappa_{px} - \kappa_{py} \right) \right] \\ & + \left(\frac{\alpha_p}{\sin I} + \frac{\alpha_h^2 \beta_0}{\alpha_p \sin I \beta_0 + i 4hk_x} \right) J_- + i J'_- = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

下面简要分析电离层分别处于高电导率与低电导率情况下的色散关系. 令 $\beta_0 = \xi + i\chi$ (相应的 $\omega = \nu + i\gamma$), 其中 $\xi = \nu \cdot 2h / (V_{AI} \sin I)$ 为归一化角频率, $\chi = \gamma \cdot 2h / (V_{AI} \sin I)$ 为归一化增长率, 均以 $V_{AI} \sin I / 2h$ 为单位. 在 ξ 邻域内将 Bessel 函数展开, 并根据其性质^[15], 式(15)中 Bessel 函数及其导数可写为如下形式:

$$J_{-i\beta_0 \epsilon} \approx J_0(\xi) - i\chi J_1(\xi) - i\xi \epsilon \frac{\pi}{2} Y_0(\xi), \quad (16)$$

$$J'_{-i\beta_0 \epsilon} \approx -J_1(\xi) - i\chi \left[J_0(\xi) - \frac{J_1(\xi)}{\xi} \right] + i\xi \epsilon \frac{\pi}{2} Y_1(\xi), \quad (17)$$

$$J''_{-i\beta_0 \epsilon} \approx -J_0(\xi) + \frac{\xi}{\xi^2 + \chi^2} J_1(\xi) + i \left[\chi J_1(\xi) - \frac{2\chi}{\xi^2 + \chi^2} J_1(\xi) + \frac{\xi\chi}{\xi^2 + \chi^2} J_0 + \xi \epsilon \frac{\pi}{2} Y_0(\xi) - \frac{\xi^2}{\xi^2 + \chi^2} \epsilon \frac{\pi}{2} Y_1(\xi) \right]. \quad (18)$$

在推导过程中忽略了 $\chi \epsilon$ 的二阶项, 注意到此时 χ 假定为一阶小量。

将(16)~(18)式代入(15)式, 为公式推导的方便并能够得到倾斜磁场的作用这里忽略了 Hall 电导率, 得到以下关系:

$$\begin{aligned} & \frac{i}{\beta_0 + i\tau} \frac{\kappa_{px}}{\sin^2 I} \text{icos}I \left[-J_1 - i\chi \left(J_0 - \frac{J_1}{\xi} \right) + i\xi \epsilon \frac{\pi}{2} Y_1 \right] - \frac{i}{\beta_0 + i\tau} \frac{\kappa_{px}}{\sin^2 I} \frac{2hk_x}{\sin I} \left[-J_1 - i\chi \left(J_0 - \frac{J_1}{\xi} \right) + i\xi \epsilon \frac{\pi}{2} Y_1 \right] \\ & + \frac{i}{\beta_0 + i\tau} \frac{\kappa_{px}}{\sin^2 I} \text{icos}I\beta_0 \left[-J_0 + \frac{\xi}{\xi^2 + \chi^2} J_1 + i \left(\chi J_1 - \frac{2\chi}{\xi^2 + \chi^2} J_1 + \frac{\xi\chi}{\xi^2 + \chi^2} J_0 + \xi \epsilon \frac{\pi}{2} Y_0 - \frac{\xi^2}{\xi^2 + \chi^2} \epsilon \frac{\pi}{2} Y_1 \right) \right] \\ & + \frac{\alpha_p}{\sin I} \left(J_0 - i\chi J_1 - i\xi \epsilon \frac{\pi}{2} Y_0 \right) + i \left[-J_1 - i\chi \left(J_0 - \frac{J_1}{\xi} \right) + i\xi \epsilon \frac{\pi}{2} Y_1 \right] = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

这里的 J_1, J_0, Y_1, Y_0 分别代表 $J_1(\xi), J_0(\xi), Y_1(\xi), Y_0(\xi)$.

