文章编号:1003 - 207(2008)02 - 0025 - 05

DEA 的非参数规模收益预测方法

魏权龄 ,张倩伟

(中国人民大学经济学院 ,北京　100872)

摘　要:本文运用"交形式"生产可能集 ,对于具有多种生产要素投入的"生产部门",给出非参数方法所确定的多个变量的生产函数 ,进而讨论了当投入规模增大时 ,判别规模收益将处于递增、不变、递减、"饱和"和"拥挤"状态的充分必要条件。这对于每个决策单元("企业"或"部门")相对而言是否需要扩大规模和如何扩大规模给出科学的分析。

关键词:"交形式"生产可能集 ,非参数的生产函数 ,规模收益

中图分类号:C931　　　**文献标识码**:A

1　引言

数据包络分析(Data Envelopment Analysis ,简称 DEA)是 1978 年由 A. Charnes 和 W. W. Cooper 等人首先开创的一个经济学、数学、管理科学交叉研究的新领域。DEA 是用来评价"决策单元"相对有效性的 ,同时 DEA 方法也可以看作是一种非参数的统计估计方法[1] 。近三十年来 ,DEA 理论和模型有了很大的发展[2 - 4] ,在诸多领域得到了成功的应用[5 - 9] 。众所周知 ,通常在使用统计方法确定生产函数时 ,需要事先给出生产函数的具体形式(含有参数的函数类) ,再根据统计方法去确定参数。当生产函数确定后 ,可以判断规模收益状况。

通常 ,使用 DEA 方法评估规模收益状况和"拥挤"迹象时 ,是使用"和形式"的生产可能集 ,并且通过线性规划来判断。而且 ,评估的状态都是"决策单元"当前的状况[13 ,16 —18] ;在利用 DEA 方法进行预测时 ,只限于对产出的预测 ,而没有预测出当投入增大时 ,规模收益的状态(包括"饱和"和"拥挤")[2] 。

本文给出的理论和方法不用事先认定生产函数的具体形式 ,而是利用决策单元的(横向)投入数据和产出数据(即统计学中的"样本"数据) ,根据公理体系确定"和形式"的生产可能集。然后使用将"交形式"的多面锥转化为"和形式"多面锥的方法 ,将"和形式"的生产可能集转化为"交形式"的生产可能集[10 - 12] 。再由此"交形式"的生产可能集 ,给出生产函数的解析表达式。进而预测和判别:当投入要素增大时 ,决策单元的规模收益状况 ,其中规模收益状况包括: 规模收益递增、不变、递减、"饱和"和"拥挤"。这里的规模收益状况为"饱和",是指当生产的投入要素增大时 ,产出仍保持不变的一种状态 ;规模收益状况为"拥挤",是指当生产的投入要素增大时 ,产出不但不会增大 ,反而将会减少的一种状态。本文给出的预测和判别规模收益状况的"充分必要"条件是基于生产前沿面的结构特征得到的。

2　"交形式"的生产可能集

考虑具有 m 个生产要素投入和一个产出的生产可能集:

$$T = \{ (x , y) \mid 投入\ x \in E^m ,产出\ y \in E^1 \}$$

设有 n 个决策单元(例如: n 个具有可比性的"生产部门") ,它们的投入、产出(即"样本")为

$$(x_j , y_j) , j = 1 , \cdots, n$$

其中

$$x_j \in E^m , x_j > 0 , y_j \in E^1 , y_j > 0 , j = 1 , \cdots, n$$

为了确定出生产可能集 T ,对生产可能集需给出公理化假设。根据研究规模收益状况的需要 ,假设生产可能集(记为 T_{WY})满足以下的四个公理(关于生产可能集的公理体系见文献[13] ,[14] ,[15] ,[16] ,生产可能集 T_{WY} 的公理体系见文献[17]) :

(a)　平凡性公理: $(x_j , y_j) \in T_{WY}$, $j = 1 , \cdots,$

收稿日期:2007 - 11 - 06 ;**修订日期**:2008 - 03 - 31

基金项目:国家自然科学基金资助项目(70371058 ;70531040) ;中国人民大学"985"工程重点建设项目基金的资助

作者简介:魏权龄(1939 -) ,男(汉族) ,辽宁盖县人 ,中国人民大学运筹学与数量经济研究所 ,所长 ,教授 ,研究方向:运筹学、数理经济、DEA、最优化与数据挖掘.

n;

