文章编号: 1003- 207(2009) 05- 0096- 08

随机需求下联合选址2库存模型研究

黄　松, 杨　超

(华中科技大学管理学院, 湖北 武汉　430074)

摘　要: 研究了一类具有季节性需求特性的商品的联合选址2库存模型。在传统的无容量限制的固定费用设施选址问题中考虑了分销中心的运作库存和安全库存的影响, 以及规模经济效应和风险分摊效应, 同时考虑了季节性商品未来需求的不确定性, 将订货决策作为模型的决策变量, 建立了一类随机需求下以期望销售收益最大化为目标函数的联合选址2库存模型, 拓展了已有的联合选址2库存模型。该模型是一个混合整数规划问题, 给出了求解该问题的基于拉格朗日松弛算法的两阶段算法, 最后通过随机生成四组不同规模的数值算例, 得到的计算结果表明拉格朗日松弛算法可以有效地求解该问题。

关键词: 设施选址; 选址2库存模型; 随机需求; 拉格朗日松弛
中图分类号: F713l 50　　　文献标识码: A

1　引言

设施选址问题 (Facility Location Problem, FLP) 是物流分销网络设计(Distribution Network Design, DND) 的核心问题。FLP 问题是一项投入成本高、涉及面广, 影响企业整体物流运作的战略决策问题[1], FLP 问题引起研究者的广泛关注起源于 Hakimi 在对通讯网络中交换中心的选择以及对高速公路上检查站的选择等问题的研究[1], 但是随着理论研究的不断深入, 研究者发现战略层面的设施选址决策没有考虑到与战术层面的库存管理决策的相互影响。传统的库存模型研究的都是在设施布局给定的条件下的最优订货策略, 往往忽视了战略设施选址决策以及相关的成本, 而传统的物流设施选址模型则专注于战略层选址成本的最小化, 往往忽视了库存决策以及需求不确定性对运输成本的影响[3], 使得战略层的设施选址和战术层的库存管理都只实现了局部最优, 没有达到整体运作的最优化。

Eppen(1979) [4] 研究发现将多个零售商处的库存集中起来通过分销中心统一管理可以实现显著的库存成本减少, 这种现象称为/ 风险分摊效应(Risk pooling effect) 0, 随着研究的深入, 越来越多的研究者开始在选址模型中考虑这种风险分摊效应, 将选址成本和库存成本集中考虑。Erlebacher 和 Meller (2000) [5] 在选址模型中考虑了库存成本, 建立了一个联合选址(库存模型, 其目标函数是非线性的整数目标函数, 并且给出了求解该模型的近似算法和启发式算法; Teo(2001) 等[6] 研究了分销中心集中管理库存对于库存成本的影响, 他们在目标函数中考虑了选址成本和库存成本, 并且设计了一个可以获得$\sqrt{2}$倍于最优解的算法, 然而他们的算法没有考虑到网络设计对于运输成本的影响。最近, Daskin 等 (2002) [7] 将运作库存和安全库存等引入到无容量限制的固定费用设施选址(UFCLP) 中, 考虑了规模经济和风险分摊效应, 建立了一类联合选址(库存模型, 他们将该模型建为一个混合整合规划模型, 并给出了求解该模型的拉格朗日松弛算法; Shen 等 (2003) [3] 研究了单一供应商和多零售商的联合选址(库存模型, 建立了考虑分销中心运作成本和安全库存成本影响的非线性整数规划模型, 将其转化为集覆盖整数规划问题, 并利用列生成算法进行求解; Shu 等(2005) [8] 对 Shen 等(2003) [3] 提出的算法做了进一步的改进, 他们研究发现, 由列生成算法所产生的定价问题产生了一类新的子模块函数最小化问题, 通过利用二维平面的所有线的集合具有低的 VC2维度的特殊性质, 可以有效地求解文献[3]中的定价问题; Vidyarthi 等(2007) [9] 将分销中心和工厂

收稿日期: 2008- 12- 05; 修订日期: 2009- 09- 03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (70871044, 70601011) ; 教育部新世纪优秀人才支持计划项目(NCET- 06- 0653)
作者简介: 黄松(1982-) , 男(汉族) , 湖北武汉人, 华中科技大学管理学院博士研究生, 研究方向: 网络优化、物流管理.