整理后, 实部满足关系:

$$\begin{aligned} & \alpha_p J_0 \xi + \alpha_p J_1 \xi \chi^2 + \frac{\alpha_p}{\sin I} J_1 \chi + \alpha_p Y_0 \xi \chi \epsilon \frac{\pi}{2} + \alpha_p Y_0 \xi \tau \epsilon \frac{\pi}{2} + J_1 \tau \\ & + J_1 \kappa_{px} \frac{\cos I}{\sin^2 I} + J_0 \xi \chi \sin I - J_1 \chi \kappa_{px} \frac{2hk_x}{\sin^3 I} + J_1 \frac{\chi}{\xi} \kappa_{px} \frac{2hk_x}{\sin^3 I} + J_0 \xi \kappa_{px} \frac{\cos I}{\sin^2 I} \\ & + J_1 \kappa_{px} \frac{\cos I}{\sin^2 I} + J_1 \chi^2 \kappa_{px} \frac{\cos I}{\sin^2 I} - J_1 \frac{2\chi^2}{\xi} \kappa_{px} \frac{\cos I}{\sin^2 I} + J_0 \frac{\chi^2}{\xi} \kappa_{px} \frac{\cos I}{\sin^2 I} \\ & + Y_0 \xi \chi \epsilon \frac{\pi}{2} \kappa_{px} \frac{\cos I}{\sin^2 I} - Y_1 \chi \epsilon \frac{\pi}{2} \kappa_{px} \frac{\cos I}{\sin^2 I} - Y_1 \xi^2 \epsilon \frac{\pi}{2} \sin I + Y_1 \xi \epsilon \frac{\pi}{2} \kappa_{px} \frac{2hk_x}{\sin^3 I} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

虚部满足关系:

$$\begin{aligned}
& \alpha_p J_0 \chi + \frac{\alpha_p}{\sin I} J_0 \tau - \alpha_p J_1 \xi \chi - \alpha_p Y_0 \xi^2 \epsilon \frac{\pi}{2} - J_1 \xi \sin I + J_1 \kappa_{px} \frac{2hk_x}{\sin^3 I} + J_0 \chi^2 \sin I \\
& + J_0 \chi \tau + J_0 \chi \kappa_{px} \frac{\cos I}{\sin^2 I} - J_1 \frac{\chi^2}{\xi} \sin I - J_1 \frac{\chi \tau}{\xi} + J_1 \frac{2}{\xi} \kappa_{px} \frac{\cos I}{\sin^2 I} - J_0 \chi \kappa_{px} \frac{\cos I}{\sin^2 I} \\
& - Y_0 \xi^2 \epsilon \frac{\pi}{2} \kappa_{px} \frac{\cos I}{\sin^2 I} + Y_1 \xi \epsilon \frac{\pi}{2} \kappa_{px} \frac{\cos I}{\sin^2 I} - Y_1 \xi \chi \epsilon \frac{\pi}{2} \sin I - Y_1 \xi \tau \epsilon \frac{\pi}{2} \sin I \\
& - Y_1 \xi \epsilon \frac{\pi}{2} \kappa_{px} \frac{\cos I}{\sin^2 I} - J_1 \xi \chi \kappa_{px} \frac{\cos I}{\sin^2 I} + J_0 \chi \kappa_{px} \frac{\cos I}{\sin^2 I} = 0. \tag{21}
\end{aligned}$$

当电离层处于高电导率时,即 $\alpha_p \gg 1$ 时,仅保留零阶量,方程(20)可写为

$$\alpha_p J_0 \xi = 0 \tag{22}$$

此时方程的解为 $J_0(\xi)$ 的零点,将 $J_0 = 0$ 代入(21)式得到

$$\chi = -\frac{Y_0}{J_1} \xi \epsilon \frac{\pi}{2} - \frac{\sin I}{\alpha_p} + \frac{\kappa_{px}}{\alpha_p \xi} \frac{2hk_x}{\sin^3 I}, \tag{23}$$

这里忽略了二阶量的作用,注意到增长率为 $\gamma = V_{Al} \sin I / 2h \cdot \chi$. 当 $\kappa_{px} = 0$, 式(23)简化为未考虑反馈的衰减率. 式(23)最后一项是由反馈引入的增长项. 当 $\frac{\kappa_{px}}{\alpha_p \xi} \frac{2hk_x}{\sin^3 I} > \frac{Y_0}{J_1} \xi \epsilon \frac{\pi}{2} + \frac{\sin I}{\alpha_p}$ 时,形成不稳定性,可以看出,此时 I 的减小有利于不稳定性的形成.

