

doi:10.3969/j.issn.1001-2400.2013.01.026

一种不等式状态约束最优滤波算法

吴鑫辉, 黄高明, 高俊

(海军工程大学 电子工程学院, 湖北 武汉 430033)

摘要: 针对非线性系统中较难处理的不等式状态约束滤波问题, 提出了一种新的约束无迹卡尔曼滤波算法. 该算法利用最大似然法则推导出滤波均方误差函数, 将不等式约束条件转化为惩罚函数加入到误差函数中, 使用自适应步长法快速搜索最优解. 通过理论分析, 证明了约束滤波解是误差函数的严格局部最小值, 具有最小滤波均方误差. 对具有航路约束的电子导航模型进行了仿真, 结果表明, 该算法具有较高的跟踪精度.

关键词: 目标跟踪; 不等式状态约束; 无迹卡尔曼滤波器; 约束无迹卡尔曼滤波器

中图分类号: TN97 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-2400(2013)01-0148-07

Approach for optimal filtering of the nonlinear system with inequality constraints

WU Xinhui, HUANG Gaoming, GAO Jun

(College of Electronic Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

Abstract: According to state estimation for the nonlinear system with intractable inequality constraints, a novel constrained unscented kalman filter (CUKF) is proposed. The objective function is derived by using the maximum probability method, inequality constraints are treated skillfully as a penalty function, and the optimum constrained solution can be solved iteratively using the adaptively step length method. Through theoretical analyses, the constrained solution is the rigorous local minimizer of the objective function. A target tracking example based on digital navigation is presented to illustrate the efficacy of the CUKF. Simulation results show that the CUKF has a better filtering accuracy.

Key Words: target tracking; inequality state constraints; unscented kalman filter (UKF); constrained unscented kalman filter (CUKF)

卡尔曼滤波是一种高效的递归滤波器, 具有精度高和适于编程等优点, 在信号处理、通信和控制等领域得到了广泛的应用. 在实际应用中, 系统的状态估计过程常常存在着许多约束条件, 如电子导航中航路限制、数字地图的道路约束、钟摆运动的能量恒定等. 将这些约束条件应用到卡尔曼滤波器中, 能有效提高估计精度, 并且可避免滤波发散等问题. 因此, 对具有状态约束的卡尔曼滤波研究具有重要的意义^[1-3].

近年来, 约束滤波的成果主要集中于等式约束方面, 不等式约束滤波的研究并不成熟, 仍处于探索阶段. 对于等式约束滤波问题, 人们已经提出了许多算法, 如水平滑动估计 (Moving Horizon Estimation, MHE) 算法^[4]、投影修正状态法^[3]、平滑约束卡尔曼滤波 (Smoothly Constrained Kalman Filter, SCKF) 算法^[5]等. 然而, 在实际应用中, 由于各状态向量都具有随机性, 所以状态约束往往不是简单的等式形式, 而是一种不等式形式的相互约束关系. 由于不等式约束求解过程的复杂度远大于等式约束, 现有的研究成果较少, 主要有: (1) 积极集法^[3]: 通过先验等式约束条件对不满足不等式约束的估计值进行近似约束, 放宽了约束条件, 约束效果受到了影响; (2) 概率密度截断方法^[6]: 将不等式约束转化为概率密度函数的约束, 其计算量随状态维

收稿日期: 2011-09-19

网络出版时间: 2012-09-25

基金项目: 国家高技术研究发展计划 (863) 资助课题 (2010AA7010422); 国家自然科学基金资助项目 (60901069); 中国博士后科学基金资助项目 (20080431379, 200902671)

作者简介: 吴鑫辉 (1986-), 男, 海军工程大学博士研究生, E-mail: wuxinhui009@163.com.

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1076.TN.20120925.1056.201301.187.026.html>

数增加而迅速增大;(3)模糊逼近法^[7]:将不等式约束近似为一种带有模糊的额外噪声测量值,但其不用于随时间变化的约束条件.为了充分地利用各约束条件,笔者引入惩罚函数法的思想,将不等式状态约束条件转换为惩罚函数,使用一个步进因子来自适应调整步长值,迭代搜索出极小化滤波误差函数的约束滤波解,最后证明了约束误差函数是一个凹函数,所得约束解为该函数的严格局部最小值.算法具有以下优点:(1)算法核心为求一个无约束代价函数极小值,其计算量是相对固定的,不会随状态向量维数和不等式约束条件的增加而快速增大;(2)在每次迭代过程中,算法都给出了沿代价函数梯度下降方向的迭代值,故只需很少迭代次数就能迅速达到局部最小点;(3)该算法对等式和不等式约束条件都适用.