的选址决策, 工厂到分销中心的运输数量, 分销中心的安全库存水平, 以及将零售商分配给哪些分销中心提供服务作为决策变量, 进一步研究了一类多产品两阶段的生产- 库存- 分销系统设计问题, 以设施选址成本, 运输成本和安全库存成本之和最小化为目标函数建立了一个非线性混合整数规划模型, 并且通过一个分段线性函数实现了线性化。

此外, 一些研究者将情景规划引入到联合选址(库存模型中。Snyder 等(2007)[10] 利用情景规划来描述未来事件的不确定性, 建立了基于情景规划的随机联合选址(库存模型, 同时将该模型拓展到多商品、多周期情形; Chen 等(2006)[11] 通过使用依概率分布的情景来描述未来事件的不确定性, 研究了一类不确定性下的战略设施选址问题, 建立了一类新的 A2reliable 均值剩余模型, 该模型使得对于最坏情景事件子集的期望后悔值达到最小, 其中最坏情景事件发生的概率不超过 12A; 唐凯等(2004)[12] 建立了基于情景规划的随机联合选址(库存模型, 并给出了求解该问题的拉格朗日松弛算法; 此外, Hwang[13] 则考虑商品的存贮特性, 建立了关于变质物品和增值物品的随机集覆盖选址模型; 文献[14-16] 也都对随机选址(库存模型进行了深入的研究, 这些文献在目标函数中考虑的库存成本项的表示和构造上都做了适当的改进和拓展。

然而上述研究选址2库存模型的文献中都只考虑了总体运作成本的最小化, 而实际上企业经营的目的是获取利润最大化, 而以成本最小化为目标和以利润最大化为目标得到的最优解通常是不一样的[17- 19]; 另外, 这些模型都假定分销中心的订货数量是已知的, 是事先确定的外部参数, 而对于季节性商品而言, 其需求通常具有高度的不确定性, 订货数量预先无法确定, 是分销中心库存运作过程中需要考虑的决策变量, 因此, 在上述联合选址2库存中将分销中心的订货决策作为模型的决策变量更为合理, 同时也能够更好地反映实际情形。基于以上考虑, 本文在一般的联合选址2库存模型的基础上将分销中心的订货数量看作为模型的决策变量, 同时考虑分销中心的规模经济效应和风险分摊效应, 以总的期望销售收入最大化为目标函数, 建立了随机需求下的联合选址2库存模型, 该模型是一个混合整数规划模型, 并给出了一种求解模型的启发式算法。

2　问题描述与研究背景

2.1　模型的符号和假设

在实际生活中, 很多商品都具有季节性需求特性, 如节日的鲜花, 圣诞树, 月饼等, 这些商品每年都有相对固定的销售时间范围, 超出该销售时间范围的其他时间段内的需求非常小甚至为零, 对于这类具有季节性需求特征的商品, 由于需求的不确定性, 其年需求量往往不能预先给定, 往往只能根据历史数据和市场预测给出需求的概率分布。分销中心的库存决策, 如年订货数量和订货批量的不同将会影响从分销中心到零售商的运输成本, 从而影响选址决策, 如果将分销中心的订货决策看作是已知的外部参数, 则会导致所选择的分销中心没有实现选址成本和库存成本总体的最小化, 所以在选址(库存模型中将分销中心的订货决策作为决策变量能够更好地反映实际情形。本文研究的问题可以描述如下: 给定零售商的集合 I 以及潜在的分销中心的集合 J, 每个零售商 i 面对的市场需求 d_i 是一个随机变量, 需求解决的问题是: (1) 如何确定在哪些备选分销中心处建立分销中心; (2) 如何确定每个分销中心为哪些零售商提供服务; (3) 如何确定每个分销中心的订货数量, 从而使得分销中心的期望收益实现最大化。

假定各分销中心对于商品的订货提前期相同, 零售商和分销中心无容量限制, 零售商 i 面对的市场需求 d_i 相互独立且均服从正态分布, 并且假定零售商在选择被某一分销中心提供服务后, 将一直接受该分销中心提供的服务, 分销中心需要承担的费用包括: 分销中心的选址成本, 分销中心向供应商订货的订货成本和运输成本, 分销中心处的库存持有成本, 以及从分销中心到各零售商处的运输费用。

问题的其它相关参数定义如下:

f_j: 新建分销中心 j 的年平均成本, $j I J$;

F_j: 分销中心 j 每次向供应商订货的固定成本, $j I J$;

d_{ij}: 从分销中心 j 到零售商 i 的单位数量单位距离的运输成本, $i I I, j I J$;

h: 单位数量商品的年库存持有成本, $h \setminus 0$;

g_j: 从供应商到分销中心 j 的固定运输成本, $j I J$;

a_j: 从供应商到分销中心 j 的可变运输成本, $j I J$;

B: 与运输相关的成本系数, B\ 0;

H: 与库存相关的成本系数, H\ 0;

L: 商品的订货提前期, L> 0;

L_i: 零售商 i 的年需求的均值, $i I I$;

σ_i：零售商 i 的年需求的标准差，$i \in I$；

d_j：分销中心 j 面对的需求，$j \in J$；

p：商品的销售价格；

c：商品的采购价格；

z_α：标准正态分布的分位点，且 $P\{z \leq z_\alpha\} = \alpha$。

同时，定义如下的决策变量：

q_j：分销中心 j 的订货批量，$j \in J$；

Q_j：分销中心 j 的年订货数量，$j \in J$；

$$X_j = \begin{cases} 1, \text{如果在备选节点} j \text{ 处建立分销中心}, j \in J; \\ 0, \text{否则}; \end{cases}$$

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, \text{如果零售商} i \text{ 被分配给分销中心} j \text{ 服务}, i \in I, j \in J; \\ 0, \text{否则。} \end{cases}$$

