文章编号:1003 - 207(2009)05 - 0127 - 06

基于限制优势关系的粗糙决策分析模型

骆公志 ,杨晓江 ,刘思峰

(南京航空航天大学经济与管理学院 ,江苏 南京 210016)

摘 要:针对信息不完全的偏好多属性决策问题 ,给出一种基于拓展粗糙集的决策分析模型. 首先提出限制优势关系的概念;然后在限制优势关系下得到知识的粗糙近似 ,给出分类决策规则. 对比分析证明 ,限制优势关系既保留了扩展优势关系的优点 ,又在一定程度上克服了扩展优势关系的局限性. 最后通过一个实例验证了所提出的模型对信息不完备决策系统的处理更符合实际情况。

关键词:多属性决策;不完备信息;粗糙集;限制优势关系

中图分类号:C931 **文献标识码**:A

1 引言

不完备信息条件下的多属性决策问题一直是管理科学的研究热点之一。Greco 等(2001 , 2005 , 2006)提出的基于优势关系的拓展粗糙集理论[1 - 3] ,为处理含有偏好信息的多属性决策问题提供了新的思路。这一理论利用优势关系将决策者的偏好信息以知识的形式表示出来 ,非常适合处理有偏好信息的多属性决策问题。然而 , Greco 的优势关系粗糙集理论只能用于处理完备信息系统。

对于不完备信息系统[4 ,5] ,目前已有相关学者将优势关系粗糙集理论在其中进行了扩充。从粗糙集理论的角度考虑 ,不完备信息系统中的属性未知值一般可以分为两种情况加以讨论:(1)所有的属性未知值仅仅是被遗漏的 ,但又是确实存在的;(2)所有的属性未知值被认为是缺席的 ,是不允许被比较的。文献[6 - 9]从遗漏型属性未知值角度出发提出了不同类型的拓展粗糙决策分析模型 ,但这些模型假设属性未知值可以等于任意属性已知值 ,认为属性未知值既可以优于任意属性已知值 ,又可以劣于任意属性已知值;文献[10]从缺席型属性未知值角度出发 ,综合了相似关系与优势关系的优点 ,提出了基于相似优势关系的粗糙决策分析模型 ,但该模型仍然认为属性未知值可以等于任意已知值。上述拓展优势关系均容易将实际不满足条件的对象误判为同一个决策类 ,这势必影响现有的基于拓展优势关系的粗糙决策分析模型的应用效果。

本文针对这一问题 ,利用优势关系中属性值具有偏好次序的特性 , 以遗漏型属性未知值为假设前提 ,提出限制优势关系的概念 ,根据限制优势关系确定粗糙集的上近似、下近似和边界 ,从而获取可信度更高的决策规则 ,并与基于扩展优势关系的粗糙决策分析模型进行了对比分析。理论证明与实践结果两个方面均验证了基于限制优势关系的决策分析模型的有效性与实用性。

2 预备知识

2.1 不完备偏好多属性决策系统

先给出不完备偏好多属性决策系统的概念[11 - 13]。设有一个决策系统 $S = 《U, A, V, f》$。其中 U 是论域 , A 是非空的属性集合 , $A = C \cup D$, $C \cap D = \Phi$, C 和 D 分别为条件属性集和决策属性集; V 是属性值集 , $V_C = \{V_q \mid q \in C\}$ 和 $V_D = \{V_d \mid d \in D\}$ 分别为条件属性值集和决策属性值集 ,条件属性值 V_q 和决策属性值 V_d 具有偏好次序; $f: U \times A \to V$ 是一个信息函数 ,表示对每一个 $x \in U$, $q \in A$, $f(x, q) \in V_q$,如果某些属性值 $V_q' \in V_C$, $V_q' = *$,“ * ”表示空值 ,则 S 称为不完备偏好多属性决策系统。

再给出两种累积集:向上累积集和向下累积集的定义。

定义 1[1] 设 $S = 《U, A, V, f》$ 为一个决策系

收稿日期:2008 - 08 - 25;修订日期:2009 - 06 - 19

基金项目:国家自然科学基金资助项目(70701017);江苏省“青蓝工程”资助项目(2008)

作者简介:骆公志(1972 -) , 男(汉族) ,江苏东海人 , 南京航空航天大学经济与管理学院副教授 , 博士研究生 , 研究方向:粗糙集理论与应用.