1 不等式约束滤波误差函数的推导

离散系统的状态方程和观测方程表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \end{cases}, \quad (1)$$

其中, $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 分别为非线性的状态转移函数和测量函数, \mathbf{w}_k 和 \mathbf{v}_k 分别为状态噪声和测量噪声,且都为高斯白噪声,其协方差为 $E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T] = \delta_{kj} \mathbf{Q}_k$, $E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T] = \delta_{kj} \mathbf{R}_k$, $E[\mathbf{v}_k \mathbf{w}_j^T] = 0$. 假定状态向量 \mathbf{x}_k 存在以下约束条件:

$$s(\mathbf{x}_k) \leq 0, \quad g(\mathbf{x}_k) = 0, \quad (2)$$

其中, $s(\mathbf{x}_k)$ 为不等式约束函数, $g(\mathbf{x}_k)$ 为等式约束函数. 约束滤波问题,即为在式(2)的约束条件下,对式(1)中非线性系统的各个状态进行估计.

卡尔曼滤波器本质上是能使滤波均方误差最小的状态估计器,亦等同于最大化状态转移概率 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$. 在有额外的状态约束条件下,可以利用最大似然法则对转移概率作进一步约束. 由于式(1)中各变量都满足高斯分布,根据贝叶斯递推公式,可得状态转移概率 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$ 为^[4]

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k) = N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_k) = (2\pi)^{n/2} |\mathbf{P}_k|^{-1/2} \exp\{- (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{P}_k^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) / 2\}, \quad (3)$$

其中, $N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_k)$ 代表高斯分布,其自变量为 \mathbf{x}_k , 均值为 $\hat{\mathbf{x}}_k$, 方差为 \mathbf{P}_k . n 为状态 \mathbf{x}_k 的维数, \mathbf{x}_k 为 k 时刻状态实际值, $\mathbf{Y}_k = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\}$ 为前 k 个时刻的测量值, $\hat{\mathbf{x}}_k$ 为 k 时刻的卡尔曼滤波值, \mathbf{P}_k 为 k 时刻的卡尔曼估计误差方差.

约束卡尔曼滤波就是利用状态约束条件对滤波误差函数进行最小化约束,从而提高卡尔曼滤波的精度. 因为最大化概率 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$ 等价于最大化其自然对数,假定状态向量满足等式和不等式约束条件 $s(\mathbf{x}_k) \leq 0$, $g(\mathbf{x}_k) = 0$, 从而得到约束滤波均方误差函数为

$$\begin{cases} \max \ln P(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k) \Rightarrow \min (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{P}_k^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) \\ \text{s. t. } s(\mathbf{x}_k) \leq 0, g(\mathbf{x}_k) = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

由于式(1)中状态和测量函数都是非线性的,为了避免非线性带来的误差,可以采用无迹卡尔曼滤波器(UKF)算法对系统状态进行估计. UKF 采用一系列 Sigma 点来近似非线性函数概率密度分布,它比基于非线性函数局部线性化近似的扩展卡尔曼滤波(Extended Kalman Filter, EKF)算法的滤波精度要高^[2].

2 不等式约束滤波最优值求解

对于仅具有等式约束的非线性估计,一般采用拉格朗日乘子法,应用极小值的一阶必要条件,得到约束最优解^[3,5-6]. 然而在实际中,如果同时存在等式和不等式状态约束,拉格朗日乘子法则不再适用. 因此,需要寻找一种新的方法对非线性滤波进行有效约束.

对于不等式约束的优化问题可采用惩罚函数法,其基本思想是在可行域的边界筑起一道很高的“围墙”作为障碍,当迭代值接近边界时,不等式约束的增广目标函数趋近增大,从而迫使迭代点在可行域内寻找最优解^[8-10].

