

冯德山,陈承申,王洪华. 基于混合边界条件的有限单元法 GPR 正演模拟. 地球物理学报, 2012, 55(11):3774-3785, doi:10.6038/j.issn.0001-5733.2012.11.024.

Feng D S, Chen C S, Wang H H. Finite element method GPR forward simulation based on mixed boundary condition. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2012, 55(11):3774-3785, doi:10.6038/j.issn.0001-5733.2012.11.024.

基于混合边界条件的有限单元法 GPR 正演模拟

冯德山^{1,2,3}, 陈承申^{1,2,3}, 王洪华^{1,2,3}

1 中南大学 地球科学与信息物理学院, 长沙 410083

2 有色金属成矿预测教育部重点实验室, 长沙 410083

3 有色资源与地质灾害探查湖南省重点实验室, 长沙 410083

摘 要 从 Maxwell 方程组出发, 推导了探地雷达(GPR)有限元波动方程. 阐述了透射边界条件和 Sarma 边界条件的原理, 推导了这两种边界条件的理论公式; 通过在衰减层内加入过渡带优化了 Sarma 边界条件的加载方法, 压制了介质区和衰减层交界面处的人为反射. 考虑到透射边界条件与 Sarma 边界条件不同的理论机制, 提出了一种结合透射边界条件和 Sarma 边界条件的混合边界条件, 它利用 Sarma 边界条件对到达边界区域的 GPR 波能量衰减功能和透射边界对 GPR 波能量的透射功能, 使 GPR 波经过 Sarma 边界条件的衰减吸收后, 再通过透射边界条件将剩余能量透射出去, 集成了二者的优势. 并以二维均匀模型中的中心脉冲激励源方式为例, 通过 Matlab 程序实现, 以 GPR 的全波场快照的直观方式, 对比了有、无边界条件及不同边界条件对人工截断边界的处理效果, 说明了该混合边界条件对到达截断边界处的 GPR 波的处理优于单一边界条件. 最后, 以基于混合边界条件的有限单元法对两个典型的 GPR 地电模型进行了正演模拟, 指导了 GPR 数据处理与工程实践.

关键词 探地雷达, 有限单元法, 混合边界条件, Sarma 边界条件, 正演模拟

doi:10.6038/j.issn.0001-5733.2012.11.024

中图分类号 P631

收稿日期 2011-12-14, 2012-10-23 收修定稿

Finite element method GPR forward simulation based on mixed boundary condition

FENG De-Shan^{1,2,3}, CHEN Cheng-Shen^{1,2,3}, WANG Hong-Hua^{1,2,3}

1 School of Geosciences and Info-Physics, Central South University, Changsha 410083, China

2 Key Laboratory of Metallogenic Prediction of Nonferrous Metals, Ministry of Education, Changsha 410083, China

3 Non-ferrous Resources and Geologic Disasters Prospecting Emphases Laboratory of Hunan, Changsha 410083, China

Abstract Based on Maxwell's equations, this paper deduces the finite element wave equation of Ground Penetrating Radar (GPR). It also describes the principle of the transmitting boundary condition and the Sarma boundary condition, deduces the theoretical formula of these two boundary conditions. By adding a transitional layer into the damping region, the adding method of the Sarma boundary condition is optimized, suppressing the artificial reflection at the interface between the medium zone and the damping region. Considering the different theoretical mechanisms of the transmitting boundary condition and the Sarma boundary condition, it proposes a mixed boundary condition combining the transmitting boundary condition and the Sarma boundary condition, which enables the remained energy of GPR wave to be transmitted through the transmitting boundary condition after it is attenuated and absorbed by Sarma boundary condition, integrating the advantages of the two conditions. In addition, it takes the

center pulse excitation source in two-dimensional homogeneous model as an example, compares the processing effects based on the cases with or without boundary conditions, or with different boundary conditions, in a visualized way of snapshots for the full GPR wave field, through the realization of Matlab procedure. The result indicates that the effect of using the mixed boundary condition is superior than using a single boundary condition. In the end, a numerical simulation for two typical GPR earth-electricity models is carried out with the finite element method based on the mixed boundary condition, providing the guidance for GPR data processing and engineering practice.

Keywords Ground penetrating radar, Finite element method, Mixed boundary condition, Sarma boundary condition, Forward simulation

1 引言

探地雷达(Ground penetrating radar, GPR)正演模拟一直是该领域理论研究的热点^[1-2],通过对典型地质模型正演结果的分析,可以加深对 GPR 反射剖面的理解与认识^[3-4],对 GPR 资料解释具有指导作用.在 GPR 正演模拟中,时域有限差分法^[5-7](FDTD)因简单灵活而被广泛采用,但它不适合复杂的物性分界面.有限单元法(Finite Element Method, FEM)不需要计算内部边界条件,适用于物性复杂问题、求解过程规范化,具有广泛的适应性.

在地震波 FEM 模拟^[8]得到快速发展的同时,一些学者将其引入到 GPR 正演模拟中:沈旻^[9]进行了 GPR 简单模型正演;底青云和王妙月^[10-11]推导了含衰减项的探地雷达波有限元方程,实现了复杂形体的 GPR 波的 FEM 正演模拟和偏移处理;Fanning 和 Boothby^[12]将 GPR 有限元建模技术应用到拱桥检测中;谢辉等^[13]基于二十节点等参单元的 FEM 对 Pulse 型 GPR 进行了模拟;Arias 等^[14]将有限元技术应用到 GPR 考古成像中;Lu 等^[15]利用离散时域 Galerkin 进行色散介质中的 GPR 正演.

GPR 正演模拟是用有限空间模拟半无限大空间,在模型边界上必然产生边界反射.因此,需要在截断边界处使用一种特殊计算方法,在保证边界处场的计算精度的同时大大消除人工截断边界的反射波.如 Cerjan 边界条件^[16],它是在边界区引入一个衰减层,让波的能量在这个衰减层里呈现指数衰减,但是这种吸收边界条件的选取比较困难,衰减层的厚度、衰减系数的大小都要凭经验去估计. Sarma^[17]在边界区域建立一个一定厚度的衰减层,根据材料性质估算恒定比例系数,使衰减层和介质区存在明显的物性差异,从而产生反射波;王月英等^[18]提出

了一种改进的 Sarma 边界条件,通过在衰减层内增加一定厚度的过渡带,过渡带内的比例系数呈现线性变化,这就使介质区和衰减层之间的物性差异渐变,大大减弱了交界面处的反射,但也存在对阻尼比的选取不敏感、过渡带和吸收层的交界面的角点处产生较强的绕射波的缺点,仍需寻求新的解决办法来取得更好的吸收效果.

本文通过对透射边界条件和改进 Sarma 边界条件的研究,提出一种混合边界条件.通过在研究区域外加载一定厚度的吸收层,以改进的 Sarma 边界条件对到达边界处的 GPR 波能量进行吸收衰减,然后在最外边加载透射边界条件,将衰减过的探地雷达波透射出去,这种混合边界条件集成了二者的优势,对人工截断边界的反射波取得更好的吸收效果.

2 GPR 波动方程推导

Maxwell 方程组描述了电磁场的运动学和动力学规律^[19],由电磁波理论,高频电磁波在媒质中的传播规律也应服从 Maxwell 方程组,其方程组的微分形式可以表示为^[20-21]

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t, \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1d)$$

式中, \mathbf{E} 为电场强度(V/m), \mathbf{H} 为磁场强度(A/m), \mathbf{B} 为磁感应强度(T), \mathbf{D} 为电位移(C/m²), \mathbf{J} 为电流密度(A/m²), ρ 为电荷密度(C/m³).

本构方程:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2)$$

式中 ϵ 为介电常数(F/m), μ 为磁导率(H/m), σ 为电导率(S/m).