则分销中心面对的随机需求 $d_j (j \in J)$ 也服从正态分布 $N(\mu_j, \sigma_j^2)$，其中 $\mu_j = \sum_{i \in I} Y_{ij}\mu_i$，$\sigma_j^2 = \sum_{i \in I} Y_{ij}\sigma_i^2$，需求 $d_j (j \in J)$ 的分布函数为 $F_j(\cdot)$，概率密度函数为 $f_j(\cdot)$。

2.1.2　需求外生时的选址-库存模型[7]

在文献[7]中，Daskin 等考虑了由一个供应商，多个分销中心和多个零售商组成的三级供应链系统，假定供应商和零售商的地理位置已知，供应商和分销中心没有容量限制，每一个分销中心面对的需求是分配给它提供服务的零售商的需求的函数，将分配变量看作是由模型内生确定的，在无容量限制的固定费用设施选址问题中考虑了分销中心的运作库存成本和安全库存成本，并通过一个固定的订货成本项反映了规模经济，同时通过建立分销中心，在分销中心处持有安全库存而在零售商处则不维持安全库存，从而实现风险分摊效应，最后，以总的运作成本（选址成本，运输成本，订货成本，运作库存成本和安全库存成本）最小为目标函数，建立了如下的联合选址-库存模型（P1）：

$$\begin{aligned} \operatorname{Min} C = & \sum_{j \in J} f_j X_j + \beta \sum_{i \in I}\sum_{j \in J} d_{ij}\mu_i Y_{ij} \\ & + \sum_{j \in J} \sqrt{2\theta h (F_j + \beta g_j) \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}} \\ & + \beta \sum_{j \in J} a_j X_j \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} \\ & + \theta h z_\alpha \sum_{j \in J} \sqrt{\sum_{i \in I} L\sigma_i^2 Y_{ij}}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j \in J} Y_{ij} = 1, \ \forall i \in I, \tag{2}$$

$$Y_{ij} \leq X_j, \ \forall i \in I, \forall j \in J, \tag{3}$$

$$X_j \in \{0, 1\}, \ \forall j \in J, \tag{4}$$

$$Y_{ij} \in \{0, 1\}, \ \forall i \in I, \forall j \in J。 \tag{5}$$

3　模型的建立与求解方法

3.1　模型的建立

多数联合选址-库存模型都是以成本最小化为目标，而 Lösch（1954）则指出单独考虑成本最小化来选址和单独考虑收入最大化来选址都是不全面的，需要将两者同时考虑[18]。实际上，企业建立分销中心，除了希望减少运作成本之外，还希望获取最大的期望收益。然而以利润最大化为目标函数和以成本最小化为目标函数，在相同的约束条件下，其得到的最优解多数都是不同的。对于任意的分销中心 $j \in J$，其期望收益等于期望销售收入减去成本，成本包括分销中心的选址成本，商品采购成本，分销中心向供应商的订货成本，从供应商到分销中心的运输成本以及分销中心的运作库存成本，即：

$$\begin{aligned} R_j = & \ pE\min(Q_j, x_j) - X_j f_j - cQ_j - F_j \frac{Q_j}{q_j} \\ & - \beta v_j(q_j)\frac{Q_j}{q_j} - \frac{\theta h q_j}{2}, \end{aligned} \tag{6}$$

其中：$x_j = \sum_{i \in I} Y_{ij} x_i$，$v_j(x) = g_j + a_j x$，令 $\frac{\partial R_j}{\partial q_j} = 0$，得到最优订货批量 $q_j^* = \sqrt{2(F_j + \beta g_j)Q_j / \theta h}$，代入（6）式，整理可得：

$$\begin{aligned} R_j = & \ p\left[Q_j - \int_0^{Q_j} F_j(x_j)\,dx_j\right] - X_j f_j - cQ_j \\ & - \sqrt{2\theta h Q_j (F_j + \beta g_j)} - \beta a_j Q_j, \end{aligned} \tag{7}$$

（7）式中第一项表示分销中心 j 的期望销售收入，第二项表示建立分销中心的成本，第三项表示商品的采购成本，第四项表示从供应商到分销中心的固定运输成本以及固定订货成本，第五项表示从供应商到分销中心的可变运输成本。