假设约束函数 $s(\mathbf{x})$ 和 $g(\mathbf{x})$ 都为线性的,且 $s(\mathbf{x}) = D\mathbf{x} \leq 0$. 可以引入一个松弛向量 $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$, 使不等式约束变成等式约束,其中 m 值为不等式约束个数. 那么式(4)可表示为

$$\begin{cases} \max \ln P(\mathbf{x} | \mathbf{Y}) \Rightarrow \min(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) , \\ \text{s. t. } \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{q} = \mathbf{0} , \quad \mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{0} . \end{cases} \quad (5)$$

由式(5)构造出增广目标函数为

$$\mathbf{L} = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{q}) + \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{H}\mathbf{x} - \mu \sum_{k=1}^m \ln q_k . \quad (6)$$

增广目标函数右边第 4 项即为惩罚函数,其中惩罚因子 $\mu > 0$, q_k 为松弛向量 \mathbf{q} 中第 k 个向量. 当迭代值趋近可行域边界时,松弛向量 \mathbf{q} 中至少有一项趋近于零,所以惩罚函数 $-\mu \sum_{k=1}^m \ln q_k$ 将迅速增大,从而迫使迭代值在可行域内寻找最小值. 根据 Karush-Kuhn-Tucker(KKT)最小化的一阶必要条件^[8],式(6)可得到下列各式:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{L} = \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{q} = s(\mathbf{x}) + \mathbf{q} = \mathbf{0} , \quad (7a)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathbf{L} = \boldsymbol{\lambda} - \mu \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{e} = \mathbf{0} , \quad (7b)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{L} = \mathbf{H}\mathbf{x} = g(\mathbf{x}) = \mathbf{0} , \quad (7c)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{L} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{D}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{H}^T \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} , \quad (7d)$$

其中, $\mathbf{Q} = \text{diag}(q_1, \dots, q_m)$, $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$, 式(7)中可使用高斯牛顿法解出. 那么各约束函数在迭代点 $(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\rho}^k)$ 的一阶近似为

$$s(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}^k) + \mathbf{D}\Delta\mathbf{x} , \quad (8a)$$

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}^k) + \mathbf{H}\Delta\mathbf{x} , \quad (8b)$$

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{e} \approx (\mathbf{Q}^k)^{-1} \mathbf{e} - (\mathbf{Q}^k)^{-2} \Delta\mathbf{q} , \quad (8c)$$

$$\boldsymbol{\lambda} \approx \boldsymbol{\lambda}^k + \Delta\boldsymbol{\lambda} , \quad (8d)$$

$$\boldsymbol{\rho} \approx \boldsymbol{\rho}^k + \Delta\boldsymbol{\rho} , \quad (8e)$$

其中,上标 k 代表第 k 次迭代.

方程组(8)中 $\Delta\mathbf{x}$, $\Delta\mathbf{q}$, $\Delta\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\Delta\boldsymbol{\rho}$ 为每次迭代的步进值. 将式(8c), (8d)代入式(7b),可得

$$\frac{1}{\mu} \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{e} \approx \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{\lambda}^k + \Delta\boldsymbol{\lambda}) - (\mathbf{Q}^k)^{-1} \mathbf{e} + (\mathbf{Q}^k)^{-2} \Delta\mathbf{q} = \mathbf{0} . \quad (9)$$

为消去式(9)中的 $\Delta\mathbf{q}$, 由式(7a),可得

$$\mathbf{D}\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{q} = \mathbf{0} \Rightarrow \Delta\mathbf{q} = -\mathbf{D}\Delta\mathbf{x} , \quad (10)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{x}^k + \mathbf{q}^k = s(\mathbf{x}^k) + \mathbf{q}^k = \mathbf{0} \Rightarrow -s(\mathbf{x}^k) = \mathbf{q}^k = \mathbf{Q}^k \mathbf{e} . \quad (11)$$

将式(10)和(11)代入式(9)中,令 $\boldsymbol{\lambda}_{\text{old}}^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}^k + \Delta\boldsymbol{\lambda}$, 消去 $\Delta\mathbf{q}$ 和 \mathbf{q}^k , 可得

$$(\mathbf{Q}^k)^2 (\boldsymbol{\lambda}^k + \Delta\boldsymbol{\lambda}) / \mu - \mathbf{D}\Delta\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}_{\text{old}}^{k+1} (\mathbf{Q}^k)^2 / \mu - \mathbf{D}\Delta\mathbf{x} = -s(\mathbf{x}^k) . \quad (12)$$

将式(7c)代入式(8b),可得

$$\mathbf{H}\Delta\mathbf{x} + g(\mathbf{x}^k) = \mathbf{0} . \quad (13)$$

将式(8d)和(8e)代入式(7d),由于估计误差很小,可近似为步进值 $\Delta\mathbf{x}$, 那么,该式可变换为

$$\mathbf{P}^{-1} \Delta\mathbf{x} + \mathbf{D}^T \boldsymbol{\lambda}_{\text{old}}^{k+1} + \mathbf{H}^T \boldsymbol{\rho}_{\text{old}}^{k+1} = \mathbf{0} , \quad (14)$$