把方程式(2)代入方程式(1a),并求旋度,得

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \\ &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

考虑到式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}), \quad (4)$$

由于 ϵ, μ, σ 为坐标的函数, 它们的时间导数可以忽略, 用电场 \mathbf{E} 取代(4)式中的 \mathbf{A} , 则(4)式中右边第二项为 0, 整理得

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (5)$$

假设将雷达波激励源如电场源 \mathbf{S}_E 或磁场源 \mathbf{S}_H , 代入到(5)式中, 有

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu \epsilon} \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{S}_E, \quad (6)$$

同理对(1b)式中第二式两边求旋度, 可得下式:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu \epsilon} \nabla^2 \mathbf{H} + \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{S}_H. \quad (7)$$

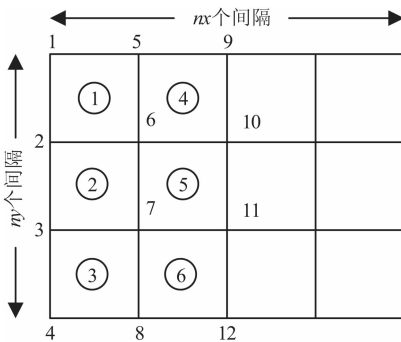
(6)、(7)两式表明, 磁场 \mathbf{H} 和电场 \mathbf{E} 及其分量满足相同的微分方程.

3 GPR 波动方程有限元求解

求解 GPR 波动方程其实质是结合雷达波所要满足的初、边值条件求解偏微分方程. 边界条件分为两种类型^[22]: Dirichlet 边界条件与 Neumann 边界条件. 变分法推导结果自动满足 Dirichlet 边界条件, 即未知函数在边界上有已知值; 伽辽金(Galerkin)法推导结果自动满足 Neumann 边界条件, 即未知函数的导数在边界上有已知值. 下面采用伽辽金法推导含衰减项的 GPR 有限元方程.

第 1 步 网格剖分

将求解的二维区域剖分成矩形单元, 如图 1 所示.



1, 2, ... 代表节点 ① ② ... 代表单元

图 1 网格剖分及节点编号示意图

Fig. 1 Sketch map of mesh division and node number

第 2 步 线性插值

设 (x, y) 是子单元的坐标, (x_0, y_0) 是子单元中点的坐标, a, b 是子单元的两个边长, (ξ, η) 为母单元的坐标, 两个单元间的坐标变换关系为

$$x = x_0 + (a/2) \cdot \xi, \quad y = y_0 + (b/2) \cdot \eta, \quad (8)$$

其中微分关系为

$$\begin{aligned} dx &= (a/2) \cdot d\xi, \\ dy &= (b/2) \cdot d\eta, \\ dxdy &= (ab/4) \cdot d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (9)$$

单元形函数为双线性插值形函数, 可写为

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta), \quad (10)$$

其中 ξ_i, η_i 是点 i ($i = 1, 2, 3, 4$) 的坐标, 形函数的分量可写为

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4, \quad N_2 = (1 + \xi)(1 - \eta)/4, \\ N_3 &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4, \quad N_4 = (1 - \xi)(1 + \eta)/4. \end{aligned} \quad (11)$$

第 3 步 单元积分

根据伽辽金法, 将(6)式两边同时乘以 $\delta \mathbf{E}$, 并求积分, 有

$$\begin{aligned} \int_e \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \delta \mathbf{E} d\Omega + \int_e \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \delta \mathbf{E} d\Omega - \int_e \frac{1}{\mu \epsilon} \nabla^2 \mathbf{E} \delta \mathbf{E} d\Omega \\ = \int_e \mathbf{S}_E \delta \mathbf{E} d\Omega, \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{E} = \mathbf{N}^T \mathbf{E}_e, \mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4)^T, \mathbf{E}_e^T = (E_1, E_2, E_3, E_4), N_1, N_2, N_3, N_4$ 是单元上各节点的形函数, E_1, E_2, E_3, E_4 是各节点的电场值, Ω 为单元面积.

则式(12)左边第一项为

$$\begin{aligned} \int_e \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \delta \mathbf{E} d\Omega &= \int_e \mathbf{N}^T \frac{\partial^2 \mathbf{E}_e}{\partial t^2} \mathbf{N}^T \delta \mathbf{E}_e dxdy \\ &= \delta \mathbf{E}_e^T \int_e \mathbf{N}^T \mathbf{N} dxdy \frac{\partial^2 \mathbf{E}_e}{\partial t^2} = \delta \mathbf{E}_e^T \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{E}}_e, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 \mathbf{M}_e 为单元质量矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e &= \int_e \mathbf{N}^T \mathbf{N} dxdy = \int_e \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\xi d\eta \cdot \frac{ab}{4} \\ &= \frac{ab}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (14)$$

式(12)左边第二项为

$$\begin{aligned} \int_e \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \delta \mathbf{E} d\Omega &= \frac{\sigma}{\epsilon} \int_e \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial t} \mathbf{N}^T \delta \mathbf{E}_e dxdy \\ &= \frac{\sigma}{\epsilon} \delta \mathbf{E}_e^T \int_e \mathbf{N}^T \mathbf{N} dxdy \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial t} = \delta \mathbf{E}_e^T \mathbf{K}'_e \dot{\mathbf{E}}_e, \end{aligned} \quad (15)$$

其中 \mathbf{K}'_e 为单元阻尼矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}'_e &= \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_e \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx dy = \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_e \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\xi d\eta \cdot \frac{ab}{4} \\ &= \frac{ab}{36} \frac{\sigma}{\varepsilon} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (16)$$

式(12)左边第三项为

$$\begin{aligned} \int_e \frac{1}{\mu\varepsilon} \nabla^2 \mathbf{E} \delta \mathbf{E} d\Omega &= \int_e \frac{1}{\mu\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial y} \right)^2 \right] \delta \mathbf{E} dx dy \\ &= \delta \mathbf{E}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{E}_e, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\mathbf{K}_e = (k_{ij}) = (k_{ji})$.

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \frac{1}{\mu\varepsilon} \int_e \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{\mu\varepsilon} \int_e \left(\left(\frac{dN_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right) \left(\frac{dN_j}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{dN_i}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} \right) \left(\frac{dN_j}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} \right) \right) \frac{ab}{4} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (18)$$

将(11)式求得 ξ 或者 η 的微商,代入到(18)式积分即可得到单元刚度矩阵 k_{ij} 为

$$\mathbf{K}_e = (k_{ij}) =$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} = 2\alpha + 2\beta & k_{12} = k_{21} & k_{13} = k_{31} & k_{14} = k_{41} \\ k_{21} = \alpha - 2\beta & k_{22} = k_{11} & k_{23} = k_{32} & k_{24} = k_{42} \\ k_{31} = -\alpha - \beta & k_{32} = k_{41} & k_{33} = k_{11} & k_{34} = k_{43} \\ k_{41} = -2\alpha + \beta & k_{42} = k_{31} & k_{43} = k_{21} & k_{44} = k_{11} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

$$\text{式中, } \alpha = \frac{1}{6\mu\varepsilon} \frac{b}{a}, \beta = \frac{1}{6\mu\varepsilon} \frac{a}{b}.$$

式(12)右边项为

$$\mathbf{S}_E = \int_e \mathbf{S}_e \mathbf{N} \delta \mathbf{E} dx dy = \delta \mathbf{E}_e^T \mathbf{S}_e. \quad (20)$$

第 4 步 总体合成

根据式(13)、(15)、(17)、(20)得到单元积分:

$$\delta \mathbf{E}_e^T \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{E}}_e + \frac{\sigma}{\varepsilon} \delta \mathbf{E}_e^T \mathbf{K}'_e \dot{\mathbf{E}}_e + \delta \mathbf{E}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{E}_e - \delta \mathbf{E}_e^T \mathbf{S}_e = 0. \quad (21)$$

将单元列向量 $\mathbf{E}_e, \dot{\mathbf{E}}_e$ 和 $\ddot{\mathbf{E}}_e$ 扩展成全体节点的列向量 $\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}$ 和 $\ddot{\mathbf{E}}, \mathbf{E}^T = (E_1, E_2, E_3, \dots, E_{ND}), \dot{\mathbf{E}}^T = (\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dot{E}_3, \dots, \dot{E}_{ND}), \ddot{\mathbf{E}}^T = (\ddot{E}_1, \ddot{E}_2, \ddot{E}_3, \dots, \ddot{E}_{ND})$, 其中 ND 是节点总数. 将 4×4 的系数矩阵 $\mathbf{M}_e, \mathbf{K}'_e$ 和 \mathbf{K}_e 扩展成 $ND \times ND$ 的矩阵 \mathbf{M}, \mathbf{K}' 和 \mathbf{K} , 将列向量 \mathbf{S}_e 扩展成 ND 维列向量 \mathbf{S} , 即