统,属性集合 $P \subseteq A$。$D(P) = \{(x,y) \in U \times U \mid \forall q \in P,\ f(y,q) \geq f(x,q)\}$ 为 P 上的优势关系,当 $\forall x,y \in U,(x,y) \in D(P)$ 时,意味着“y 至少和 x 一样好”,即 y 不劣于 x,用 yD_Px 表示,用 xD_Py 表示 y 不优于 x。设 $CL = \{Cl_1, \cdots, Cl_n\}$ 为论域 U 的一个划分,若 $Cl_r, Cl_s \subseteq U, r,s \in \{1,2,\cdots,n\}$,则

$$\{x \in Cl_r, y \in Cl_s, r > s\} \Rightarrow \{xD_Py \wedge \neg yD_Px\}.$$

于是,向上累积集 $Cl_t^{\geq}$ 定义为 $Cl_t^{\geq} = \bigcup_{s \geq t} Cl_s$;向下累积集 $Cl_t^{\leq}$ 定义为 $Cl_t^{\leq} = \bigcup_{s \leq t} Cl_s$,其中 $t = 1,2,\cdots,n$。

由定义 1,可以得到 $Cl_t^{\geq}$ 和 $Cl_t^{\leq}$ 的如下性质:

1) $Cl_1^{\geq} = Cl_n^{\leq} = U, Cl_n^{\geq} = Cl_n,\ Cl_1^{\leq} = Cl_1$;

2) $Cl_{t-1}^{\leq} = U - Cl_t^{\geq}$ 或 $Cl_t^{\geq} = U - Cl_{t-1}^{\leq},\ t = 2,\cdots,n$。

2.2 扩展优势关系

定义 2[6,7] 给定决策系统 $S = 《U,A,V,f》$,集合 $P \subseteq A$,设 $x,y \in U$, P 上的扩展优势关系 $ED(P)$ 定义为:

$$ED(P) = \{(x,y) \in U \times U \mid \forall q \in P, f(y,q) \geq f(x,q) \vee f(y,q) = * \vee f(x,q) = *\} \quad (1)$$

此时称“y 扩展优势于 x”,简记为 yD_P^Ex。由定义可知,扩展优势关系满足自反性,但不一定满足传递性和对称性。

2.3 广义扩展优势关系

定义 3[9] 给定决策系统 $S = 《U,A,V,f》$,集合 $P \subseteq A$,设 $x,y \in U$, P 上的广义扩展优势关系 $GED(P)$ 定义为:

$$GED(P) = \{(x,y) \in U \times U \mid \forall q \in P, (|B_P(x) \cap B_P(y)| / |C| \geq \lambda \wedge ((f(x,q) = * \wedge f(y,q) = *) \vee (f(x,q) = * \wedge f(y,q) \neq *) \vee (f(y,q) = * \wedge f(x,q) \neq *) \vee ((f(x,q) \neq * \wedge f(x,q) \neq *) \rightarrow f(y,q) \geq f(x,q))))\} \quad (2)$$

其中 $B_P(x) = \{b \mid b \in P \wedge f(x,b) \neq *\}$, $0 \leq \lambda \leq 1$,此时称“y 广义扩展优势于 x”,简记为 $yD_P^{\lambda}x$。由定义可知,广义扩展优势关系满足自反性,但不一定满足传递性和对称性。

有限扩展优势关系[8] 是广义扩展优势关系在 $\lambda = 1/|C|$ 时的特例,在此略去。

以上拓展优势关系以空值可以等于任意值为假设前提,认为空值优于任意值,同时又认为任意值优于空值,这显然不符合实际情况。

例如,对于 $x = (1,1,*)$, $y = (1,1,4)$, $z = (*,*,4)$,其中 4 为属性值中的最优值,1 为属性值中的最劣值。按照定义 2 和定义 3 可得:xD_P^Ey, $xD_P^{\lambda}y$ 成立,$zD_P^{\lambda}x$ 不成立。事实上,“$* \geq 4$”及“$1 \geq *$”成立的可能性均很小,而“$4 \geq *$”及“$* \geq 1$”必然成立,从而可知 xD_P^Ey, $xD_P^{\lambda}y$ 成立的可能性很小(这也是扩展优势关系与广义扩展优势关系不满足传递性的原因),而 $zD_P^{\lambda}x$ 不成立是误判。这说明上述模型的划分粒度过大。

另外,由于将遗漏型作为属性未知值的类型假设,上述拓展优势关系对于不同元素具有相同属性未知值的比较还存在不确定性,即简单地认为不同元素的属性未知值是相等的,而事实上这些属性未知值相等的可能性很小。针对以上粗糙决策分析模型的这两个方面的缺陷,以下提出基于限制优势关系的粗糙决策分析模型。

3 基于限制优势关系的粗糙决策分析模型

3.1 限制优势关系

定义 4 给定决策系统 $S = 《U,A,V,f》$,集合 $P \subseteq A$, P 上的限制优势关系 $LD(P)$ 定义为:

$$LD(P) = \{(x,y) \in U \times U \mid \forall q \in P,\ f(x,q) \geq f(y,q)) \vee (f(x,q) = \max V_q \wedge f(y,q) = *) \vee (f(x,q) = * \wedge f(y,q) = \min V_q)\} \cup I_U \quad (3)$$

其中,$\max V_q = \{v \in V_q \mid \forall v' \in V_q,\ v \geq v'\}$, $\min V_q = \{v \in V_q \mid \forall v' \in V_q,\ v \leq v'\}$, $I_U = \{(x,x) \mid x \in U\}$ 为恒等关系。此时称“y 限制优势于 x”,简记为 $yD_P^{LD}x$。