对于随机需求下 $|j|$ 个备选分销中心的联合选址-库存问题可以建立如下的模型（P2）：

$$\begin{aligned} \operatorname{Max} R = & \ p\sum_{j \in J} E\min\left(X_j Q_j, \sum_{i \in I} Y_{ij} x_i\right) \\ & - c\sum_{j \in J} X_j Q_j - \sum_{j \in J} X_j f_j - \beta \sum_{i \in I}\sum_{j \in J} d_{ij}\mu_i Y_{ij} \\ & - \sum_{j \in J} \sqrt{2\theta h (F_j + \beta g_j) X_j Q_j} \\ & - \beta \sum_{j \in J} a_j X_j Q_j - \theta h z_\alpha \sum_{j \in J} \sqrt{\sum_{i \in I} L\sigma_i^2 Y_{ij}}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j \in J} Y_{ij} = 1, \ \forall i \in I, \tag{9}$$

$$Y_{ij} \leq X_j, \ \forall i \in I, \forall j \in J, \tag{10}$$

$$X_j \in \{0, 1\}, \ \forall j \in J, \tag{11}$$

$$Y_{ij}\in\{0,1\},\ \forall i\in I,\ \forall j\in J, \tag{12}$$

$$Q_j \ge 0,\ \forall j\in J。 \tag{13}$$

模型(P2)中目标函数中的第一项表示期望销售收入,第二项表示商品的采购成本,第三项表示建立分销中心的选址成本,第四项表示从分销中心到零售商的运输成本,第五项和第六项表示从供应商到分销中心的运输成本、订货成本和运作库存成本,第七项表示分销中心处持有的安全库存成本。约束条件(9)表明每个零售商只由一个分销中心提供服务,约束条件(10)表示只有在备选分销中心 j 处建立分销中心时才能给零售商提供服务,约束条件(11),(12)表示选址变量和分配变量的取值范围,约束条件(13)表示分销中心的年订货数量的取值范围。

比较模型(P1)和(P2)的结构可以看出,模型(P1)的决策变量有两组,分别是选址变量 $X_j(j\in J)$ 和分配变量 $Y_{ij}(i\in I, j\in J)$,而模型(P2)的决策变量不仅包括选址变量 $X_j(j\in J)$ 和分配变量 $Y_{ij}(i\in I, j\in J)$,还包括每个备选分销中心 j 的订货数量 $Q_j(j\in J)$。模型(P1)中将商品的年需求量看作是预先给定的外部参数,而实际上,对于具有季节性需求特性的商品而言,其需求具有高度的不确定性,其年需求量往往无法事先确定,而只能根据经验数和和市场预测给出其需求的分布,因此,将年需求量当作随机变量更为合理。由于模型(P2)相对于模型(P1)多了一组决策变量 $Q_j(j\in J)$,因此其求解过程比模型(P1)的求解过程更加复杂。

但是我们可以证明模型(P2)在一定条件下可以转化为模型(P1),只要在模型(P2)中令 $p=c=0$, $Q_j=\sum_{i\in I}L_iY_{ij}$,问题(P2)就转化为问题(P1),即不考虑销售收入和成本,并且假定每一备选分销中心的订货量与分配给它服务的零售商的需求的均值相等时,模型(P2)就转化为模型(P1),因此模型(P1)更具有一般性和普遍性。然而在求解模型(P2)的过程中,可能会出现如下情形:某一备选分销中心 j_1 被选择建立分销中心后,该分销中心 j_1 处零售商的需求可能被分配给其他的分销中心 j_2 $(j_1\neq j_2)$ 服务,文献[7]举例说明了此种情形会发生。然而在实际运作过程中却不太可能出现此情形,为了规避此情形的发生,如果假定零售商的需求的方差与均值的比值为一常数,即 $\forall i\in I$, $\sigma_i^2/L_i=C$,上述情形就不会发生,具体证明过程可参阅文献[7]。

将模型(P2)中的目标函数各项加以整理,注意到当 $X_j\in\{0,1\}$ 时, $\sqrt{X_j}=X_j$,可以得到:

$$\begin{aligned}\mathrm{Max}R=&\sum_{j\in J}\Big\{(p-c-\beta a_j)X_jQ_j-pX_j\int_0^{Q_j}F_j(x_j)\,dx_j\\&-f_jX_j-\beta\sum_{i\in I}d_{ij}L_iY_{ij}\Big\}\\&-\sum_{j\in J}\Big\{\sqrt{2\theta h(F_j+\beta g_j)X_jQ_j}+\theta h z_\alpha\\&\cdot\sqrt{\sum_{i\in I}L\sigma_i^2Y_{ij}}\Big\}=\sum_{j\in J}\Big\{T_jX_j-\sum_{i\in I}d_{ij}Y_{ij}\\&-M\sqrt{\sum_{i\in I}L_iY_{ij}}\Big\},\end{aligned} \tag{14}$$

其中: $T_j=P_jQ_j-p\int_0^{Q_j}F_j(x_j)\,dx_j-K_j\sqrt{Q_j}-f_j$, $P_j=p-c-\beta a_j$, $x_j=\sum_{i\in I}Y_{ij}x_i$, $K_j=\sqrt{2\theta h(F_j+\beta g_j)}$, $d_{ij}=\beta d_{ij}L_i$, $M=\theta h z_\alpha\sqrt{LC}$。

在式(14)中,决策变量包括三个部分:选址变量 $X_j(j\in J)$,分配变量 $Y_{ij}(i\in I, j\in J)$,以及订货数量 $Q_j(j\in J)$,模型的求解过程可以分为两步进行:首先确定在哪些备选分销中心处建立分销,以及如何将每个零售商分配给相应的分销中心提供服务,然后再确定每个分销中心的订货数量。