(b) 凸性公理:若 $(x,y) \in T_{WY}$, $(\hat{x},\hat{y}) \in T_{WY}$,则对 $\forall \alpha \in [0,1]$,有 $\alpha(x,y) + (1-\alpha)(\hat{x},\hat{y}) \in T_{WY}$;

(c) 产出无效性公理:若 $(x,y) \in T_{WY}$, $\hat{y} \leqq y$,则 $(x,\hat{y}) \in T_{WY}$;

(d) 最小性公理: T_{WY} 是所有满足公理(a),(b),(c)的最小者。

这里需要说明的是:生产可能集 T_{WY} 不满足投入无效性公理(投入无效性公理是说,若 $(x,y) \in T_{WY}$, $x \leqq \hat{x}$,则 $(\hat{x},y) \in T_{WY}$),这是因为当生产要素投入增大时,产出可能会减少,即规模收益可能呈现"拥挤"现象。可以证明:满足上述公理(a)—(d)的生产可能集 T_{WY} 可以表示成如下形式(称为"和形式"):

$$T_{WY} = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} x_j\lambda_j = x,\ \sum_{j=1}^{n} y_j\lambda_j \geqq y,\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1, \lambda_j \geqq 0,\ = 1,\cdots,n \right\}$$

为了确定非参数形式的生产函数,并进而讨论决策单元的规模收益状况,需要利用多面锥由"交形式"转变为"和形式"的方法[10,11],将"和形式"的生产可能集转化为"交形式"。为此,记

$$Q = \{(\omega,\mu,\mu_0) \mid \omega^T x_j - \mu y_j + \mu_0 \geqq 0, \omega \in E^m, \mu \in E^1, \mu \geqq 0, \mu_0 \in E^1, j = 1,\cdots,n\}$$

令 Q 的极方向为 (ω^k,μ^k,μ_0^k), $k = 1,\cdots,l$,则 T_{WY} 的"交形式"为[11]

$$T_{WY} = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \omega^{kT} x - \mu^k y + \mu_0^k \geqq 0, k = 1,\cdots,l, y \geqq 0 \right\}$$

其中 $\omega^k \in E^m$, $\mu^k \in E^1$, $\mu^k \geqq 0$, $\mu_0^k \in E^1$, $k = 1,\cdots,l$, $(\omega^k,\mu^k) \neq 0$, $k = 1,\cdots,l$,且 $\exists k'(1 \leq k' \leq l)$, $\exists k''(1 \leq k'' \leq l)$,有 $\omega^{k'} \neq 0$, $\mu^{k''} \neq 0$,以及 $\omega^{kT} x_j - \mu^k y_j + \mu_0^k \geqq 0$, $j = 1,\cdots,n$; $k = 1,\cdots,l$.

3 非参数的生产函数的解析表达式

根据样本数据 (x_j,y_j), $j = 1,\cdots,n$,可以得到"交形式"的生产可能集 $T_{WY} = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \omega^{kT} x - \mu^k y + \mu_0^k \geqq 0, k = 1,\cdots,l \right\}$。由此可以确定非参数的生产函数的解析表达式。记 $R = \left\{ x \,\middle|\, \exists y' \geqq 0,\text{使得}(x,y') \in T_{WY} \right\}$,于是,对 $\forall x \in \mathbf{R}$, $\exists y' \geqq 0$,使得 $\omega^{kT} x - \mu^k y' + \mu_0^k \geqq 0$, $k = 1,\cdots,l$. 由生产函数的定义:当生产要素投入为 $x \in \mathbf{R}$时,产出的最大值为 y,要素投入 x 和最大产出 y 之间有函数关系 $y = f(x)$,即生产函数 $f(x)$。不难看出,生产函数 $f(x)$ 有如下的解析表达式

$$y = f(x) = \min_{\mu^k \neq 0} \frac{\omega^{kT} x + \mu_0^k}{\mu^k},\ x \in \mathbf{R}.$$

其中 R 为它的定义域,并且由 T_{WY} 的闭集和凸集性质,可知集合 R 也为闭凸集;不难证明 $f(x)$ 为凹函数。由于 (x_j,y_j), $j = 1,\cdots,n$ 为"横向数据",例如"生产部门"的数据,生产函数 $f(x)$ 可看作是"行业"的生产函数。

4 投入增加时的规模收益分析和结构特征

设 $x_0 \in \mathbf{R}$, $\alpha > 1$, $\alpha - 1$ 很小,且 $\alpha x_0 \in \mathbf{R}$,由生产函数的定义,有(见图 1)

$$f(x_0) = \min_{\mu^k \neq 0} \frac{\omega^{kT} x_0 + \mu_0^k}{\mu^k},\quad f(\alpha x_0) = \min_{\mu^k \neq 0} \frac{\omega^{kT}(\alpha x_0) + \mu_0^k}{\mu^k}$$