限制优势关系合理利用了优势关系中属性值具有偏好次序的特性,对扩展优势关系中的属性未知值“$*$”与属性已知值的比较进行了有效的约束,即当属性已知值为最劣值时才认为属性未知值“$*$”优于该已知值,或者当属性已知值为最优值时才认为属性未知值“$*$”劣于该已知值。此外,限制优势关系还避免了两个属性值同为未知值时的不确定比较,是不完备信息条件下的“确定”优势关系。由定义 4 可以看出,限制优势关系避免了上一节中提出的,由广义扩展优势关系等引起的将属于同一决策类的对象判为不同决策类的误判。这种拓展的优势关系对于信息不完全的样本对象的分类更加符合实际,从而降低了模型的分类误差率,由此提取的决策规则的可信度也就更高。

由定义 4,可得到限制优势关系的如下性质:

性质 1 限制优势关系满足自反性和传递性,但不一定满足对称性。

性质 2 $\forall x,y \in U$,若 $xD_P^{LD}y$ 并且 $yD_P^{LD}x$,则

对 $\forall q \in P$ 有 $f(x,q) = f(y,q)$。

由于属性未知值“ * ”的存在,扩展优势关系 D_P^E(广义扩展优势关系 D_P^λ) 不满足传递性,由 $xD_P^E y(xD_P^\lambda y)$ 并且 $yD_P^E x(yD_P^\lambda x)$ 也不能得出性质2的结果。性质1及性质2说明限制优势关系弥补了扩展优势关系(广义扩展优势关系)的上述不足。

定义5 对于 $P \subseteq A$, $x \in U$, $D_P^{+LD}(x) = \{y \in U \mid yD_P^{LD}x\}$ 称为 P 限制优势集, $D_P^{-LD}(x) = \{y \in U \mid xD_P^{LD}y\}$ 称为 P 限制劣势集。

定理1　给定决策系统 $S = 《U,A,V,f》$ 与集合 $P \subseteq A$, $X \subseteq U$, 在限制优势关系下有:

$$\bigcup_{x \in X} D_P^{+LD}(x) = \{x \in U \mid D_P^{-LD}(x) \cap X \neq \Phi\} \tag{4}$$

证明　$\forall y \in \bigcup_{x \in X} D_P^{+LD}(x)$,则 $\exists z \in X$,使得 $y \in D_P^{+LD}(z)$ 从而有 $z \in D_P^{-LD}(y)$, 因此有 $z \in (D_P^{-LD}(y) \cap X)$。由此可得 $y \in \{x \in U \mid D_P^{-LD}(x) \cap X \neq \Phi\}$, 即:

$$\bigcup_{x \in X} D_P^{+LD}(x) \subseteq \{x \in U \mid D_P^{-LD}(x) \cap X \neq \Phi\} \tag{5}$$

另一方面, $\forall y \in \{x \in U \mid D_P^{-LD}(x) \cap X \neq \Phi\}$, 由于 $D_P^{-LD}(x) \cap X \neq \Phi$, 则 $\exists z \in (D_P^{-LD}(y) \cap X)$, 从而有 $z \in X$ 且 $z \in D_P^{-LD}(y)$, 因此有 $y \in D_P^{+LD}(z)$。由此可得 $y \in \bigcup_{x \in X} D_P^{+LD}(x)$, 即:

$$\{x \in U \mid D_P^{-LD}(x) \cap X \neq \Phi\} \subseteq \bigcup_{x \in X} D_P^{+LD}(x) \tag{6}$$

综合式(5)与式(6)可得:

$\bigcup_{x \in X} D_P^{+LD}(x) = \{x \in U \mid D_P^{-LD}(x) \cap X \neq \Phi\}$。证毕。

定理2　给定决策系统 $S = 《U,A,V,f》$ 与集合 $P \subseteq A$, $X \subseteq U$, 在限制优势关系下有:

$$\bigcup_{x \in X} D_P^{-LD}(x) = \{x \in U \mid D_P^{+LD}(x) \cap X \neq \Phi\} \tag{7}$$