关于模型(P1)和(P2),有如下命题:

命题 当在模型(P2)中令 $p=c=0$ 时,模型(P2)得到的最优值不劣于模型(P1)的最优值。

证明:在模型(P2)中令 $p=c=0$,并对目标函数取最小值 R_c,因为 $\mathrm{Max}R=-\mathrm{Min}R_c$,得到如下的模型(P3):

$$\begin{aligned}\mathrm{Min}R_c=&\sum_{j\in J}\Big\{f_jX_j+\beta\sum_{i\in I}d_{ij}L_iY_{ij}\\&+\sqrt{2\theta h(F_j+\beta g_j)X_jQ_j}+\beta a_jX_jQ_j+\theta h z_\alpha\\&\cdot\sqrt{\sum_{i\in I}L\sigma_i^2Y_{ij}}\Big\},\end{aligned} \tag{15}$$

s.t. (9)-(13)。

比较模型(P1)和(P3)可知,模型(P3)比模型(P1)多了一组决策变量 $Q_j(j\in J)$,如果 (X_J^*, Y_{IJ}^*) 是模型(P1)的最优解,那么 $(X_J^*, Y_{IJ}^*, L_I^TY_{IJ}^*)$ 为模型(P3)的一个可行解,其中 X_J^* 为 $|J|\times 1$ 维向量, Y_{IJ}^* 为 $|I|\times|J|$ 维矩阵, L_I 为 $|I|\times 1$ 维向量,所以,模型(P2)的最优值不劣于模型(P1)的最优值。

上述命题表明模型(P2)的最优解不劣于模型(P1)的最优解,即模型(P1)得到的最优值是模型(P2)最优值的下界,因此本文提出的模型拓展了 Daskin 等(2002)[7]提出的联合选址-库存模型,以期望收益最大化为目标函数,同时将分销中心的年订货数量看作是模型的决策变量,建立的模型(P2)

能更好地反映现实情形。

3.2 求解算法

传统的无容量限制的设施选址问题已经被证明是 NP-Hard 问题[20], 而在模型(P2)中, 由于每个备选分销中心的订货数量也是决策变量, 导致模型(P2)的求解过程相对于无容量限制的设施选址问题更加复杂, 因此我们设计了求解模型(P2)的基于拉格朗日松弛算法的两阶段算法, 该启发式算法的求解过程可以按照如下步骤进行:

步骤 1: 令订货量 $Q_j=0, (j\in J), n=1$, 给定一组初始拉格朗日乘子 $\lambda_i^n>0, (i\in I)$;

步骤 2: 寻找一个上界。将约束条件(9)中引入拉格朗日乘子 $\lambda_i^n>0, (i\in I)$, 将式(14)整理得到:

$$\max_{\lambda}\min_{X,Y}\sum_{j\in J}\{T_jX_j+\sum_{i\in I}(d_{ij}-\lambda_i^n)Y_{ij}+M\cdot\sqrt{\sum_{i\in I}L_iY_{ij}}\}+\sum_{i\in I}\lambda_i^n, \quad (16)$$

s.t. (10)-(13)。

对于固定的拉格朗日乘子 $\lambda_i^n>0, (i\in I)$, 式(16)需要求解关于选址变量 $X_j(j\in J)$ 和分配变量 $Y_{ij}(i\in I, j\in J)$ 的最小值, 为此, 首先不考虑选址变量 $X_j(j\in J)$, 求解关于分配变量 $Y_{ij}(i\in I, j\in J)$ 的子问题(SP_j):

$$\min V_j=\sum_{i\in I}(d_{ij}-\lambda_i^n)Y_{ij}+M\sqrt{\sum_{i\in I}L_iY_{ij}}, \quad (17)$$

s.t. $Y_{ij}\in\{0,1\}, \forall i\in I$。

令 $b_i=d_{ij}-\lambda_i^n$, $c_i=M^2L_i$, $z_i=Y_{ij}$, 则子问题(SP_j)等价于如下的问题(SP_j'):

$$\min\left\{\sum_{i\in I}b_iz_i+\sqrt{\sum_{i\in I}c_iz_i}\right\}, \quad (18)$$

s.t. $z_i\in\{0,1\}, \forall i\in I$。

求解问题(SP_j')可以通过 Shen 等(2003)[3] 提出的算法求解, 该算法的计算复杂度为 $O(|I|\log|I|)$:

Step 1: 将集合 I 划分为如下三个集合: $I^+=\{i\mid b_i\ge 0\}$, $I^0=\{i\mid b_i<0, c_i=0\}$, $I^-=\{i\mid b_i<0, c_i>0\}$;

Step 2: 将集合 I^- 中的元素按照如下顺序排列: $b_1/c_1\le b_2/c_2\le\cdots\le b_n/c_n$, 其中 $|I^-|=n$;

Step 3: 计算部分和 $S_m=\sum_{i\in I^0}b_i+\sqrt{\sum_{i\in I^0}c_i}+\sum_{i=1,i\in I^-}^{m}b_i+\sqrt{\sum_{i=1,i\in I^-}^{m}c_i}$, 其中 $m=0,1,\cdots,n$;