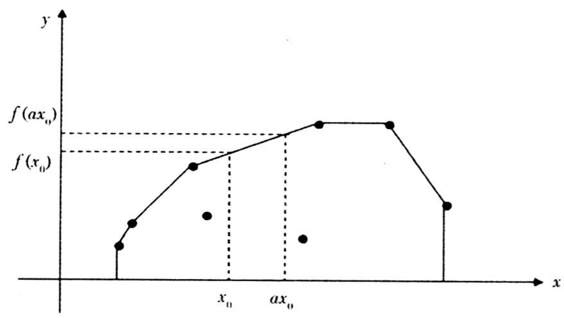

图 1 生产函数

在下面的定义 1 中,我们讨论处于 x_0 的投入,当由 x_0 增大到 αx_0 时 $(\alpha > 1)$,规模收益的状况。这里的规模收益状况包括:规模收益递增,规模收益不变,规模收益递减,规模收益"饱和"(即当生产要素投入由 x_0 增大到 αx_0 时,产出不变的一种状态)和"拥挤"(即当生产要素的投入增大时,产出将会减少的一种状态)。研究规模收益为递增、不变和递减,是比较 $f(\alpha x_0)$ 与 $\alpha f(x_0)$ 的大小;而研究"饱和"和"拥挤"是分别研究是否有 $f(\alpha x_0) = f(x_0)$,以及 $f(\alpha x_0) < f(x_0)$.

定义 1 设 $x_0 \in \mathbf{R}$, $\alpha > 1$, $\alpha - 1$ 很小,且 $\alpha x_0 \in \mathbf{R}$,

(i) 若有 $f(\alpha x_0) > \alpha f(x_0)$,称投入规模 x_0 处于规模收益的递增状态;

(ii) 若有 $f(\alpha x_0) = \alpha f(x_0)$,称投入规模 x_0 处于规模收益的不变状态;

(iii) 若有 $f(\alpha x_0) < \alpha f(x_0)$,称投入规模 x_0 处于规模收益的递减状态;

(iv) 若有 $f(\alpha x_0) = f(x_0)$,称投入规模 x_0 处于

规模收益的“饱和”状态;

(v) 若有 $f(\alpha x_0) < f(x_0)$,称投入规模 x_0 处于规模收益的“拥挤”状态。

设 $x_0 \in \mathbf{R}$, $\alpha > 1$, $\alpha x_0 \in \mathbf{R}$,记

$$E(x_0) = \{ k \mid \omega^{kT} x_0 - \mu^k f(x_0) + \mu_0^k = 0, \mu^k \neq 0, 1 \leq k \leq l \}$$

$$E(\alpha x_0) = \{ k \mid \omega^{kT} (\alpha x_0) - \mu^k f(\alpha x_0) + \mu_0^k = 0, \mu^k \neq 0, 1 \leq k \leq l \}$$

$$\delta^* = \min_{\substack{k' \in E(x_0) \\ k \notin E(x_0),\text{且}\mu^k \neq 0}} \{\delta_{k,k'}\} > 0 \text{ ,其中}$$

$$\delta_{k,k'} = \frac{\omega^{kT} x_0 - \mu^k y_0 + \mu_0^k}{\omega^{kT} x_0 - \mu^k y_0 + \mu_0^k + \dfrac{\mu^k \mu_0^{k'} - \mu^{k'} \mu_0^k}{\mu^{k'}}},$$

先给出几个引理:

引理 1　当 $0 < \alpha - 1 < \delta^*$ 时,有 $E(\alpha x_0) \subset E(x_0)$

证明:其证明是初等的,从略。

引理 2　当 $0 < \alpha - 1 < \delta^*$ 时,对 $\forall k \in E(\alpha x_0)$, 有 $f(\alpha x_0) = \alpha f(x_0) + \dfrac{(1-\alpha)\mu_0^k}{\mu^k}$.