当电离层处于低电导率时,即 $\alpha_p \ll 1$ 时,方程(20)可写为

$$-J_1 \xi \sin I + J_1 \kappa_{px} \frac{2hk_x}{\sin^3 I} = 0, \tag{24}$$

代入(21)式得到

$$\begin{aligned}
\chi = & \frac{-\alpha_p \xi - \xi \kappa_{px} \frac{\cos I}{\sin^2 I} + \frac{Y_1}{J_0} \xi^2 \epsilon \frac{\pi}{2} \sin I}{\xi \sin I - \kappa_{px} \frac{2hk_x}{\sin^3 I}} \\
& - \frac{\frac{Y_1}{J_0} \xi \epsilon \frac{\pi}{2} \kappa_{px} \frac{2hk_x}{\sin^3 I}}{\xi \sin I - \kappa_{px} \frac{2hk_x}{\sin^3 I}}, \tag{25}
\end{aligned}$$

式中第一项分子为负值(注意到 Y_1 与 J_0 符号相反),第二项分子为正值,当 $\xi \sin I > \kappa_{px} \frac{2hk_x}{\sin^3 I}$, 第一项给出 Alfvén 波在 IAR 中的衰减,第二项给出由于反馈产生的波的增长,此时 I 的减小同样有利于不稳定性的形成;当 $\xi \sin I < \kappa_{px} \frac{2hk_x}{\sin^3 I}$, 情况相反. 需要注意的是,由于 n_0 与 α_p 成正比,当 $\alpha_p \ll 1$ 时, $\delta n \ll n_0$ 的条件可能不再满足.

图 1 显示的是根据(15)式,通过数值计算得出的第一谐振频率与增长率,背景参数为 $k_x = 0.1 \text{ km}^{-1}$, $\epsilon = 0.1$, $\alpha_h = 0$, $\kappa_{px} = 0.02$, $\tau = 0$. 横坐标为归一化电离层 Pederson 电导率 α_p . 由于电离层反馈不稳定

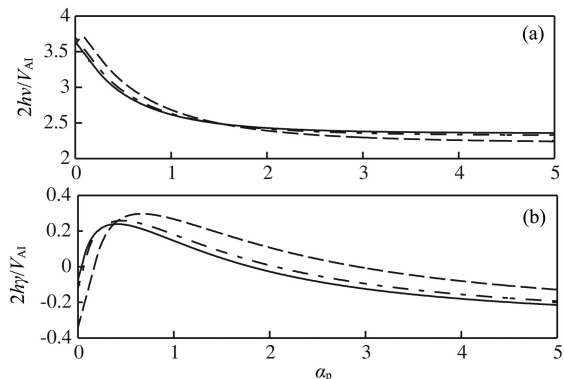


图 1 反馈不稳定情况下谐振频率(a)与增长率(b) $I=90^\circ, 80^\circ, 70^\circ$ (实线, 点划线, 双划线), $k_x=0.1 \text{ km}^{-1}$, $\epsilon=0.1$, $\alpha_h=0$, $\kappa_{px}=0.02$, $\kappa_{py}=0$, $\tau=0$
Fig. 1 Resonant frequency (a) and growth rate (b) for $I=90^\circ, 80^\circ, 70^\circ$ (solid line, dash-dotted line, dashed line), $k_x=0.1 \text{ km}^{-1}$, $\epsilon=0.1$, $\alpha_h=0$, $\kappa_{px}=0.02$, $\kappa_{py}=0$ and $\tau=0$ when ionospheric feedback is considered

性主要发生在极区附近,所以分别选择了 $I=90^\circ$ (实线)、 80° (点划线)、 70° (双划线)的情况. 由图中可以看出,当 $I=90^\circ$, 谐振频率随 α_p 的增大而减小,增长率随 α_p 先增大而后减小,在 $\alpha_p=0.3$ 附近达到最大值. $I=80^\circ$ 时谐振频率与增长率的变化与 $I=90^\circ$ 类似,但增长率有所增大. $I=70^\circ$ 时增长率的最大值变大,并且谐振频率与增长率整体向 α_p 增大的方向偏移,这是等效电离层电导率作用的结果. $\alpha_p \gg 1$ 时,谐振频率随 I 的增大而增大,而增长率则减小,这也印证了前述分析.