Step 4: 选择使 S_m 取最小值相应的 m, 并且令

$$z_i=\begin{cases}1 & 若\ i\in I^0,\\ 1 & 若\ i\in I^-, i\le m,\\ 0 & 否则。\end{cases}$$

通过如上计算步骤, 可以得到相应的 Y_{ij} 和 V_j, 计算 T_j+V_j, 若 $T_j+V_j<0$, 则令 $X_j=1$, 否则, 令 $X_j=0$, 若对于任意的 $j\in J$, 都有 $T_j+V_j>0$, 则令其中使 T_j+V_j 值最小的相应的 $X_j=1$, 得到对应于拉格朗日对偶松弛问题(16)式的目标函数值是原问题目标函数值的上界 UB;

步骤 3: 寻找一个下界。对于满足 $X_j=1$ 的备选分销中心, 将零售商 $i(i\in I)$ 分配给离它最近的分销中心提供服务, 得到原问题的一个可行解, 其目标函数值是原问题的一个下界 LB;

步骤 4: 若在算法迭代的过程中 $UB-LB<\varepsilon$, 其中 ε 为预先给定的数值, 则迭代过程停止, 转入步骤 5, 否则使用如下的次梯度优化算法调整拉格朗日乘子[20], 然后重复步骤 2~步骤 3,

$$t^n=\frac{\alpha^n(UB-\ ^{n})}{\sum_{i\in I}(\sum_{j\in J}Y_{ij}^n-1)^2},$$

$$\lambda_i^{n+1}=\max\{0,\lambda_i^n-t^n(\sum_{j\in J}Y_{ij}^n-1)\}。$$

其中:

t^n: 拉格朗日算法过程中第 n 次迭代的步长;

α^n: 第 n 次迭代时的常数;

UB: 目标函数的最小上界;

^{n}: 在第 n 次迭代时拉格朗日函数的目标函数;

Y_{ij}^n: 在第 n 次迭代时分配变量 Y_{ij} 的最优值;

步骤 5: 确定每个分销中心的最优订货量, 若 $X_j=0$, 则令 $Q_j=0$; 否则, 由式(14)计算

$$\frac{\partial R}{\partial Q_j}=g(Q_j)=P_j-\frac{K_j}{2\sqrt{Q_j}}-pF_j(Q_j)。$$

因为 $\lim_{Q_j\to 0^+}g(Q_j)<0$, $\lim_{Q_j\to+\infty}g(Q_j)<0$, 若对于任意的 $Q_j>0$, $\partial R/\partial Q_j<0$, 即利润 R 是关于订货数量 Q_j 的严格减函数, 则分销中心的近似最优订货数量趋于零, 和实际情形不符合, 令 $\partial R/\partial Q_j=0$, 计算得到分销中心的年最优订货数量 $Q_j^*(j\in J)$, 由(6)式可得分销中心 j 的订货批量 $q_j^*=\sqrt{2(F_j+\beta g_j)Q_j^*/H_h}$, $j\in J$。

4 数值算例

4.1 小规模算例

本节首先设计了如下的小规模算例, 零售商数目为 40, 所有的零售商的地理位置随机分布在平面

(0, 100) @(0, 100) 上, 分销中心 j 每次向供应商订货的固定成本 F_j 均匀分布在(100, 140) 上, 新建分销中心 j 的年平均成本 f_j 均匀分布在(50, 200) 上, 各零售商的需求均值 L_i 均匀分布在(300, 500) 上, 零售商与分销中心的距离为二维平面上的欧氏距离, 从供应商到分销中心 j 的固定运输成本 g_j 均匀分布在(10, 20) 上, 可变运输成本 a_j 均匀分布在(2, 4) 上, 单位商品的年库存持有成本 h= 10, C= 11 6, 商品的销售价格 p= 40, 采购价格 c= 10, z_A= 11 96。

采用 Matlab61 5 编程, 在 Pentium Ô (21 4G)、1G 内存的计算机上进行计算, 求解参数(和参数(取不同数值时模型的计算结果, 由于算法的主要计算步骤在于确定选址变量和分配变量, 因此只给出了利用拉格朗日松弛算法求解选址变量和分配变量的相关计算结果和运行参数, 设定拉格朗日松弛算法最大迭代次数为 500, 上界下界的相对误差为 41 0%, 计算结果如表 1 所示:

表 1　拉格朗日松弛算法的计算结果

B	H	最小上界	最大下界	上界(下界相对误差	迭代次数	CPU 运行时间
01 02	01 1	59891 2	58421 3	21 45%	227	291 9s
	01 2	68391 1	67421 8	11 41%	239	311 3s
	01 3	81341 8	79651 9	21 08%	242	321 6s
	01 4	84851 9	81721 6	31 69%	226	301 9s
01 04	01 1	63141 4	61261 1	21 98%	195	261 0s
	01 2	71121 6	69561 5	21 19%	232	311 1s
	01 3	85571 8	82361 4	31 76%	246	321 4s
	01 4	12595	12426	11 34%	259	341 5s
01 06	01 1	61471 3	59261 3	31 60%	156	201 8s
	01 2	82991 9	81241 2	21 12%	217	281 8s
	01 3	76531 6	74381 1	21 82%	304	431 4s
	01 4	85381 1	82131 5	31 80%	346	501 1s
01 08	01 1	59881 1	57681 4	31 67%	106	141 1s
	01 2	74021 8	72581 3	11 95%	203	271 0s
	01 3	82251 1	79321 7	31 55%	317	461 3s
	01 4	82571 6	80411 2	21 62%	349	511 2s

从表 1 中可以看出, 当改变参数 B 和参数 H 时, 利用拉格朗日松弛算法得到的最大的上界(下界相对误差为 31 69%, 最小的上界(下界相对误差为 11 34%, CPU 的运行时间均不超过 60s, 并且除两种情况外, CPU 运行时间均不超过 50s, 表明拉格朗日松弛算法对于给定的小规模算例可以取得比较理想的计算效果。

41 2　随机算例

本节随机生成 4 组不同零售商数目的算例组, 针对不同的零售商数目和参数 H 值, 在每种情形下随机生成 10 组算例, 所有的零售商的地理位置随机分布在平面(0, 100) @(0, 100) 上, F_j 随机分布在(100, 150) 上, f_j 随机分布在(100, 200) 上, L_i 随机分布在(50, 100) 上, g_j 随机分布在(10, 20) 上, a_j 随机分布在(3, 6) 上, h= 12, C= 2, B= 01 02, z_A= 11 96, 设定上界下界的相对误差为 5%, 计算结果如表 2 所示。

从表 2 中可以看出, 随着零售商数目的增加, 利用拉格朗日松弛算法计算随机产生的算例组时的迭代次数、CPU 运行时间也相应地增加; 随着参数(的增加, 平均迭代次数也相应增加, 表明运输成本对于模型的求解的迭代次数有重要影响。对随机生成算例的统计结果也表明, 最大迭代次数均不超过零售商数目的 11 倍, 最大 CPU 运行时间均不超过零售商数目的 131 1 倍。当零售商数目不超过 100 时, 最大 CPU 运行时间均不超过 904s。所以, 表 2 给出的计算结果表明, 对于随机生成的算例组, 拉格朗日松弛算法可以有效地求解该问题。

5　结语

本文研究了一类具有季节性需求特性的商品的联合选址(库存决策问题, 在传统的无容量限制的固定费用设施选址模型中考虑了分销中心运作库存和安全库存的影响, 以及季节性商品未来需求的不确定性, 将订货决策作为模型的决策变量, 建立了随机需求下以期望销售收益最大为目标函数的非线性混合整数规划模型, 由于传统的无容量限制固定费用设施选址问题已经被证明是 NP2H ard 问题, 所以本

文给出的模型也是 NP2Hard 问题, 因此设计了基于拉格朗日松弛算法的两阶段求解算法, 并且通过随机生成的数值算例验证了算法的有效性, 计算结果表明, 当零售商数目不超过 100 时, CPU 的最大运行时间不超过 904s, 算法可以得到满意的效果, 当零售商的数目超过 100 时, CPU 的最大运行时间则相对较长, 另外本文给出的是启发式两阶段求解算法, 求得的并不一定是问题的最优解, 还需要不断优化求解算法。对于需求不稳定的短生命周期的商品的选址2库存问题, 产品的需求对于库存决策和选址决策具有重要的影响, 因此, 本文给出的模型主要适用于具有季节需求特性的短生命周期商品的联合选址2库存决策问题。对于多产品、多周期随机需求下的联合选址(库存模型还需要做进一步的研究。

表 2　随机生成算例时拉格朗日松弛算法的计算结果

零售商数目	H	最大上界- 下界相对误差	平均上界- 下界相对误差	最大迭代次数	平均迭代次数	最大 CUP 运行时间	平均 CPU 运行时间
50	01 1	41 96%	41 84%	270	244	701 5s	631 0s
	01 2	41 98%	31 44%	422	382	1121 6s	1001 0s
	01 3	41 97%	21 50%	462	446	1281 3s	1201 9s
	01 4	41 99%	41 95%	528	508	1491 9s	1381 8s
	01 5	41 99%	41 95%	550	534	1521 2s	1441 9s
80	01 1	41 96%	41 08%	292	259	2681 1s	2321 1s
	01 2	41 54%	11 93%	437	425	4141 1s	3831 1s
	01 3	21 72%	11 16%	497	473	4701 5s	4161 4s
	01 4	41 07%	21 99%	527	484	5061 3s	4591 0s
	01 5	41 08%	11 89%	567	523	5491 7s	4971 4s
100	01 1	41 99%	21 00%	306	280	4901 0s	4611 3s
	01 2	31 73%	11 70%	441	421	7301 8s	7031 3s
	01 3	21 95%	11 51%	488	467	8251 1s	7731 1s
	01 4	41 37%	11 89%	519	492	9031 5s	8251 3s
	01 5	41 16%	11 69%	529	502	8841 9s	7891 3s
120	01 1	41 90%	21 54%	300	290	7501 2s	7201 4s
	01 2	21 34%	11 41%	436	421	11211 5s	11131 2s
	01 3	41 67%	11 95%	475	465	12971 3s	11811 1s
	01 4	21 64%	11 66%	510	487	13651 7s	12851 3s
	01 5	41 91%	31 31%	536	497	15721 7s	12861 4s