证明:由引理 1, $E(\alpha x_0) \subset E(x_0)$,故对 $\forall k \in E(\alpha x_0)$ 有

$$\begin{aligned} f(\alpha x_0) &= \frac{\omega^{kT}(\alpha x_0) + \mu_0^k}{\mu^k} \\ &= \frac{\alpha \omega^{kT} x_0 + \alpha\mu_0^k - \alpha\mu_0^k + \mu_0^k}{\mu^k} \\ &= \frac{\alpha(\omega^{kT} x_0 + \mu_0^k)}{\mu^k} + \frac{(1-\alpha)\mu_0^k}{\mu^k} \\ &= \alpha f(x_0) + \frac{(1-\alpha)\mu_0^k}{\mu^k} \end{aligned}$$

得证。

引理 3　当 $0 < \alpha - 1 < \delta^*$ 时,对 $\forall k \in E(\alpha x_0)$, 有

(i) $f(\alpha x_0) > \alpha f(x_0) \Leftrightarrow (1-\alpha)\mu_0^k > 0 \Leftrightarrow \mu_0^k < 0$;

(ii) $f(\alpha x_0) = \alpha f(x_0) \Leftrightarrow (1-\alpha)\mu_0^k = 0 \Leftrightarrow \mu_0^k = 0$;

(iii) $f(\alpha x_0) < \alpha f(x_0) \Leftrightarrow (1-\alpha)\mu_0^k = 0 \Leftrightarrow \mu_0^k > 0$;

证明 由引理 2,得证。

引理 4　当 $0 < \alpha - 1 < \delta^*$ 时,对 $\forall k \in E(\alpha x_0)$, 有 $f(\alpha x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow \omega^{kT} x_0 = 0$.

证明 由引理 2,对 $\forall k \in E(\alpha x_0)$,有 $f(\alpha x_0) = \alpha f(x_0) + \dfrac{(1-\alpha)\mu_0^k}{\mu^k}$, 因此

$$\begin{aligned} f(\alpha x_0) = f(x_0) &\Leftrightarrow \alpha f(x_0) + \frac{(1-\alpha)\mu_0^k}{\mu^k} = f(x_0) \\ &\Leftrightarrow (1-\alpha)\left(\frac{\mu_0^k}{\mu^k} - f(x_0)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\mu_0^k}{\mu^k} = f(x_0) \\ &\Leftrightarrow \frac{\mu_0^k}{\mu^k} = \frac{\omega^{kT} x_0 + \mu_0^k}{\mu^k} \\ &\Leftrightarrow \omega^{kT} x_0 = 0 \end{aligned}$$

得证。

引理 5　当 $0 < \alpha - 1 < \delta^*$ 时,对 $\forall k \in E(\alpha x_0)$, 有 $f(\alpha x_0) < f(x_0) \Leftrightarrow \omega^{kT} x_0 < 0$.

证明　由引理 2,对 $\forall k \in E(\alpha x_0)$,有 $f(\alpha x_0) = \alpha f(x_0) + \dfrac{(1-\alpha)\mu_0^k}{\mu^k}$,因此

$$\begin{aligned} f(\alpha x_0) < f(x_0) &\Leftrightarrow \alpha f(x_0) + \frac{(1-\alpha)\mu_0^k}{\mu^k} < f(x_0) \\ &\Leftrightarrow (1-\alpha)\left(\frac{\mu_0^k}{\mu^k} - f(x_0)\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\mu_0^k}{\mu^k} > f(x_0) \\ &\Leftrightarrow \frac{\mu_0^k}{\mu^k} > \frac{\omega^{kT} x_0 + \mu_0^k}{\mu^k} \\ &\Leftrightarrow \omega^{kT} x_0 < 0 \end{aligned}$$

得证。

以下关于规模收益状况的判定定理,是从“交形式”的生产可能集的结构特征去分析的。

定理 1　设 $0 < \alpha - 1 < \delta^*$, $x_0 \in \mathbf{R}$, $\alpha x_0 \in \mathbf{R}$, 则有

(i) 投入 x_0 处于规模收益递增状态的充分必要条件是: $\mu_0^k < 0$, $k \in E(\alpha x_0)$;

(ii) 投入 x_0 处于规模收益不变状态的充分必要条件是: $\mu_0^k = 0$, $k \in E(\alpha x_0)$;

(iii) 投入 x_0 处于规模收益递减状态的充分必要条件是: $\mu_0^k > 0$, $k \in E(\alpha x_0)$;

(iv) 投入 x_0 处于规模收益“饱和”状态的充分必要条件是: $\omega^{kT} x_0 = 0$, $k \in E(\alpha x_0)$;