证明类似于定理1的证明。在此略去。

定理1和定理2表明了 P 限制优势集与 P 限制劣势集之间的关系。

3.2　基于限制优势关系的粗糙近似

定义6　对于 $P \subseteq A$, $x \in U$, $Cl_t^{\geq}$, $Cl_t^{\leq} \subseteq U$, $t = 1,2,\cdots,n$,在限制优势关系下, $Cl_t^{\geq}$,和 $Cl_t^{\leq}$ 的粗糙近似分别定义为:

$$\underline{P}(Cl_t^{\geq})^{LD} = \{x \in U_P^* \mid D_P^{+LD}(x) \subseteq Cl_t^{\geq}\} \tag{8}$$

$$\overline{P}(Cl_t^{\geq})^{LD} = \{x \in U_P^* \mid D_P^{-LD}(x) \cap Cl_t^{\geq} \neq \Phi\} \tag{9}$$

$$Bnp(Cl_t^{\geq})^{LD} = \overline{P}(Cl_t^{\geq})^{LD} - \underline{P}(Cl_t^{\geq})^{LD} \tag{10}$$

$$\underline{P}(Cl_t^{\leq})^{LD} = \{x \in U_P^* \mid D_P^{-LD}(x) \subseteq Cl_t^{\leq}\} \tag{11}$$

$$\overline{P}(Cl_t^{\leq})^{LD} = \{x \in U_P^* \mid D_P^{+LD}(x) \cap Cl_t^{\leq} \neq \Phi\} \tag{12}$$

$$Bnp(Cl_t^{\leq})^{LD} = \overline{P}(Cl_t^{\leq})^{LD} - \underline{P}(Cl_t^{\leq})^{LD} \tag{13}$$

这里 $U_P^* = \{x \in U \mid \exists q \in P, f(x,q) \neq *\}$, 即 U_P^* 要求其中每个对象至少有一个非空属性。

定理3　在限制优势关系下,由式(9)与式(12)表示的上近似分别和式(14)与式(15)表示的上近似相等:

$$\overline{P}(Cl_t^{\geq})^{LD} = \bigcup_{x \in Cl_t^{\geq}} D_P^{+LD}(x) \tag{14}$$

$$\overline{P}(Cl_t^{\leq})^{LD} = \bigcup_{x \in Cl_t^{\leq}} D_P^{-LD}(x) \tag{15}$$

证明　由定理1和定理2可直接得出。

定义7　对于 $P \subseteq A$, $x \in U$, $Cl_t^{\geq}$, $Cl_t^{\leq} \subseteq U$, $t = 1,2,\cdots,n$,在限制优势关系下, $Cl_t^{\geq}$,和 $Cl_t^{\leq}$ 的粗糙近似的分类精度分别定义为:

$$\alpha_{Cl_t^{\geq}}^{LD} = \frac{|\underline{P}(Cl_t^{\geq})^{LD}|}{|\overline{P}(Cl_t^{\geq})^{LD}|} \tag{16}$$

$$\alpha_{Cl_t^{\leq}}^{LD} = \frac{|\underline{P}(Cl_t^{\leq})^{LD}|}{|\overline{P}(Cl_t^{\leq})^{LD}|} \tag{17}$$

定义8　对于 $P \subseteq A$, $x \in U$, $Cl_t^{\geq}$, $Cl_t^{\leq} \subseteq U$, $t = 1,2,\cdots,n$,在限制优势关系下, $Cl_t^{\geq}$,和 $Cl_t^{\leq}$ 的粗糙近似的分类质量定义为:

$$\gamma_P(Cl)^{LD} = \frac{|U - ((\bigcup Bnp(Cl_t^{\geq})) \cup (\bigcup Bnp(Cl_t^{\leq})))|}{|U|} \tag{18}$$

3.3　基于限制优势关系的决策规则

1)根据式(8)可以得到以下决策规则:

If $f(x,q_1) \geq r_{q_1} \wedge f(x,q_2) \geq r_{q_2} \wedge \cdots \wedge f(x,q_P) \geq r_{q_p}$ then $x \in Cl_t^{\geq}$,其中,$\{q_1,q_2,\cdots,q_P\} \subseteq C$, $\{r_{q_1},r_{q_2},\cdots,r_{q_p}\} \in V_{q_1} \times V_{q_2} \times \cdots \times V_{q_p}$, $t \in \{1,2,\cdots,n\}$。

2)根据式(11)可以得到以下决策规则:

If $f(x,q_1) \leq r_{q_1} \wedge f(x,q_2) \leq r_{q_2} \wedge \cdots \wedge f(x,q_P) \leq r_{q_p}$ then $x \in Cl_t^{\leq}$,其中,$\{q_1,q_2,\cdots,q_P\} \subseteq C$, $\{r_{q_1},r_{q_2},\cdots,r_{q_p}\} \in V_{q_1} \times V_{q_2} \times \cdots \times V_{q_p}$, $t \in \{1,2,\cdots,n\}$。

4　与基于扩展优势关系的粗糙决策分析模型的对比

4.1　拓展优势关系的对比

定理4　给定决策系统 $S = 《U,A,V,f》$ 与

集合 $P \subseteq A, Cl_t^{\geq} \subseteq U$, 则有:

$$\overline{P}(Cl_t^{\geq})^E \subseteq \overline{P}(Cl_t^{\geq})^{LD} \quad (19)$$

$$\overline{P}(Cl_t^{\geq})^{LD} \subseteq \overline{P}(Cl_t^{\geq})^E \quad (20)$$