由式(15)可以看出,当 $\alpha_h=0$ (不考虑 Alfvén 波与压缩波的耦合时), κ_{py} 不起任何作用,也即如果没有 Hall 电导率, y 方向的背景电场对反馈不稳定性没有影响,这里的 y 向为磁经方向. 由于地轴与磁轴存在一定夹角,如果背景电场取晨昏电场,则 x 向与 y 向电场可能都不为 0,两者都会对反馈不稳定性产生影响. 图 2 为 $\kappa_{px}=\kappa_{py}=0.02$, $\alpha_h=\alpha_p$ 条件下的谐振频率与增长率,其他参数与图 1 一致. 与图 1 有所不同,谐振频率在 $\alpha_p < 1$ 处变化较大,尤其是对于 $I=90^\circ, 80^\circ$ 两种情况. 另外,图 2 所示谐振频率

随 α_p 的变化相对平缓 ($\alpha_p \sim 1$), 这主要是由于 Hall 电导率对谐振频率的变化起到了平缓的作用. 在图 1 中 $I = 90^\circ, 80^\circ, 70^\circ$ 对应增长率的最大值分别为 0.239、0.257 和 0.296, 而图 2 中 $I = 90^\circ, 80^\circ, 70^\circ$ 对应增长率的最大值分别为 0.40、0.40 和 0.39. $I = 90^\circ, 80^\circ$ 时增长率的最大值较图 1 有所增大, 并与 $I = 70^\circ$ 情况下的增长率接近, 甚至大于 $I = 70^\circ$ 情况下的增长率, 说明 Hall 电导率对于 I 较大时对应的增长率提升较明显.

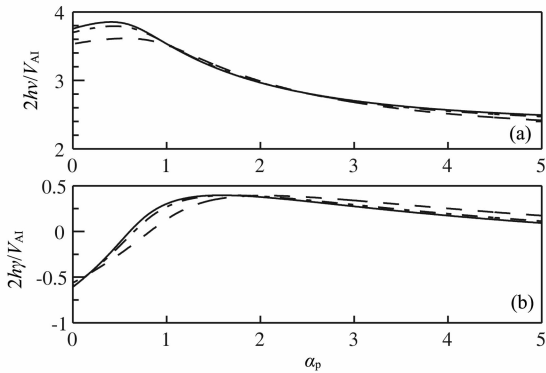


图 2 考虑 Hall 电导率时谐振频率(a)与增长率(b)

$I = 90^\circ, 80^\circ, 70^\circ$ (实线, 点划线, 双划线), $\kappa_{px} = \kappa_{py} = 0.02$, $\alpha_h = \alpha_p$
 Fig. 2 Resonant frequency (a) and growth rate (b) for $I = 90^\circ, 80^\circ, 70^\circ$ (solid line, dash-dotted line, dashed line), $\kappa_{px} = \kappa_{py} = 0.02$ and $\alpha_h = \alpha_p$

4 讨论和结论

电离层反馈不稳定性的能量来源于电离层的焦耳热^[18], 电离层电导率在电离层反馈不稳定性的形成中起到重要作用. 本文主要讨论了磁场倾斜对反馈的影响, 磁场倾角的引入通过改变等效的电离层电导率, 进而影响电离层的反馈. 事实上, 影响电离层反馈的因素很多, 包括电离层以上 Alfvén 速度随高度的梯度 $\epsilon = V_{Al}/V_{AM}$ 、电离层 Pedersen 电导率 Σ_p 以及 Hall 电导率 Σ_h 、背景电离层电场强度 E_{0x}^I 与 E_{0y}^I 、粒子沉降导致中性粒子电离的源项 S , 以及电离层的复合率 R . Alfvén 速度随高度的梯度越大, IAR 捕获的 Alfvén 波能量的能力越强^[15], 反馈的增长率也就越大, 但其对谐振频率影响较小. 电离层 Pedersen 电导率在 IAR 中起到重要的作用, 它不仅影响谐振频率, 也影响增长率. 忽略电离层反馈时, 谐振频率随 Pedersen 电导率逐渐减小 (从一阶 Bessel 函数的零点到零阶 Bessel 函数的零点), 增长率随 Pedersen 电导率先减小后增大, 在 $\alpha_p \approx 1$ 时