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\Omega} \delta \mathbf{E}_e^T \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{E}}_e + \sum_{\Omega} \delta \mathbf{E}_e^T \mathbf{K}'_e \dot{\mathbf{E}}_e + \sum_{\Omega} \delta \mathbf{E}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{E}_e \\ &\quad - \sum_{\Omega} \delta \mathbf{E}_e^T \mathbf{S}_e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \delta \mathbf{E}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{E}} + \delta \mathbf{E}^T \mathbf{K}' \dot{\mathbf{E}} + \delta \mathbf{E}^T \mathbf{K} \mathbf{E} - \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S}_E \\ &= \delta \mathbf{E}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{E}} + \mathbf{K}' \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{K} \mathbf{E} - \mathbf{S}_E), \end{aligned} \quad (22)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{\Omega} \mathbf{M}_e, \mathbf{K}' = \sum_{\Omega} \mathbf{K}'_e, \mathbf{K} = \sum_{\Omega} \mathbf{K}_e, \mathbf{S}_E = \sum_{\Omega} \mathbf{S}_e. \\ \delta \mathbf{E}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{E}} + \mathbf{K}' \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{K} \mathbf{E} - \mathbf{S}_E) &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

由于 $\delta \mathbf{E}^T \neq 0$, 所以必有 $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{E}} + \mathbf{K}' \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{K} \mathbf{E} = \mathbf{S}_E$. 于是可以得到时空域 GPR 波的二维有限元方程, 这是含有 ND 个元的 ND 个方程联合的常微分方程组, 可以写成如下形式:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{E}} + \mathbf{K}' \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{K} \mathbf{E} = \mathbf{S}_E, \quad (24)$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{H}} + \mathbf{K}' \dot{\mathbf{H}} + \mathbf{K} \mathbf{H} = \mathbf{S}_H, \quad (25)$$

式中, \mathbf{M} 为质量矩阵, \mathbf{K}' 为阻尼矩阵, \mathbf{K} 为刚度矩阵, $\dot{\mathbf{E}}$ 和 $\dot{\mathbf{H}}$ 为时间的一阶导数, $\ddot{\mathbf{E}}$ 和 $\ddot{\mathbf{H}}$ 为时间的二阶导数.

第 5 步 解 GPR 有限元常微分方程

解常微分方程组(24)或(25)前,要代入边界条件,边界条件的加载方法将在下节讨论. 先采用中心差分法解方程(24). 对初始条件离散化得到 $\mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_0, \dot{\mathbf{E}}(0) = \dot{\mathbf{E}}_0$, 把时间域 $[0, T]$ 分为几个相等步长 $\Delta t = T/n$, 把时刻 t 的微分方程记为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{E}}_t + \mathbf{K}' \dot{\mathbf{E}}_t + \mathbf{K} \mathbf{E}_t = \mathbf{S}_{Et}. \quad (26)$$

用差商代替微分:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_t &= (\mathbf{E}_{t+\Delta t} - \mathbf{E}_{t-\Delta t}) / (2\Delta t) \\ \ddot{\mathbf{E}}_t &= (\mathbf{E}_{t+\Delta t} - 2\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_{t-\Delta t}) / (\Delta t)^2. \end{aligned} \quad (27)$$

中心差分法是一种条件稳定的计算方法, 当时间步长 Δt 取的过大时, 计算结果就会出现数值色散, 为此本文采用 $\Delta t \leq (\Delta X_{\min} / V_{\max})$, 式中时间步长 Δt 与最小单元边长 ΔX_{\min} 成正比, 与最大媒质速度 V_{\max} 成反比. 差分网格空间步长满足稳定性条件 $\Delta x < (\lambda_{\min} / 10)$, 其中 λ_{\min} 为最小波长长度, Δx 为单元的最小尺寸. 将式(27)代入到式(26)中得到

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\mathbf{M}}{(\Delta t)^2} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{K}' \right) \mathbf{E}_{t+\Delta t} \\ &= \mathbf{S}_{Et} + \left(\frac{2\mathbf{M}}{(\Delta t)^2} - \mathbf{K} \right) \mathbf{E}_t + \left(\frac{1}{2\Delta t} \mathbf{K}' - \frac{\mathbf{M}}{(\Delta t)^2} \right) \mathbf{E}_{t-\Delta t}, \end{aligned} \quad (28)$$

此式即为 GPR 有限元正演递推公式. 由于零时刻的 $\mathbf{E}_0, \dot{\mathbf{E}}_0$ 和 $\ddot{\mathbf{E}}_0$ 和 $-\Delta t$ 时刻的 $\mathbf{E}_{-\Delta t}, \dot{\mathbf{E}}_{-\Delta t}$ 和 $\ddot{\mathbf{E}}_{-\Delta t}$ 均为 0, 所以根据(28)式可计算出 Δt 时刻的 $\mathbf{E}_{\Delta t}$, 然后依次递推可得到所有时刻的 \mathbf{E} 值. 令

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{M}}{(\Delta t)^2} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{K}',$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}_{Et} + \left(\frac{2\mathbf{M}}{(\Delta t)^2} - \mathbf{K} \right) \mathbf{E}_t + \left(\frac{1}{2\Delta t} \mathbf{K}' - \frac{\mathbf{M}}{(\Delta t)^2} \right) \mathbf{E}_{t-\Delta t}.$$

则(28)式可简化为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$ 形式的线性方程组. 对于 GPR 电磁波, 当媒质为良导体或者近似于良导体时, σ 较大, $\sigma \ll \epsilon\omega$ 不成立, 衰减项 $(\sigma/\epsilon)(\partial\mathbf{E}/\partial t)$ 的作用不能忽略, 这时, GPR 波在这种媒质中传播就会发生频散和被媒质吸收的情况; 当 GPR 频率 ω 很高, 即 $\sigma \ll \epsilon\omega$ 时, 衰减项 $(\sigma/\epsilon)(\partial\mathbf{E}/\partial t)$ 的作用几乎可以忽略, 此时式(26)中的阻尼矩阵 \mathbf{K}' 可以忽略, (26)式变为纯波动方程.

求解不含衰减项的 GPR 波动方程时, 由于系数矩阵 \mathbf{A} 往往是大型的病态稀疏矩阵, 其条件数很大, 如果采取对其直接求逆, 计算量巨大, 其求解结果不可信, 只有当系数矩阵 \mathbf{A} 是对角阵时, 其逆矩阵是对角元素求倒数, 这种方法才适用, 为此采取集中质量矩阵方法来处理 \mathbf{M} 矩阵, 即将每一行(或列)的元素都加到对角线元素上去, 则式(14)可转化为单元集中质量矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e &= \frac{ab}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{ab}{36} \begin{bmatrix} 9 & & & \\ & 9 & & \\ & & 9 & \\ & & & 9 \end{bmatrix} \\ &= \frac{ab}{4} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (29)$$

由于总体集中质量矩阵也有对角阵, 所以不含衰减项的 GPR 有限元方程的差分迭代公式可写为

$$\mathbf{E}_{t+\Delta t} = (\Delta t)^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}_{Et} + (2 - (\Delta t)^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) \mathbf{E}_t - \mathbf{E}_{t-\Delta t}. \quad (30)$$

在求解含有衰减项的波动方程(28)时, 系数矩阵 \mathbf{A} 是质量矩阵 \mathbf{M} 和阻尼矩阵 \mathbf{K}' 的线性组合, 同样可以采用单元集中质量矩阵求解. 但本文中选用不完全 LU 分解预处理的 BICGSTAB(Biconjugate Gradient Stabilized)线性方程组求解算法^[23-24], 该算法是一种高效迭代法, 特别适用于求解条件数很大的病态线性方程组.

4 混合边界条件理论

目前应用于电磁场正演模拟的边界条件主要集中于 FDTD 相关算法, 如辐射边界条件^[25-26]、基于单行波方程的吸收边界条件^[27-28]、超吸收边界条件^[29]、完全匹配层(PML)^[30-31]吸收边界条件等. 而 GPR 有限元法正演模拟文献较少, 采用的吸收边界条件多借鉴与地震波有限元正演模拟的吸收边界条

件. 下面主要介绍透射边界条件与 Sarma 吸收边界条件, 在此基础上提出了混合边界条件.