(v) 投入 x_0 处于规模收益“拥挤”状态的充分必要条件是: $\omega^{kT} x_0 < 0$, $k \in E(\alpha x_0)$

证明　结论(i) ,(ii) 和(iii) 由引理 3 得到;结论(iv) 由引理 4 得到;结论(v) 由引理 5 得到,得证。

5　数值算例

由定理 1,取 α 满足 $0 < \alpha - 1 < \delta^*$,则

对 $\forall k \in E(\alpha x_0) = \{ k \mid \omega^{kT}(\alpha x_0) - \mu^k (f(\alpha x_0)) + \mu_0^k = 0, \mu^k \neq 0\}$,有

$$
\omega^{kT}x_0=\begin{cases}>0,\mu_0^k=\begin{cases}<0\Leftrightarrow\text{规模收益递增}\\=0\Leftrightarrow\text{规模收益不变}\\>0\Leftrightarrow\text{规模收益递减}\end{cases}\\=0\Leftrightarrow\text{规模收益“饱和”}\\<0\Leftrightarrow\text{规模收益“拥挤”}\end{cases}
$$

例 1　考虑具有一个投入、一个产出,7 个决策单元的例子,其中投入数据和产出数据由表 1 给出。

表 1　投入数据和产出数据

决策单元	DMU_1	DMU_2	DMU_3	DMU_4	DMU_5	DMU_6	DMU_7
投入	3	4	5	10	14	16	18
产出	1	4	6	8	9	9	6

生产可能集为:

$$T_{WY}=\{(x,y)\mid\omega^k x-\mu^k y+\mu_0^k\geqq 0,k=1,\cdots,8,y\geqq 0\},$$

其中 ω^k, μ^k, μ_0^k, $k=1,\cdots,8$,由表 2 给出,交形式的生产可能集由图 2 给出。

表 2　生产前沿面的法方向 ω^k,μ^k 和截距 μ_0^k

k	1	2	3	4	5	6	7	8
ω^k	1	3	1	1	1	0	-3	-1
μ^k	0	1	1	2	4	1	2	0
μ_0^k	-3	-8	0	6	22	9	66	18

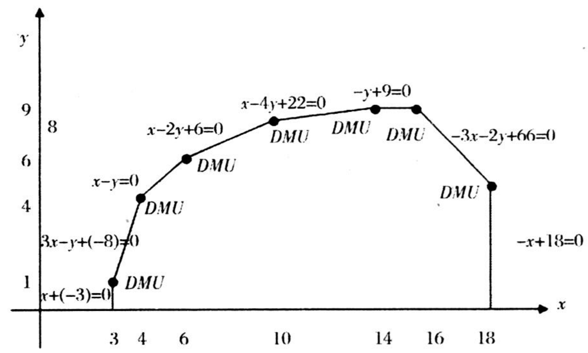

图 2　“交形式”生产可能集

取 $\alpha=1+\delta$, $\delta=2^{-4}$,有 $\alpha x_j\in\mathbf{R}$,且 $E(\alpha x_j)\subset E(x_j)$, $j=1,2,\cdots,6$. 由定理 1 可得表 3。

表 3　扩大规模后的规模收益状况($k\in E(\alpha x_j)$)

决策单元	DMU_1	DMU_2	DMU_3	DMU_4	DMU_5	DMU_6
k	2	3	4	5	6	7
$\omega^k x_j$	9	4	5	10	0	-48
μ_0^k	-8	0	6	22	9	66
规模收益(扩大规模 $\alpha>1$)	递增	不变	递减	递减	饱和	拥挤

6　结　语

本文主要结果:(i) 基于 DEA 生产前沿面思想提供的理论和方法,不用事先认定生产函数的具体形式,而是根据决策单元的(“横向”)投入数据和产出数据,得到非参数的生产函数的解析表达式。与传统 DEA 方法不同之处是:使用了“交形式”的生产可能集,给出了非参数方法的生产函数的明确解析表达式。(ii) 基于“交形式”生产前沿面的结构特征,给出了当生产要素的投入增大时,决策单元的规模收益状况,其中规模收益状况包括:规模收益递增、不变、递减、“饱和”和“拥挤”。与传统 DEA 评估规模收益状况不同之处是:本文的方法不需是用线性规划的单纯形方法;并且对规模收益状态的预测具有“动态性”,即研究投入增大时的规模收益状态。(iii) 这里给出的理论和方法适用广泛,可以应用到很多实际问题中,特别是可以推广去处理当某些投入增大时,研究投入相对于产出的规模收益状况,为决策单元(单位或部门)是否需要扩大规模和如何扩大规模提供决策依据。例如在高等院校的评估中,可以预测投入(如上级财政拨款,学校占地面积,教师人数等)规模扩大后,科学研究能力是否会同倍“增大”的状况 (这里的“增大”,包括递增、不变、递减、“饱和”和“拥挤”五种状态)。再如,在考查某医院对各科室的效益评估中,研究某些投入增大时,效益提高的状况。

参考文献:

[1] A. Charnes, W. W. Cooper and E. Rhodes, Measuring the efficiency of decision making units[J]. European Journal of Operational Research, 1978, (2): 429 - 444.