衰减最强, 能量被电离层吸收, 考虑到电离层反馈时, Alfvén 波携带的场向电流改变电离层电导率, 因而相对于 α_p 较大的情况, α_p 较小时反馈对谐振频率与增长率的影响更加强烈. IAR 中 Alfvén 波通过电离层 Hall 电导率与快波耦合, 这种耦合不仅导致 IAR 的频移, 而且导致反馈增长率的增大^[16], 但 Hall 电导率的作用相对较弱. 参数 κ_{px} 与 κ_{py} 中包含了背景电离层电场强度 E_{0x}^I 与 E_{0y}^I 以及粒子沉降导致中性粒子电离的源项 S 的作用, 其中 E_{0x}^I 通过 Pedersen 电导率提供电离层反馈的能量, 注意到 Alfvén 波的电场扰动分量沿 x 方向, 由 Alfvén 波的电场扰动在电离层产生的 Pederson 电流也沿 x 方向. 而 E_{0y}^I 通过 Hall 电导率对 IAR 反馈不稳定性产生作用, 压缩波的电场扰动沿 y 方向, 由此产生的电离层 Hall 电流也沿 y 方向. 另外源项 S 的增大无疑将有助于反馈不稳定性的形成, 而电离层的复合率 R 将抑制不稳定性的发展.

磁场的倾角与 Alfvén 速度梯度 ϵ 、电离层 Pedersen 电导率 Σ_p 以及 Hall 电导率 Σ_h 一样, 都是 IAR 的基本参数, 这些参数决定了电离层 Alfvén 谐振腔的特性, 进而也影响 IAR 反馈不稳定性的特征. 磁场倾斜的影响主要体现在两个方面: 一方面, 它改变了谐振腔的路径, 谐振腔两个反射面(电离层与 Alfvén 速度梯度极大值)的距离随着磁场倾斜的增大而减小, 在 Alfvén 速度相同的情况下, IAR 的谐振频率随之减小, 衰减率也有所改变; 另一方面, 磁场的倾斜改变了电离层电导率张量(参考(7)式), 且对张量中各项的影响也不尽相同, 说明对于不同波模磁场倾斜的作用是有所不同的, 如前文所述, 电导率的变化影响着 IAR 的特性, 所以倾斜的磁场通过改变电离层电导率张量影响 IAR. 除此以外, 磁倾角也对色散关系中的反馈项(式(14)左式第一项)有所影响, 这种影响通过场向电流以及反馈产生的电离层电导率变化体现.

本文的一个重要假设是 $k_y = 0$, 这对应了磁流体波在磁子午面内的传播, 此时, 剪切模的电场扰动只有 x 分量, 压缩模只有 y 分量, 它们通过电离层 Hall 电导率产生耦合. 但当 $k_y \neq 0$ 时, 两种波模都有 x 与 y 方向的分量, 它们的解很难区分, 且即使不考虑 Hall 电导率, 两种波模也会产生耦合^[19], 这些因素将会对电离层反馈不稳定性的分析产生一定影响. $k_y \neq 0$ 的情况将在以后的工作中讨论.