4.1 透射边界条件

透射边界条件是通过直接模拟各种单向波动的共同运动学特征来建立的一种边界条件, 原理简单易懂, 算法容易实现. 首先给出穿过人工边界上一点并沿边界外法线方向传播的单向波动的一般表达式, 并假定所有单向波动以同一人工波速沿法线方向从边界透射出去, 由此可得透射边界条件公式^[32]:

$$\mathbf{L}\mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{S}_E, \quad (31)$$

式中 \mathbf{L} 为微分算子. 在每个单元中有

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^4 N_i \mathbf{E}_i, \quad (32)$$

这里 \mathbf{E}_i 为每个单元上第 i 个节点的电场值. 残余量 \mathbf{R} 为

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{E} - \mathbf{S}_E, \quad (33)$$

利用伽辽金余量法, 二维有限元方程可写为

$$\sum_e \int_{A_e} \mathbf{N}^T \mathbf{r} dxdy = 0, \quad (34)$$

其中 A_e 为单元面积, \mathbf{r} 是残余量 \mathbf{R} 的向量表示, 由式(32)代入式(33)得到.

由于内边界的积分相互抵消, 所以只需求解图 2 所示的区域外边界积分. 在均匀各向同性介质中,

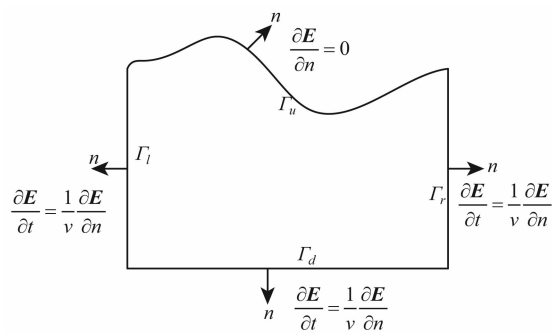


图 2 区域外边界条件

Fig. 2 Boundary condition outside the area

根据 Claerbout^[33]推导的旁轴近似, 其下行波方程为

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{v} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y}, \quad (35)$$

左行波方程为

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}, \quad (36)$$

右行波方程为

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{v} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}, \quad (37)$$

由法向导数的定义知

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x}n_x + \frac{\partial}{\partial y}n_y, \quad (38)$$

其中, n_x 和 n_y 为边界外法线的方向余弦。

将式(31)、(32)、(33)代入式(34)中,并利用高斯定理可得

$$\sum_e \int_{A_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{E}^T}{\partial x} \mathbf{N} \right) dx dy = \int_{\Gamma_l} \frac{\partial \mathbf{E}^T}{\partial n} \mathbf{N} d\Gamma + \int_{\Gamma_r} \frac{\partial \mathbf{E}^T}{\partial n} \mathbf{N} d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \frac{\partial \mathbf{E}^T}{\partial n} \mathbf{N} d\Gamma, \quad (39)$$

其中 Γ_l 、 Γ_r 、 Γ_d 分别表示左、右及底边界,上边界为自由边界条件。

将式(35)、(36)、(37) 给出的边界条件代入到式(39),可以得到:

$$\int_{\Gamma_l} \frac{\partial \mathbf{E}^T}{\partial n} \mathbf{N} d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \frac{\partial \mathbf{E}^T}{\partial n} \mathbf{N} d\Gamma + \int_{\Gamma_r} \frac{\partial \mathbf{E}^T}{\partial n} \mathbf{N} d\Gamma = v \dot{\mathbf{E}} \times \left(\int_{\Gamma_l} N_1 N_2 (n_x + n_y) d\Gamma + \int_{\Gamma_d} N_2 N_3 (n_x + n_y) d\Gamma + \int_{\Gamma_r} N_3 N_4 (n_x + n_y) d\Gamma \right). \quad (40)$$

其中 $\dot{\mathbf{E}}$ 为电场对时间的一阶导数, v 为电磁波在介质中的传播速度。

在加载透射边界条件时,还需求解外法线的方向余弦,其求解示意如图 3 所示. θ_x 为 GPR 发射天线激励源和边界线单元 x 方向的夹角, θ_y 为 y 方向夹角,无论这两个角是正还是负,其余弦值 n_x 和 n_y 均为正值。

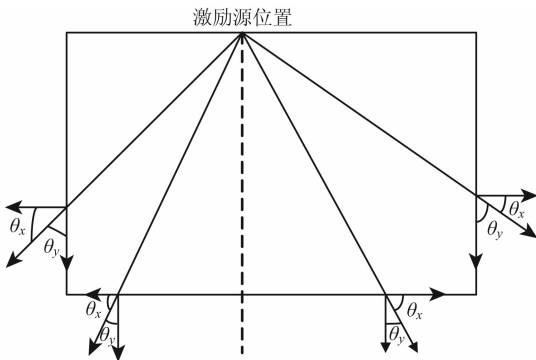


图 3 外法线的方向余弦角示意图

Fig. 3 Sketch map of direction Cosine angle of external normal

在求解左边界的边界条件时,如图 4 所示,令 $N_1 = (1 - \xi)/2$, $N_2 = (1 + \xi)/2$, $d\Gamma = l \cdot d\xi/2$, 这里 l 为边界上的单元宽度,例如 AB 、 CD 边 $l = b$, BC 边 $l = a$. 先分析边界单元在 AB 边的情况:

$$\int_{\Gamma_l} \frac{\partial \mathbf{E}^T}{\partial n} \mathbf{N} d\Gamma = v \dot{\mathbf{E}} \times \left(\int_{\Gamma_l} \mathbf{N}^T \mathbf{N} (n_x + n_y) d\Gamma \right) = v \dot{\mathbf{E}} (n_x + n_y) \times \int_{\Gamma_l} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma$$

$$= v \dot{\mathbf{E}} (n_x + n_y) \times \frac{b}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} (N_1 \quad N_2) d\xi = \frac{b}{2} v \dot{\mathbf{E}} (n_x + n_y) \int_{-1/2}^{1/2} \begin{pmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 \end{pmatrix} d\xi = \frac{b}{6} v (n_x + n_y) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{E}}. \quad (41)$$

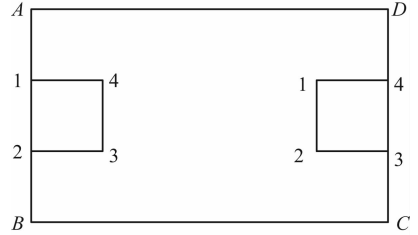


图 4 边界上的单元

Fig. 4 Elements on the boundary

将边界的单元系数矩阵定义为 \mathbf{F}_e , 则左边界的边界单元系数矩阵扩展为 \mathbf{F}_{le} :

$$\mathbf{F}_{le} = \frac{b}{6} v (n_x + n_y) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

同理,可以求得底边界单元系数矩阵 \mathbf{F}_{de} 和右边界单元系数矩阵 \mathbf{F}_{re} :

$$\mathbf{F}_{de} = \frac{a}{6} v (n_x + n_y) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$$\mathbf{F}_{re} = \frac{b}{6} v (n_x + n_y) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

故边界的阻尼矩阵 \mathbf{F} 为

$$\mathbf{F} = \sum_{\Omega} \mathbf{F}_e = \sum_l \mathbf{F}_{le} + \sum_d \mathbf{F}_{de} + \sum_r \mathbf{F}_{re}, \quad (44)$$

将边界阻尼加入到 GPR 有限元方程中去,得到如下式子:

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{E}} + (\mathbf{K}' + \mathbf{F}) \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{K} \mathbf{E} = \mathbf{S}_E. \quad (45)$$

将(45)式透射边界条件结合式(24)就可以进行 GPR 有限元正演模拟。

4.2 Sarma 吸收边界条件

Sarma 吸收边界条件是在求解空间外的区域增加一个由衰减性媒质组成的衰减层,如图 5a 所示. 对于衰减性媒质,阻尼力作用比较复杂,导致阻尼矩阵 \mathbf{C} 不容易确定. Rayleigh 在 1877 年给出了一种计算阻尼矩阵 \mathbf{C} 的经典方法,该方法^[34]是利用整体质量矩阵 \mathbf{M} 和整体刚度矩阵 \mathbf{K} 来计算阻尼矩阵 \mathbf{C} :