证明 1) 因为对于 $\forall x, y \in U$, 由定义 2 及定义 4 有 $yD_P^{LD}x \Rightarrow yD_P^E x$, 而 $D_P^{+LD}(x) = \{y \in U \mid yD_P^{LD}x\}$, $D_P^{+E}(x) = \{y \in U \mid yD_P^E x\}$, 从而有 $y \in D_P^{+LD}(x) \Rightarrow y \in D_P^{+S}(x)$。但是当 $y \in D_P^{+E}(x)$ 时, 由定义 4 可知 $y \in D_P^{+LD}(x)$ 未必成立, 所以有 $D_P^{+LD}(x) \subseteq D_P^{+E}(x)$; 又因为

$$\overline{P}(Cl_t^{\geq})^{LD} = \{x \in U_P^* \mid D_P^{+LD}(x) \subseteq Cl_t^{\geq}\},$$

$$\overline{P}(Cl_t^{\geq})^E = \{x \in U_P^* \mid D_P^{+E}(x) \subseteq Cl_t^{\geq}\},$$

从而对于 $\forall x \in U$, 有 $x \in \overline{P}(Cl_t^{\geq})^E \Rightarrow D_P^{+E}(x) \subseteq Cl_t^{\geq} \Rightarrow D_P^{+LD}(x) \subseteq Cl_t^{\geq} \Rightarrow x \in \overline{P}(Cl_t^{\geq})^{LD}$。但是当 $x \in \overline{P}(Cl_t^{\geq})^{LD}$ 时, 未必有 $x \in \overline{P}(Cl_t^{\geq})^E$, 所以有 $\overline{P}(Cl_t^{\geq})^E \subseteq \overline{P}(Cl_t^{\geq})^{LD}$。

2) 因为 $\overline{P}(Cl_t^{\geq})^{LD} = \bigcup_{x \in Cl_t^{\geq}} D_P^{+LD}(x)$, $\overline{P}(Cl_t^{\geq})^E = \bigcup_{x \in Cl_t^{\geq}} D_P^{+E}(x)$, 再由 1) 的证明可知 $D_P^{+LD}(x) \subseteq D_P^{+E}(x)$, 所以对于 $\forall x \in U$, 有 $x \in \bigcup_{x \in Cl_t^{\geq}} D_P^{+LD}(x) \Rightarrow x \in \bigcup_{x \in Cl_t^{\geq}} D_P^{+E}(x)$。但是当 $x \in \bigcup_{x \in Cl_t^{\geq}} D_P^{+E}(x)$ 时, 未必有 $x \in \bigcup_{x \in Cl_t^{\geq}} D_P^{+LD}(x)$, 所以有 $\overline{P}(Cl_t^{\geq})^{LD} \subseteq \overline{P}(Cl_t^{\geq})^E$。

综合 1)、2) 可知命题成立。证毕。

定理 5 给定决策系统 $S = <U, A, V, f>$ 与集合 $P \subseteq A, Cl_t^{\leq} \subseteq U$, 则有:

$$\overline{P}(Cl_t^{\leq})^E \subseteq \overline{P}(Cl_t^{\leq})^{LD} \quad (21)$$

$$\overline{P}(Cl_t^{\leq})^{LD} \subseteq \overline{P}(Cl_t^{\leq})^E \quad (22)$$

证明类似于定理 4 的证明. 在此略去。

由式(10) 和式(13) 以及定理 4、定理 5 可得如下推论:

推论 1 $Bnp(Cl_t^{\geq})^{LD} \subseteq Bnp(Cl_t^{\geq})^E \quad (23)$

$$Bnp(Cl_t^{\leq})^{LD} \subseteq Bnp(Cl_t^{\leq})^E \quad (24)$$

4.2 近似分类性能的对比

定理 6 给定决策系统 $S = 《U, A, V, f》$ 与集合 $P \subseteq A, Cl_t^{\geq}, Cl_t^{\leq} \subseteq U$, 则有:

$$\alpha_{Cl_t^{\geq}}^{D} \geq \alpha_{Cl_t^{\geq}}^{E} \quad (25)$$

$$\alpha_{Cl_t^{\leq}}^{D} \geq \alpha_{Cl_t^{\leq}}^{E} \quad (26)$$

证明 由定义 7, 定理 4 和定理 5 可直接得到。

定理 6 表明, 基于限制优势关系(D_P^{LD})的粗糙决策分析模型的近似分类精度高于基于扩展优势关系(D_P^E)的粗糙决策分析模型的近似分类精度。

定理 7 给定决策系统 $S = <U, A, V, f>$ 与集合 $P \subseteq A, Cl \subseteq U$, 则有:

$$\gamma_P(Cl)^{LD} \geq \gamma_P(Cl)^E \quad (27)$$

证明 由定义 8 和推论 1 可直接得到。

定理 7 表明, 基于限制优势关系(D_P^{LD})的粗糙决策分析模型的近似分类质量高于基于扩展优势关系(D_P^E)的粗糙决策分析模型的近似分类质量。

5 应用实例

表 1 市级政府门户网站综合评价表

网站	政务公开度 c_1	在线办事效率 c_2	公众参与度 c_3	综合评价 d
x_1	优	优	良	好
x_2	良	中	良	中
x_3	优	*	良	中
x_4	中	优	中	差
x_5	中	差	中	差
x_6	良	优	中	中
x_7	*	差	良	差
x_8	优	中	中	中
x_9	良	*	中	中
x_{10}	优	良	良	中