参考文献:

[1] Melo, M. T. , Nickel, S. , Saldanha2da2Gama, F. . Facili2ty location and supply chain management2A review[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 196(2): 401- 412.

[2] Hakimi, S. L.. Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph[J]. Op2erations Research, 1964, 12: 450- 459.

[3] Shen, Z. J. M. , Coullard, C. R. , Daskin, M. S. . A joint location2inventory model[J]. Transportation Science, 2003, 37(1): 40- 55.

[4] Eppen, G. Effects of centralization on expected costs in a multi2location newsvendor problem[J]. Management Science, 1979, 25: 498- 501.

[5] Erlebacher, S. J., Meller, R. D.. The interaction of loca2tion and inventory in designing distribution systems[J]. IIE Transactions, 2000, 32(2): 155- 166.

[6] Teo, C. P., Ou, J. H. , Goh, K. H.. Impact on inven2tory costs with consolidation of distribution centers[J]. IIE Transactions, 2001, 33(2): 99- 110.

[7] Daskin, M. S., Coullard, C. R. , Shen, Z. J. M.. An in2ventory2location model: Formulation, solution algorithm and computational results[J]. Annals of Operations Re2search, 2002, 110(1- 4): 83- 106.

[8] Shu, J., Teo, C. P.. Stochastic transportation2inventory network design problem[J]. Operations Research, 2005, 53(1): 48- 60.

[9] Vidyarthi, N., Celebi, E., Elhedhli, S., et al. Integrated production2inventory2distribution system design with risk pooling: Model formulation and heuristic solution [J]. Transportation Science, 2007, 41(3): 392- 408.

[10] Snyder, L. V., Daskin, M. S., Teo, C. P.. The stochas2tic location model with risk pooling[J]. European Jour2nal of Operational Research, 2007, 179(3): 1221- 1238.

[11] Chen, G., Daskin, M. S., Shen, Z. J. M., et al. The A2reliable mean2excess regret model for stochastic facility

location modeling[J] . Naval Research Logistics, 2006, 53: 617- 626.

[12] 唐凯, 杨超, 杨珺. 随机多阶段分销网络设计模型[J] . 中国管理科学, 2007, 15(6): 98- 104.

[13] Hwang, H. S. . A stochastic set2covering location model for both ameliorating and deteriorating items[J] . Computers & Industrial Engineering, 2004, 46(2): 313- 319.

[14] Sch tz, P. , Stougie, L. , Tomasgard, A. . Stochastic facility location with general long2run costs and convex short2run costs [J]. Computers & Operations Research, 2008, 35(9): 2988- 3000.

[15] 张长星, 党延忠. 供应商管理库存环境下的分销网络连续近似模型[J] . 管理工程学报, 2005, 19(12): 50 - 54.

[16] 秦绪伟, 范玉顺, 尹朝万. 随机需求下的选址(库存配送系统集成规划模型及算法[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(6): 853- 860.

[17] Zhang, S. Z. . On a profit maximizing location model [J]. Annals of Operations Research, 2001, 103 (1- 4): 251- 260.

[18] LÊsch, A. . The Economics of Location[M]. New Haven: Yale University Press, 1954.

[19] Shen, Z. J. M. . A profit2maximizing supply chain network design model with demand choice flexibility[J]. Operations Research Letters, 2006, 34(6): 673- 682.

[20] Daskin, M. S. . Network and Discrete Location: Models, Algorithms and Application [M]. New York: Wiley Interscience, 1995.

Study on Joint Location2Inventory Model under Stochastic Demand

HUANG Song, YANG Chao

(School of Management, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: A class of joint location2inventory models for products with seasonal selling property is investigated in this paper. Based on the traditional uncapacitated fixed charge facility location problem, the working inventory cost and the safety stock cost in the distribution centers, as well as the impacts or scale of economy and risk pooling, are considered. Considering the uncertainty of future demand with seasonal products, this paper treats the replenishment decisions as exogenous decision variables, and develops a joint location2inventory model aiming at the maximization of expected revenue. The proposed model extends the existed joint location2inventory models. As the proposed model is a mixed integer programming problem, a two2phrase solution procedure based on Lagarangian relaxation algorithm is developed to solve this problem. At last, four groups of numerical examples which are generated stochastically are given and the solution results show that the proposed Lagrangian relaxation approach can solve the problem effectively.

Key words: facility location; location2inventory model; stochastic demand; Lagrangian relaxation