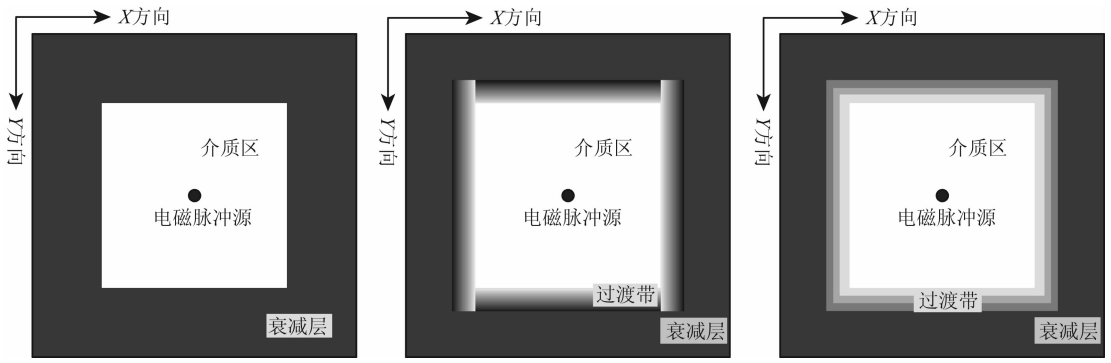


图5 Sarma 边界条件及其改进模型示意图

(a)Sarma 边界条件;(b)改进的 Sarma 边界条件;(c)优化过渡带角点的 Sarma 边界条件.

Fig. 5 Sketch map of Sarma boundary condition and improved model

(a)Sarma boundary condition;(b)Improved Sarma boundary condition;(c)Sarma boundary condition of optimized transitional layer.

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K], \quad (46)$$

其中,

$$a_0 = \frac{2\omega_i \omega_j (\xi_i \omega_j - \xi_j \omega_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2}, \quad a_1 = \frac{2(\xi_i \omega_j - \xi_j \omega_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2},$$

式中 ω_i 和 ω_j 分别为介质的第 i 和第 j 个固有的圆频率, ξ_i 和 ξ_j 为对应的阻尼比.

Caughey^[35] 提出了一种更为普遍的阻尼矩阵计算公式:

$$[C] = [M] \sum_{j=0}^{m-1} a_j ([M]^{-1} [K])^j, \quad (47)$$

可以看出(46)式是(47)式的二阶形式,即 $m = 2$, 体现了质量矩阵和刚度矩阵的线性组合,并且这种组合非常容易计算,其单元中的计算公式如下:

$$[C^e] = a_0^{(e)} [M^{(e)}] + a_1^{(e)} [K^{(e)}]. \quad (48)$$

对于二阶 Caughey 阻尼矩阵的两个系数 a_0 和 a_1 与阻尼比 ξ 存在着如下的关系:

$$\xi = \frac{a_0}{2\omega} + \frac{a_1 \omega}{2}, \quad (49)$$

其中 ω 为发射天线的中心频率,通常 $0.05 \leq \xi \leq 0.30$. 将二阶 Caughey 阻尼矩阵引入到 GPR 吸收边界的处理中,得到吸收边界区内的有限元方程为

$$M\ddot{E} + (K' + C)\dot{E} + KE = S_E. \quad (50)$$

在衰减层内的比例系数 a_0 和 a_1 可由式(49)得到,这种方法虽然可行,但是衰减层和介质区还是存在着明显的物性差异,这种差异必然会在交界面处产生人为的反射波.针对 Sarma 边界条件在交界面处产生的人为反射波,王月英等^[18] 提出了一种改进方法,如图 5b 所示:即在衰减层内添加一个过渡带,过渡带内比例系数 a_0^i 和 a_1^i 由零逐渐增大到 a_0 和 a_1 , 衰减层取一个半波长的厚度,过渡带大约占半个波长.但该改进的 Sarma 边界条件在过渡带的四个角点位置仍存在着差异明显的四个小边界,为此

本文采用一圈一圈的环形过渡带加载办法,消除了这种角点的人为差异,称之为优化过渡带角点的 Sarma 边界条件,如图 5c 所示.

$$a_0^i = \frac{i}{m} a_0, \quad a_1^i = \frac{i}{m} a_1. \quad (51)$$

其中,衰减层内总节点数为 n , 过渡带内的节点数为 m , $m < n$, a_0^i 和 a_1^i ($0 \leq i < m$) 为过渡带内节点 i 处的比例系数,比例系数从交界面向衰减层边缘方向呈线性增长关系,这种方法就减缓了交界面处的物性参数突变,从而减小交界面处产生的人为反射波能量,比例系数 a_0^i 和 a_1^i 增大到 a_0 和 a_1 就保持恒定,以确保 GPR 波在衰减层内能得到充分吸收.既能使交界面处的反射得到大大降低,又能让边界处的 GPR 波能量被充分吸收.

4.3 混合吸收边界条件

通过对透射边界条件和 Sarma 边界条件的深入分析,提出了一种结合两种边界条件的混合边界条件(如图 6 所示),其主要思想是利用 Sarma 边界条件对到达边界区域的电磁波能量衰减功能和透射边界对电磁波能量的透射功能,使 GPR 波经过 Sarma 边界条件的衰减吸收后再通过透射边界条件将剩余能量透射出去,集成了二者的优势.处理办法是在计算区域外面加一吸收层,用改进的 Sarma 边界条件使 GPR 波能量被吸收减弱,然后在最外边加载透射边界条件.通过改变公式(48)中给的阻尼比 ξ ,可以实现调节 Sarma 边界的吸收作用,从而和透射边界条件相互协作,达到最佳吸收效果.

5 不同边界条件的有限元模拟对比实例

运用 Matlab 编制的有限元 GPR 模拟程序对 $10.0 \text{ m} \times 5.0 \text{ m}$ 均匀模型进行了模拟,介质的介电

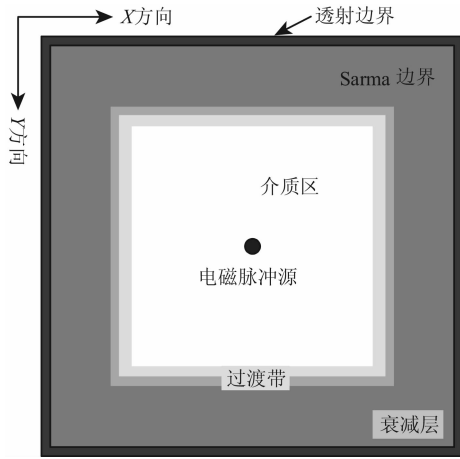


图 6 混合边界条件模型示意图

Fig. 6 Sketch map of mixed boundary condition

常数 $\epsilon=3.0$, 电导率 $\sigma=0.001 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. 网格单元大小为 0.1 m 的正方形, GPR 脉冲激励源的子波形式为 $f(t) = t^2 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$, 其中 ω_0 为发射天线中心频率为 100 MHz , 电磁波脉冲的衰减速度取决于系数 α , 此处取 $\alpha=0.93\omega_0$. 得到了半空间图 7 所示的不带边界条件的雷达正演 wiggle 图. 图中可见, A、B 为左右边界的反射波, C 为底边界的反射波, D、E 为左下角和右下角的两个角点的绕射波. 这些人截断边界的反射强度很大, 对观测区域影响严重, 说明了对截断边界的处理势在必行.