通过以上的分析, 我们得到以下结论: 磁场的倾斜对电离层反馈不稳定性的影响非常复杂, 磁场的

倾角可以有效改变 IAR 反馈不稳定性的谐振频率与增长率,磁场方向向上时,在电离层电导率较大的情况下,磁场的倾角减小有利于电离层不稳定性的形成,电离层 Hall 电导率可以增大 IAR 反馈不稳定性的增长率,且对于较大的倾角增长率提升较大。

参考文献(References)

- [1] Sato T. A theory of quiet auroral arcs. *J. Geophys. Res.*, 1978, 83(A3): 1042-1048.
- [2] Miura A, Sato T. Numerical simulation of global formation of auroral arcs. *J. Geophys. Res.*, 1980, 85(A1): 73-91.
- [3] Watanabe K, Sato T. Self-excitation of auroral arcs in a three-dimensionally coupled magnetosphere-ionosphere system. *Geophys. Res. Lett.*, 1988, 15(7): 717-720.
- [4] Streltsov A V, Lotko W. Multiscale electrodynamics of the ionosphere-magnetosphere system. *J. Geophys. Res.*, 2004, 109: A09214, doi: 10.1029/2004JA010457.
- [5] Streltsov A V, Lotko W. Ultra-low-frequency electrodynamics of the magnetosphere-ionosphere interaction. *J. Geophys. Res.*, 2005, 110: A08203, doi: 10.1029/2004JA010764.
- [6] Lu J Y, Rankin R, Marchand R, et al. Electrodynamics of magnetosphere-ionosphere coupling and feedback on magnetospheric field line resonances. *J. Geophys. Res.*, 2007, 112: A10219, doi: 10.1029/2006JA012195.
- [7] Lu J Y, Wang W, Rankin R, et al. Electromagnetic waves generated by ionospheric feedback instability. *J. Geophys. Res.*, 2008, 113: A05206, doi: 10.1029/2007JA012659.
- [8] Polyakov S V, Rapoport V O. Ionospheric Alfvén resonator. *Geomag. Aeronomy*, 1981, 21: 816-822.
- [9] Trakhtengertz V Y, Feldstein A Y. Effect of the nonuniform Alfvén velocity profile on stratification of magnetospheric convection. *Geomagnetism and Aeronomy*, 1981, 21(5): 771.
- [10] Trakhtengertz V Y, Feldstein A Y. Quiet auroral arcs: ionospheric effect of magnetospheric convection stratification. *Planet. Space Sci.*, 1984, 32(2): 127-134.
- [11] Lysak R L. Theory of auroral zone PiB pulsation spectra. *J. Geophys. Res.*, 1988, 93(A6): 5942-5946.
- [12] Belyaev P P, Polyakov S V, Rapoport V O, et al. The ionospheric Alfvén resonator. *J. Atmos. Terr. Phys.*, 1990, 52(9): 781-787.
- [13] Belyaev P P, Bösinger T, Isaev S V, et al. First evidence at high latitudes for the ionospheric Alfvén resonator. *J. Geophys. Res.*, 1999, 104(A3): 4305-4317.
- [14] Grzesiak M. Ionospheric Alfvén resonator as seen by Freja satellite. *Geophys. Res. Lett.*, 2000, 27(7): 923-926.
- [15] Lysak R L. Feedback instability of the ionospheric resonant cavity. *J. Geophys. Res.*, 1991, 96(A2): 1553-1568.
- [16] Pokhotelov O A, Pokhotelov D, Streltsov A, et al. Dispersive ionospheric Alfvén resonator. *J. Geophys. Res.*, 2000, 105(A4): 7737-7746.
- [17] Pokhotelov O A, Khrushev V, Parrot M, et al. Ionospheric Alfvén resonator revisited: feedback instability. *J. Geophys. Res.*, 2001, 106(A11): 25813-25824.
- [18] Lysak R L, Song Y. Energetics of the ionospheric feedback interaction. *J. Geophys. Res.*, 2002, 107(A8): 1160, doi: 10.1029/2001JA000308.
- [19] Sciffer M D, Waters C L. Propagation of ULF waves through the ionosphere: analytic solutions for oblique magnetic fields. *J. Geophys. Res.*, 2002, 107(A10): 1297, doi: 10.1029/2001JA000184.
- [20] 石润, 赵正予, 张北辰. 电离层 Alfvén 谐振器对地面观测到的地磁信号的影响初步研究. *地球物理学报*, 2010, 53(9): 2013-2022.
- Shi R, Zhao Z Y, Zhang B C. Investigating the influence of IAR on geomagnetic signals at ground. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2010, 53(9): 2013-2022.

(本文编辑 何 燕)