[2] W. W. Cooper, L. M. Seiford and K. Tone, Data Envelopment Analysis [M]. Kluwer Academic Publisher, Boston, Dordrecht, London, 2000.

[3] Wei Q. L.. Data Envelopment Analysis[J]. Chinese Science Bulletin, 2001, (46):1321 - 1332 (或见:魏权龄. 数据包络分析(DEA) [J]. 科学通报, 2000, 45 (17), 1793 - 1808.

[4] 魏权龄. 数据包络分析[M], 科学出版社, 2004

[5] 魏权龄,吴海东,岳明. 综合模型 DEA 中增减决策单元与 DEA 有效性[J]. 中国管理科学, 1993, 1 (1): 26 - 35.

[6] 魏权龄, 肖志杰. 数据包络与边际分析 —微观经济中的非参数分析[J]. 中国管理科学,1993, 1(2): 1 - 6.
[7] 谢朝华,段军山. 基于 DEA 方法的我国商业银行 X —效率研究[J]. 中国管理科学, 2005, 13(4):120 - 128.
[8] 王新宇, 吴瑞明. 基于偏好 DEA 模型的中国纺织业效率评价[J]. 中国管理科学, 2005, 13(2):142 - 148.
[9] 匡海波. 基于超效率 CCR-DEA 的中国港口上市公司成本效率评价研究[J]. 中国管理科学, 2007, 15(3): 142 - 148.
[10] Wei Q. L. and Yan H.. A method of transferring cones of intersection-form to cones of sum-form and its applications in DEA models [J]. International Journal of System Science, 2000, 31(5), 629 - 638.
[11] Wei Q. L. and Yan H.. A method of transferring polyhedron between the intersection − form and the sum-form [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2001, 41: 1327 - 1342.
[12] Wei Q. L., H. Yan and G. Hao. Characteristics and structure of weak efficient surfaces of production possibility sets [J]. Journal of Mathematics Analysis and Application, 2007, 327: 1055 - 1074.
[13] R. D. Banker, A. Charnes and W. W. Cooper. Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis [J]. Management Science, 1984, 30(9): 1078 - 1092.
[14] G. Yu, Q.L. Wei and P. Brockett. A Generalized Data Envelopment Analysis Model [J]. Annals of Operations Research, 1996, 66: 47 - 89.
[15] Wei Q. L. and G. Yu. Analyzing the Properties of K-Cone Generalized Data Envelopment Analysis Model [J]. Journal of Econometrics, 1997, 80: 63 - 84.
[16] Wei Q. L., G. Yu and J. S. Lu. A necessary and sufficient conditions for return to scale properties in generalized Data Envelopment Analysis Models [J]. Chinese Science, 2002, 45(5): 503 - 517.
[17] Wei Q. L. and H. Yan. Congestion and returns to scale in Data Envelopment Analysis [J]. European Journal of Operational Research, 2004, 153: 6411 - 660.
[18] Wei Q. L. and H. Yan. Weak congestion in output additive Data Envelopment Analysis [J]. Socio-Economic Planning Sciences, to appear (2007).
[19] 魏权龄. 评价相对有效性的 DEA 方法 ——运筹学的新领域 [M]. 中国人民大学出版社, 1988.
[20] 魏权龄, 阎洪. 广义最优化理论和模型[M]. 科学出版社, 2003

The Non-parametric Forecast Method for Returns to Scale of DEA

WEI Quan-ling ZHANG Qian-wei

(School of Economics, Renmin University of China, Beijing 100872, China)

Abstract: With the application of the production possibility sets of intersection-form, this article presents the multivariate production function which is determined by the non-parametric method for the production department with multi-input factors. Furthermore, the necessary and sufficient conditions for distinguishing the future state of the returns to scale being increasing, constant, decreasing, saturated and congestion when the input scale being expanded are discussed in this paper. The results can be applied into scientific analysis that whether each decision making unit needs to expand the scale and how to expand it.

Key words: production possibility sets of intersection-form; non-parametric production function; returns to scale