5.1 透射边界条件中心脉冲激励源模型仿真

为了更好地说明不同吸收边界条件对人工截断边界反射波的吸收效果, 建立图 8 所示 $9.0 \text{ m} \times 9.0 \text{ m}$ 大小的正方形均匀模型, 并把脉冲激励源置于模拟区域的正中心, 采样时间间隔为 0.5 ns , 其它参数与无边界条件情况下一致. 通过截取不同时刻的波场

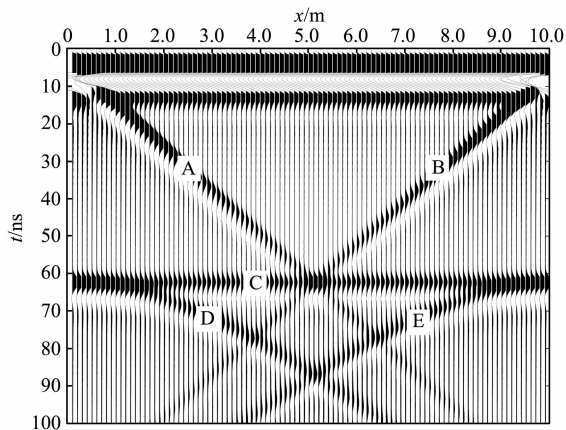


图 7 不带边界条件的均匀模型 wiggle 图

Fig. 7 Wiggle diagram for homogeneous model without boundary conditions

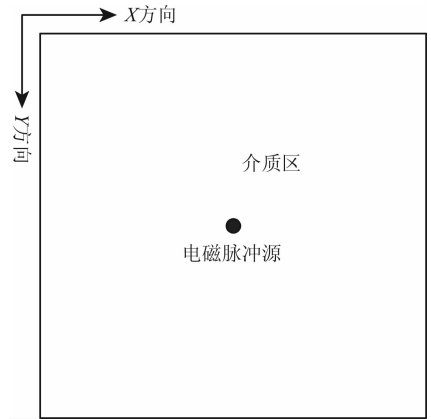


图 8 均匀模型示意图

Fig. 8 Sketch map of homogeneous model

快照图, 观测不同边界条件对人工截断边界的吸收效果. 图 9(a, b, c) 分别为不带边界条件的 20 、 30 、 35 ns 波场快照, 图中可见在 30 ns 时刻 GPR 波前开始传到区域边缘, 人为截断边界反射波开始形成, 从 35 ns 快照图可以看出, 人为截断边界反射回的 GPR 波能量很强, 严重影响了对目标区域的研究, 同样说明, 截断边界的处理是非常必要的.

图 10(a, b, c) 分别为模型边界处加载透射边界的 30 、 35 、 40 ns 波场快照. 图中可见, 在 30 ns 时, 波的能量刚刚传播到边界区域, 在 35 ns 时可以看出电磁波大部分的能量都从边界处透射出去, 只有少部分的能量反射回来, 对比图 9c 相同时刻的截断边界处的强反射波能量, 说明了透射边界条件取得了显著效果. 但是再分析图 10c 中 40 ns 的波场快照图仍然可以看到截断边界的反射回波, 说明透射边界条件仍有待改进.

5.2 改进的 Sarma 边界条件中心脉冲激励源模型仿真

仍以以上例模型和相应参数为例, 分别以 Sarma 边界条件、改进的 Sarma 边界条件和优化了过渡带的 Sarma 边界条件对截断边界进行了处理. 图 11a 为没有加载过渡带的 Sarma 边界条件的 30 ns 波场快照图, 由于没有加载过渡带, 在介质区和衰减层之间的界面产生了明显的反射和角点绕射; 图 11b 为改进 Sarma 边界条件的 30 ns 波场快照图, 由于加载了过渡带, 在介质区和边界吸收层之间的媒质特性是渐变的, 明显的减弱了介质之间的差异, 降低了介质区和边界吸收层之间界面的反射波能量, 较好地处理了介质区和衰减层之间物性差异引起的反射波, 但在过渡带的四个角点位置存在着差异明显的四个小边界. 为了消除这种因过渡带人为加载方式

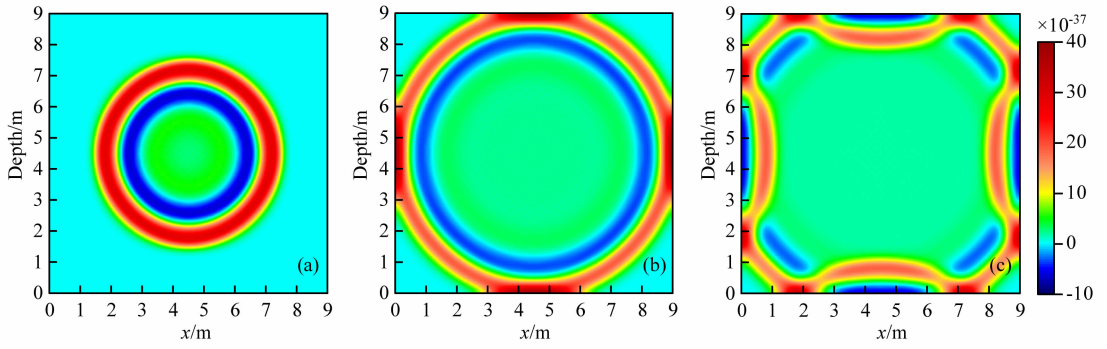


图9 带边界条件的波场快照图

(a) 20 ns 快照; (b) 30 ns 快照; (c) 35 ns 快照.

Fig. 9 Wave field snapshots without boundary conditions

(a) 20 ns snapshots; (b) 30 ns snapshots; (c) 35 ns snapshots.

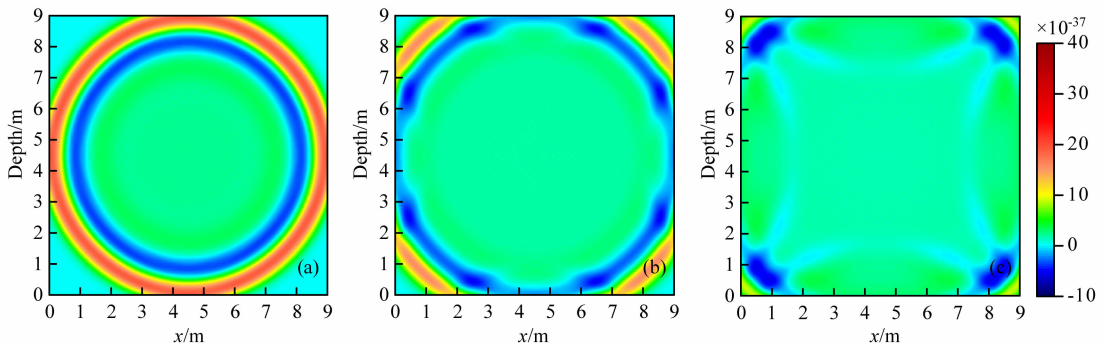


图10 透射边界条件的波场快照图

(a) 30 ns 快照; (b) 35 ns 快照; (c) 40 ns 快照.

Fig. 10 Wave field snapshots with the transmitting boundary condition

(a) 30 ns snapshot; (b) 35 ns snapshot; (c) 40 ns snapshot.

引起的反射,本文采用一圈一圈的环形过渡带加载办法,图 11c 为优化过渡带 Sarma 边界条件的 30 ns 波场快照图.它是在改进的 Sarma 边界条件基础上,对过渡带的加载方法进行了优化,目的是减少人为的角点引起的异常,虽然效果不是很明显,但是从侧面反映出改进的 Sarma 边界条件的过渡带的角点异常主要是由角点引起,过渡带的加载方法并非主要影响因素,重点工作应该放在研究过渡带的角点异常消除上.

5.3 混合吸收边界条件中心中心脉冲激励源模型仿真

如图 12a 为加载了透射边界条件的 35 ns 快照图,图 12b 为加载了优化过渡带的 Sarma 边界条件的 35 ns 快照图,图 12c 为加载混合边界条件的 35 ns 快照图.图中可见,图 12b 优化过渡带的 Sarma 边界条件由于过渡带的四个角点区的绕射波能量比较强,其对 GPR 波的吸收效果并不是很理想,而图 12c 中的混合边界条件由于集成了 Sarma 边界条件

和透射边界条件的优点,先衰减了到达边界区域的 GPR 波能量,然后再将其透射出去,观察相同时刻快照图,可以看出,与图 9c 无边界条件的波场快照图对比,各种边界条件对截断边界处的反射波都取得了良好效果,但混合边界条件明显优于单纯的透射边界条件或 Sarma 边界条件.