表 1 为某省对 10 个市级政府门户网站的综合评价表。每个网站评价方案的条件属性集为 $C = \{c_1, c_2, c_3\}$, 决策属性集为 $D = \{d\}$。表中 c_1, c_2, c_3 分别表示网站的政务公开度、在线办事效率、公众参与度, d 为每个网站的综合评价。

c_1, c_2, c_3, d 均可视为偏好属性, 其中:

$V_C = \{$优, 良, 中, 差$\}$, 优 > 良 > 中 > 差,

$V_d = \{$好, 中, 差$\}$, 好 > 中 > 差,

$Cl_1 = \{x \in U_P^* \mid f(x, d) = 差\} = \{x_4, x_5, x_7\}$,

$Cl_2 = \{x \in U_P^* \mid f(x, d) = 中\} = \{x_2, x_3, x_6, x_8, x_9, x_{10}\}$,

$Cl_3 = \{x \in U_P^* \mid f(x, d) = 好\} = \{x_1\}$。

利用基于扩展优势关系的粗糙决策分析模型计算结果如下:

$D_P^{+E}(x_1) = \{x_1, x_3\}$, $D_P^{+E}(x_2) = \{x_1, x_2, x_3, x_{10}\}$, $D_P^{+E}(x_3) = \{x_1, x_3, x_{10}\}$, $D_P^{+E}(x_4) = \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_9\}$, $D_P^{+E}(x_5) = U$, $D_P^{+E}(x_6) = \{x_1, x_3, x_6, x_9\}$, $D_P^{+E}(x_7) = \{x_1, x_2, x_3, x_7, x_{10}\}$, $D_P^{+E}(x_8) = \{x_1, x_3, x_8, x_{10}\}$, $D_P^{+E}(x_9) = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, $D_P^{+E}(x_{10}) = \{x_1, x_3, x_{10}\}$;

$D_P^{-E}(x_1) = U$, $D_P^{-E}(x_2) = \{x_2, x_5, x_7, x_9\}$, $D_P^{-E}(x_3) = U$, $D_P^{-E}(x_4) = \{x_4, x_5, x_7\}$, $D_P^{-E}(x_5) = \{x_5\}$, $D_P^{-E}(x_6) = \{x_4, x_5, x_6, x_9\}$, $D_P^{-E}(x_7) = \{x_3, x_5, x_7, x_8\}$, $D_P^{-E}(x_8) = \{x_5, x_8, x_9\}$, $D_P^{-E}(x_9) =$

$\{x_4, x_5, x_6, x_9\}$, $D_P^{-E}(x_{10}) = \{x_2, x_3, x_5, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$;

$\underline{P}(Cl_1^{\leq})^E = \{x_4, x_5\}$, $\underline{P}(Cl_1^{\leq})^E = \{x_3, x_4, x_5, x_7, x_9\}$, $Bnp(Cl_1^{\leq})^E = \{x_3, x_7, x_9\}$, $\alpha^E_{Cl_1^{\leq}} = 0.4$;

$\underline{P}(Cl_2^{\leq})^E = \{x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$,

$\underline{P}(Cl_2^{\leq})^E = U$, $Bnp(Cl_2^{\leq})^E = \{x_1, x_3\}$, $\alpha^E_{Cl_2^{\leq}} = 0.8$; $\underline{P}(Cl_3^{\geq})^E = \phi$, $\overline{P}(Cl_3^{\geq})^E = \{x_1, x_3\}$, $Bnp(Cl_3^{\geq})^E = \{x_1, x_3\}$, $\alpha^E_{Cl_3^{\geq}} = 0$;

$\underline{P}(Cl_2^{\geq})^E = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_8, x_{10}\}$, $\overline{P}(Cl_2^{\geq})^E = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, $Bnp(Cl_2^{\geq})^E = \{x_7, x_9\}$, $\alpha^E_{Cl_2^{\geq}} = 0.75$, $\gamma_P(Cl)^E = 0.6$。

上述的结果显然太宽松,例如,对于对象 x_1 与 x_3, $x_1 \neq x_3$, 既有 $x_1 D_P^E x_3$, 又有 $x_3 D_P^E x_1$, 显然与事实不符. 这是由于 x_1 的第二个属性值 $f(x_1, c_2) =$ 优, 是 V_{c_2} 中最优的值, 而 $f(x_3, c_2) = *$, 从而 $x_3 D_P^E x_1$ 成立的可能很小. 对象 x_3 与 x_7、x_4 与 x_9、x_6 与 x_9、x_7 与 x_9 等之间也存在同样的情况.