6 探地雷达正演模拟实例

6.1 起伏界面模型

如图 13 所示,模型为一个 $10.0 \text{ m} \times 5.0 \text{ m}$ 的矩形区域,分为上下两层介质,中间是起伏界面,上层介质的相对介电常数 ϵ_1 为 3.0,电导率 σ_1 为 $0.001 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$,下层介质的相对介电常数 ϵ_2 为 20.0,电导率 σ_2 为 $0.01 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$,整个区域由单元边长 0.1 m 的正方形,网格剖分为 100×50 的网格空间,GPR 波脉冲激励源的中心频率为 100 MHz,采样时窗长度为 100 ns,采样时间间隔为 0.5 ns.应用本文的基于

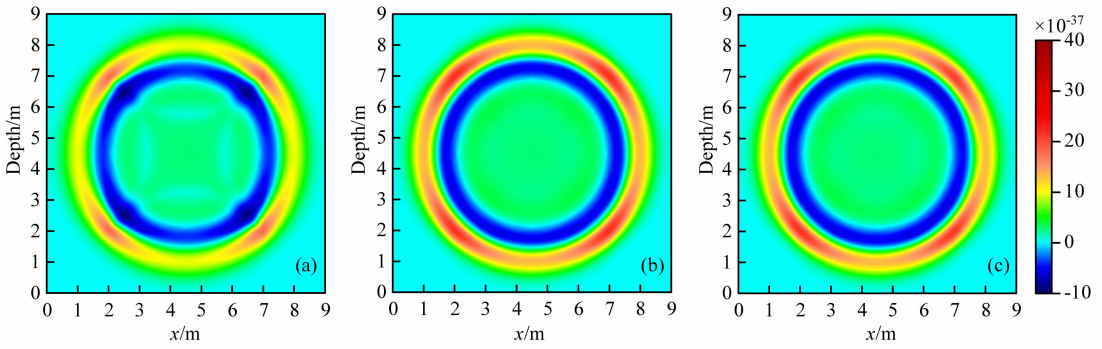


图 11 Sarma 边界条件及其改进的边界条件在不同时刻的快照图

(a)Sarma 边界条件 25 ns 快照;(b)改进的 Sarma 边界条件 25 ns 快照;(c)优化过渡带 Sarma 边界条件 25 ns 快照.

Fig. 11 Snapshots at different times with Sarma boundary condition and improved boundary condition

(a)25 ns snapshot with Sarma boundary conditions; (b)25 ns snapshot with improved Sarma boundary conditions;

(c)25 ns snapshot based on Sarma boundary condition with optimized transitional layer.

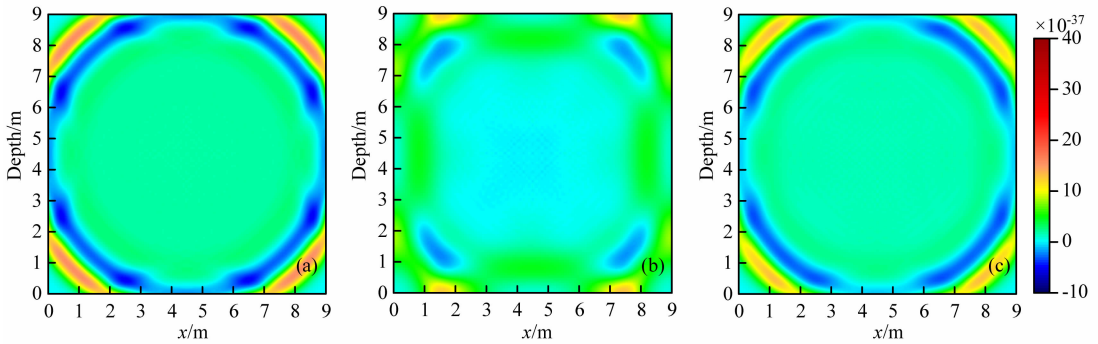


图 12 不同吸收边界条件下的边界反射快照图

(a)加载透射边界条件 35 ns 快照;(b)加载优化过渡带 Sarma 边界条件 35 ns 快照;(c)混合边界条件 35 ns 快照.

Fig. 12 Boundary reflection snapshots with different absorbing boundary conditions

(a) 35 ns snapshot with transmission boundary condition added; (b) 35 ns snapshot based on Sarma

boundary condition with transitional layer added; (c)35 ns snapshot with mixed zone added.

混合边界条件的 FEM 算法对起伏界面模型进行了正演模拟,得到了图 14 所示的 GPR 正演模拟 wiggle 图,图中可见,在 30 ns 附近有一条能量较强的反射界面,通过计算可以得出它与图 13 模型中的上、下两层分界面位置相吻合,但是在起伏比较大的地方,仍存在角点绕射现象.

6.2 三角形与阶梯模型

如图 15 所示,模型为一个 10.0 m×5.0 m 的

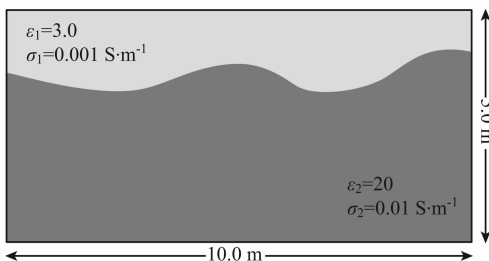


图 13 起伏界面模型示意图

Fig. 13 Sketch map of undulating interface

矩形区域,分为上下两层介质,中间是特殊形态的起伏界面,包括一个三角形和一个阶梯,上层介质的相对介电常数 ϵ_1 为 3.0,电导率 σ_1 为 $0.001 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$,下层介质的相对介电常数 ϵ_2 为 45.0,电导率 σ_2 为 $0.1 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$,整个区域由单元边长 0.1 m 的正方形网格剖分为

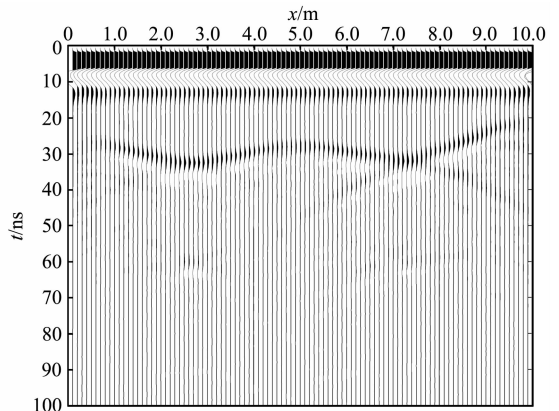


图 14 起伏界面模型探地雷达正演模拟 wiggle 剖面图

Fig. 14 Wiggle section for forward simulation of GPR

100×50 的网格空间, GPR 波源、时窗长度、采样时间间隔均与上面模型一致. 应用 FEM 算法对起伏界面模型进行了正演模拟, 得到了图 16 所示的三角形与阶梯模型的 GPR 正演模拟 wiggle 图, 分析该剖面图可以看出, 在三角形顶点、阶梯形的断点处都存在较强的角点绕射波, 而相应的平界面还会产生较强的反射波, 模拟结果说明了 FEM 进行 GPR 正演模拟的正确性与可行性.

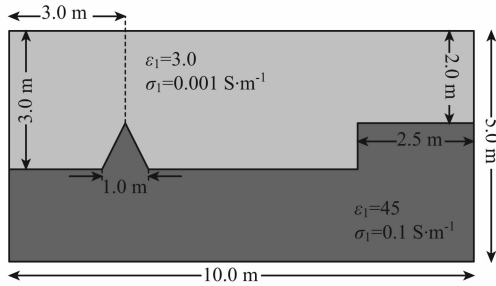


图 15 三角形与阶梯模型示意图

Fig. 15 Sketch map of triangle and stair model

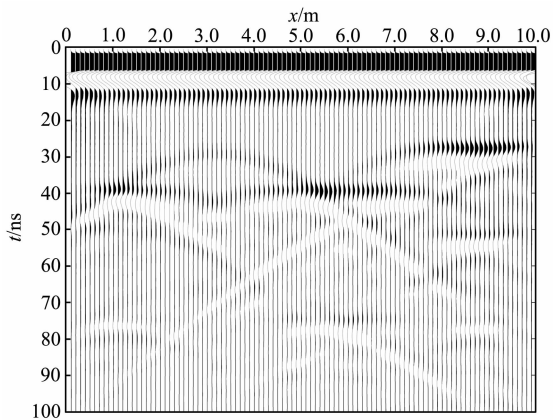


图 16 三角形与阶梯模型探地雷达正演模拟 wiggle 剖面图

Fig. 16 Wiggle section for forward simulation of GPR

7 结论及建议

(1) 推导了 GPR 有限元波动方程, 给出了有限单元法求解该泛函变分问题的详细解法, 并结合差分离散时, 时间步长与空间步长须满足的数值稳定性条件, 探讨了 GPR 有限元波动方程是否带衰减项的不同求解算法.

(2) 阐述了透射边界条件和 Sarma 边界条件的原理. 着重对 Sarma 边界条件进行了研究, 并通过在 Sarma 边界条件衰减层内以环状方式加入过渡层, 压制了介质区和衰减层交界面处的人为反射, 优化了 Sarma 边界条件. 并以二维均匀模型的中心脉冲激励源为例, 对比了人工截断边界处不同边界条

件的处理效果.

(3) 提出了一种结合透射边界条件和 Sarma 边界条件的混合边界条件, 使 GPR 波经过 Sarma 边界条件的衰减吸收后再通过透射边界条件将剩余能量透射出去, 集成了两种边界条件的优势. 最后应用基于该混合边界条件的 FEM 算法对两个典型地电模型进行了正演模拟, 模拟结果表明, 混合边界条件有效地消除了截断边界处的强反射, 说明了 FEM 算法进行 GPR 正演模拟的有效性及其可行性.

致谢 中国科学院地质与地球物理研究所底青云教授对论文的有限元理论、中国石油大学(北京)资源与信息学院地质与地球物理综合研究中心的王月英老师对 Sarma 边界条件程序编制方面给予了有益帮助, 在此一并致以衷心的感谢.

参考文献 (References)

- [1] Feng D S, Dai Q W. GPR numerical simulation of full wave field based on UPML boundary condition of ADI-FDTD. *NDT & E International*, 2011, 44(6): 495-504.
- [2] Shaari A, Ahmad R S, Chew T H. Effects of antenna-target polarization and target-medium dielectric contrast on GPR signal from non-metal pipes using FDTD simulation. *NDT & E International*, 2010, 43(5): 403-408.
- [3] James I, Rosemary K. Numerical modeling of ground-penetrating radar in 2-D using MATLAB. *Computers & Geosciences*, 2006, 32(9): 1247-1258.
- [4] Giannopoulos A. Modelling ground penetrating radar by GprMax. *Construction and Building Materials*, 2005, 19(10): 755-762.
- [5] 刘四新, 曾昭发, 徐波. 三维频散介质中地质雷达信号的 FDTD 数值模拟. *吉林大学学报(地球科学版)*, 2006, 36(1): 123-127.
Liu S X, Zeng Z F, Xu B. FDTD simulation for ground penetrating radar signal in 3-Dimensional dispersive medium. *Journal of Jilin University (Earth Science Edition)* (in Chinese), 2006, 36(1): 123-127.
- [6] Bergmann T, Robertsson J O A, Holliger K. Numerical properties of staggered finite-difference solutions of Maxwell's equations for ground-penetrating radar modeling. *Geophysical Research Letters*, 1996, 23(1): 45-48.
- [7] Carcione J M. Radiation patterns for 2-D GPR forward modeling. *Geophysics*, 1998, 63(2): 424-430.
- [8] 王妙月, 郭亚曦, 底青云. 二维线性流变体波的有限元模拟. *地球物理学报*, 1995, 36(4): 499-506.
Wang M Y, Guo Y X, Di Q Y. 2-D finite element modelling for seismic wave in media with linear rheological property. *Acta Geophysica Sinica* (in Chinese), 1995, 36(4): 499-506.
- [9] 沈巍. 探地雷达波动方程研究及其正演模拟. *物探化探计算技术*, 1994, 16(1): 29-33.

- Shen B. A study on wave equation theory for ground-penetrating radar and forward modelling. *Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration* (in Chinese), 1994, 16(1): 29-33.
- [10] 底青云, 王妙月. 雷达波有限元仿真模拟. *地球物理学报*, 1999, 42(6): 818-825.
- Di Q Y, Wang M Y. 2D finite element modeling for radar wave. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 1999, 42(6): 818-825.
- [11] Di Q Y, Wang M Y. Migration of ground-penetrating radar data with a finite-element method that considers attenuation and dispersion. *Geophysics*, 2004, 69(2): 472-477.
- [12] Fanning P J, Boothby T E. Three-dimensional modelling and full-scale testing of stone arch bridges. *Computer & Structures*, 2001, 79(29): 2645-2662.
- [13] 谢辉, 钟燕辉, 蔡迎春. 电磁场有限元法在 GPR 正演模拟中的应用. *河南科学*, 2003, 21(3): 295-298.
- Xie H, Zhong Y H, Cai Y C. Application of finite element methods for electromagnetic fields in forward model of GPR. *Henan Science* (in Chinese), 2003, 21(3): 295-298.
- [14] Arias P, Armesto J, Capua D D, et al. Digital photogrammetry, GPR and computational analysis of structural damages in a mediaeval bridge. *Engineering Failure Analysis*, 2007, 14(8): 1444-1457.
- [15] Lu T, Cai W, Zhang P W. Discontinuous galerkin time-domain method for GPR simulation in dispersive media. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2005, 43(1): 72-80
- [16] Cerjan C, Kosloff D, Kosloff R. A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations. *Geophysics*, 1985, 50(4): 705-708.
- [17] Sarma G S, Mallick K, Gadhinglajkar V R. Nonreflecting boundary condition in finite-element formulation for an elastic wave equation. *Geophysics*, 1998, 63(3): 1006-1016.
- [18] 王月英, 宋建国. 波场正演模拟中 Sarma 边界条件的改进. *石油物探*, 2007, 46(4): 359-362, 389.
- Wang Y Y, Song J G. Improvement of Sarma boundary condition in wavefield forward modeling. *Geophysical Prospecting for Petroleum* (in Chinese), 2007, 46(4): 359-362, 389.
- [19] Yee K S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1996, 14(3): 302-307.
- [20] Taflove A. Re-inventing electromagnetics: supercomputing solution of Maxwell's equations via direct time integration on space grids. *Computing Systems in Engineering*, 1992, 3(1): 153-168.
- [21] Alvarez G B, Loula A F D, Dutra do Carmo E G, et al. A discontinuous finite element formulation for the Helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195(33-36): 4018-4035.
- [22] 徐世浙. 地球物理中的有限单元法. 北京: 科学出版社, 1994: 260-277.
- Xu S Z. *The Finite Element Method in Geophysics* (in Chinese). Beijing: Science Press, 1994: 260-277.
- [23] Van der Vorst H A. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1992, 13(2): 631-644.
- [24] 柳建新, 蒋鹏飞, 童孝忠等. 不完全 LU 分解预处理的 BICGSTAB 算法在大地电磁二维正演模拟中的应用. *中南大学学报(自然科学版)*, 2009, 40(2): 484-491.
- Liu J X, Jiang P F, Tong X Z, et al. Application of BICGSTAB algorithm with incomplete LU decomposition preconditioning to two-dimensional magnetotelluric forward modeling. *Journal of Central South University (Science and Technology)* (in Chinese), 2009, 40(2): 484-491.
- [25] Kriegsmann G, Morawetz C S. Numerical solutions of exterior problems with the reduced wave equation. *Journal of Computational Physics*, 1978, 28(2): 181-197.
- [26] Bayliss A, Turkel E. Boundary conditions for the helmholtz equation in duct-like geometries. *International Association for Mathematics & Computers in Simulation*, 1983, 455-458.
- [27] Engquist B, Majda A. Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1977, 74(5): 1765-1766.
- [28] Mur G. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 1981, 23(4): 377-382.
- [29] Mei K K, Fang J Y. Superabsorption-a method to improve absorbing boundary conditions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1992, 40(9): 1001-1010.
- [30] Gedney S D, Liu G, Roden J A, et al. Perfectly matched layer media with CFS for an unconditionally stable ADI-FDTD method. *Antennas and Propagation IEEE Transactions on*, 2001, 49(11): 1554-1559.
- [31] Berenger J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 1994, 114(2): 185-200.
- [32] 薛东川, 王尚旭, 焦淑静. 起伏地表复杂介质波动方程有限元数值模拟方法. *地球物理学进展*, 2007, 22(2): 522-529.
- Xue D C, Wang S X, Jiao S J. Wave equation finite-element modeling including rugged topography and complicated medium. *Progress in Geophysics* (in Chinese), 2007, 22(2): 522-529.
- [33] Claerbout J F. *Imaging the Earth's Interior*. Boston: Blackwell Scientific Publications, 1985.
- [34] Semblat J F, Gandomzadeh A L L. A simple numerical absorbing layer method in elastodynamics. *Comptes Rendus Mécanique*, 2010, 338(1): 24-32.
- [35] Caughey T K. Classical normal modes in damped linear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 1960, 27(2): 269-271.