利用基于限制优势关系的粗糙决策分析模型计算结果如下:

$D_P^{+LD}(x_1) = \{x_1\}$, $D_P^{+LD}(x_2) = \{x_1, x_2, x_{10}\}$, $D_P^{+LD}(x_3) = \{x_1, x_3\}$, $D_P^{+LD}(x_4) = \{x_1, x_4, x_6\}$, $D_P^{+LD}(x_5) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10}\}$, $D_P^{+LD}(x_6) = \{x_1, x_6\}$, $D_P^{+LD}(x_7) = \{x_1, x_3, x_7, x_{10}\}$, $D_P^{+LD}(x_8) = \{x_1, x_8, x_{10}\}$, $D_P^{+LD}(x_9) = \{x_1, x_6, x_9\}$, $D_P^{+LD}(x_{10}) = \{x_1, x_{10}\}$; $D_P^{-LD}(x_1) = U$, $D_P^{-LD}(x_2) = \{x_2, x_5\}$, $D_P^{-LD}(x_3) = \{x_3, x_5, x_7\}$, $D_P^{-LD}(x_4) = \{x_4, x_5\}$, $D_P^{-LD}(x_5) = \{x_5\}$, $D_P^{-LD}(x_6) = \{x_4, x_5, x_6, x_9\}$, $D_P^{-LD}(x_7) = \{x_7\}$, $D_P^{-LD}(x_8) = \{x_5, x_8\}$, $D_P^{-LD}(x_9) = \{x_5, x_9\}$, $D_P^{-LD}(x_{10}) = \{x_2, x_5, x_7, x_8, x_{10}\}$;

$\underline{P}(Cl_1^{\leq})^{LD} = \{x_4, x_5, x_7\}$, $\underline{P}(Cl_1^{\leq})^{LD} = \{x_4, x_5, x_7\}$, $Bnp(Cl_1^{\leq})^{LD} = \phi$, $\alpha^{LD}_{Cl_1^{\leq}} = 1$;

$\underline{P}(Cl_2^{\leq})^{LD} = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, $\overline{P}(Cl_2^{\leq})^{LD} = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, $Bnp(Cl_2^{\leq})^{LD} = \phi$, $\alpha^{LD}_{Cl_2^{\leq}} = 1$;

$\underline{P}(Cl_3^{\geq})^{LD} = \{x_1\}$, $\overline{P}(Cl_3^{\geq})^{LD} = \{x_1\}$, $Bnp(Cl_3^{\geq})^{LD} = \phi$, $\alpha^{LD}_{Cl_3^{\geq}} = 1$;

$\underline{P}(Cl_2^{\geq})^{LD} = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_8, x_9, x_{10}\}$,

$\overline{P}(Cl_2^{\geq})^{LD} = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_8, x_9, x_{10}\}$,

$Bnp(Cl_2^{\geq})^{LD} = \phi$, $\alpha^{LD}_{Cl_2^{\geq}} = 1$, $\gamma_P(Cl)^{LD} = 1$。

由上述计算结果可知:

$\overline{P}(Cl_2^{\geq})^E \subseteq \overline{P}(Cl_2^{\geq})^{LD}$, $\overline{P}(Cl_3^{\geq})^E \subseteq \overline{P}(Cl_3^{\geq})^{LD}$, $\overline{P}(Cl_2^{\geq})^{LD} \subseteq \overline{P}(Cl_2^{\geq})^E$, $\overline{P}(Cl_3^{\geq})^{LD} \subseteq \overline{P}(Cl_3^{\geq})^E$, $\overline{P}(Cl_1^{\leq})^E \subseteq \overline{P}(Cl_1^{\leq})^{LD}$, $\overline{P}(Cl_2^{\leq})^E \subseteq \overline{P}(Cl_2^{\leq})^{LD}$, $\overline{P}(Cl_1^{\leq})^{LD} \subseteq \overline{P}(Cl_1^{\leq})^E$, $\overline{P}(Cl_2^{\leq})^{LD} \subseteq \overline{P}(Cl_2^{\leq})^E$,

并且 $\alpha^{LD}_{Cl_2^{\geq}} \geq \alpha^E_{Cl_2^{\geq}}$, $\alpha^{LD}_{Cl_3^{\geq}} \geq \alpha^E_{Cl_3^{\geq}}$, $\alpha^{LD}_{Cl_1^{\leq}} \geq \alpha^E_{Cl_1^{\leq}}$, $\alpha^{LD}_{Cl_2^{\leq}} \geq \alpha^E_{Cl_2^{\leq}}$,

$\gamma_P(Cl)^{LD} \geq \gamma_P(Cl)^E$。

以上结果验证了定理 1～定理 7 的正确性。

经计算,系统的最小条件属性约简为 $\{c_1, c_2, c_3\}$, 由此获得的决策规则如表 2 所示:

表 2　由约简 $\{c_1, c_2, c_3\}$ 构造的偏好决策规则集

规则	支持数	置信度
$c_1 =$ 优 $\wedge c_2 =$ 优 $\wedge c_3 \geq$ 良 —— $d \in Cl_3$	1	100 %
$c_1 \geq$ 良 $\wedge c_2 \geq$ 中 $\wedge c_3 \geq$ 中 —— $d \in Cl_2^{\geq}$	5	100 %
$c_1 \geq$ 良 $\wedge c_2 = *$ $\wedge c_3 \geq$ 中 —— $d \in Cl_2^{\geq}$	2	100 %
$c_1 \leq$ 中 $\wedge c_3 \leq$ 中 —— $d \in Cl_1$	2	100 %
$c_1 = *$ $\wedge c_2 =$ 差 $\wedge c_3 \leq$ 良 —— $d \in Cl_1$	1	100 %

也就是说:

1) 若网站的政务公开度为优,并且在线办事效率为优,并且公众参与度至少为良,则网站的综合评价为好;

2) 若网站的政务公开度至少为良,并且在线办事效率至少为中或未知,并且公众参与度至少为中,则网站的综合评价至少为中;

3) 若网站的政务公开度至多为中,并且在线办事效率至多为中,则网站的综合评价为差;

4) 若网站的政务公开度为未知,并且在线办事效率为差,并且公众参与度至多为良,则网站的综合评价为差。

6　结语

本文利用优势关系中属性值具有偏好次序的特性,提出的限制优势关系继承了扩展优势关系的优点,并对扩展优势关系中的属性未知值“ * ”与属性已知值的比较以及不同元素属性未知值之间的比较进行了有效的限制与约束,在一定程度上弥补了扩展优势关系的缺陷。这种方法对于信息不完全的样本对象的分类更加符合实际,从而降低了原模型的分类误差率,由此能获取可信度更高的决策规则。理论分析与实践结果均表明基于限制优势关系的粗糙决策模型优于基于扩展优势关系的粗糙决策分析模型,这为解决不完全信息下偏好多属性决策问题提供了一种有效的途径。

参考文献:

[1] Greco, S., Matarazzo, B., Slowinski, R.. Rough sets theory for multicriteria decision analysis [J]. European Journal of Operational Research, 2001, 129(1): 1 - 47.

[2] Greco, S., Matarazzo, B., Slowinski, R.. Generalizing rough set theory through dominance-based rough set approach [C]. 10th International Conference on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular Computing, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005: 1 - 11.

[3] Greco, S., Matarazzo, B., Slowinski, R.. Dominance-based rough set approach to case-based reasoning [C]. 3th Intemational Conference on Modeling Decisions for Artificial Intelligence, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006: 7 - 18.

[4] 王国胤. 粗糙集理论在不完备信息系统中的扩充[J]. 计算机研究与发展, 2002, 39(10): 1238 - 1243.

[5] 黄兵, 周献中. 不完备信息系统中基于联系度的粗集模型拓展[J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(1): 88 - 92.

[6] 何亚群, 胡寿松. 不完全信息的多属性粗糙决策分析方法[J]. 系统工程学报, 2004, 19(2): 117 - 120.

[7] Shao M. W., Zhang, W. X.. Dominance relation and rules in an incomplete ordered information system [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2005, 20: 13 - 27.

[8] 胡明礼, 刘思峰. 基于有限扩展优势关系的粗糙决策分析方法[J]. 系统工程, 2006, 24(4): 106 - 110.

[9] 胡明礼, 刘思峰. 基于广义扩展优势关系的粗糙决策分析方法[J]. 控制与决策, 2007, 22(12): 1347 - 1351.

[10] Yang, X.B., Yang, J. Y., Wu, C., et al. Dominance-based rough set approach and knowledge reductions in incomplete ordered information system[J]. Information Sciences, 2008, 178: 1219 - 1234.

[11] 王国胤. 粗糙集理论与知识获取[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.

[12] 张文修, 仇国芳. 基于粗糙集的不确定决策[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.

[13] Greco, S., Inuiguchi, M., Slowinski, R. Fuzzy rough setsand multiple-premise gradual decision rules [J]. International Janrual of Approximate Reasoning, 2006, 41(2): 179 - 211.

Rough Analysis Model of Multi-attribute Decision Making Based on Limited Dominance Relation

LUO Gong-zhi, YANG Xiao-jiang, LIU Si-feng

(School of Economic and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: A decision analysis model based on extension of rough sets is proposed for multi-attribute decision making problems with preference and incomplete information. Firstly, the concept of limited dominance relatio is presented. Then, the rough approximations of knowledge are obtained based on limited dominance relation and decision rules of classification are acquired. Compared with the extended dominance relations, the limited dominance relation takes into account the differences between different incomplete information. Finally, an example shows the feasibility and effectiveness of the proposed model.

Key words: multi-attribute decision making; incomplete information; rough sets; limited dominance relation