其中, $\boldsymbol{\lambda}_{\text{old}}^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}^k + \Delta\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\rho}_{\text{old}}^{k+1} = \boldsymbol{\rho}^k + \Delta\boldsymbol{\rho}$. 联立方程(12), (13), (14), 可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \\ \mathbf{D}^T & \mathbf{H}^T & \mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{\text{old}}^{k+1} \\ \boldsymbol{\rho}_{\text{old}}^{k+1} \\ \Delta\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(\mathbf{x}^k) \\ -g(\mathbf{x}^k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} , \quad (15)$$

其中, $\mathbf{B} = (-\mathbf{Q}^k)^2 / \mu$. 解矩阵方程(15), 得出解向量, 并代入迭代公式中, 得到第 $(k+1)$ 次迭代值为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \alpha \cdot \Delta\mathbf{x} , \\ \boldsymbol{\lambda}^{k+1} &= \boldsymbol{\lambda}^k + \alpha \cdot (\boldsymbol{\lambda}_{\text{old}}^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}^k) , \\ \boldsymbol{\rho}^{k+1} &= \boldsymbol{\rho}^k + \alpha \cdot (\boldsymbol{\rho}_{\text{old}}^{k+1} - \boldsymbol{\rho}^k) , \end{aligned} \quad (16)$$

其中, 步进因子 α 可以自适应地调整各步进值, 以保证 \mathbf{x}^{k+1} 收敛于可行域中, 即满足 $s(\mathbf{x}^{k+1}) \leq 0$, 文献[9]推荐该值设置为 $\alpha = \min\{q_i / \mathbf{D}\Delta\mathbf{x}\}$, 迭代的终止条件为 $\|\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{D}\mathbf{x}^k + \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{H}\mathbf{x}^k\| \leq \epsilon$, 其中 ϵ 为一个很小的门限值^[9].

综上所述, 不等式约束的非线性系统滤波算法步骤如下:

Step 1 使用 UKF 算法计算估计统计量 $\hat{\mathbf{x}}_k$, 估计误差方差 \mathbf{P}_k .

Step 2 设置初始迭代值 $\mathbf{x}^0 = \hat{\mathbf{x}}_k$, 松弛变量 $\mathbf{q}^0 = -f(\mathbf{x}^0)$, 惩罚参数 $\mu^0 = 1.0$, 终止误差 $0 < \epsilon \ll 1$, 迭代步骤 $k = 0$.

Step 3 解方程组(15). 为方便表示, 以 $\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{b}$, 代表式(15). 为减少矩阵计算量, 可对系数矩阵 \mathbf{A} 进行 LU 分解, 即令 $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$, 其中 \mathbf{L} 为一个下三角矩阵, \mathbf{U} 为一个阶梯型矩阵. 式(15) 变为 $\mathbf{L}\mathbf{U}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{b}$, 从而可使用回代法求得解向量 $\boldsymbol{\theta}$.

Step 4 更新各迭代值. 计算步进因子, 再将解向量和步进值 α 代入式(16) 中, 得到第 $(k+1)$ 步的迭代值.

Step 5 检查迭代终止条件. 若原始函数和目标函数的差值 $\|\delta\| = \|\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{D}\mathbf{x}^{k+1} + \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{H}\mathbf{x}^{k+1}\| \leq \epsilon$ 或者 $k = 20$, 则输出 \mathbf{x}^{k+1} 作为最优滤波值; 否则, 进入 Step 6.

Step 6 更新惩罚参数 $\mu = \delta / (n + m)^2$, 其中, m 为不等式个数, n 为向量 \mathbf{x} 的维数. 令 $k = k + 1$, 进入 Step 3.

3 约束函数的局部极小点证明

根据约束最优化理论, 当目标函数 $f(\mathbf{x})$ 光滑且二次连续可微分时, 通过检验梯度 $\nabla_x f(\tilde{\mathbf{x}})$ 和 Hessian 矩阵 $\nabla_x^2 f(\tilde{\mathbf{x}})$, 可得出解向量是否为目标函数的严格局部极小点. 这里通过利用最优化理论, 证明约束滤波解为滤波误差函数的局部极小点.

引理 1 若 $\nabla_x^2 f(\tilde{\mathbf{x}})$ 在 $\tilde{\mathbf{x}}$ 的开邻域内连续, 并且 $\nabla_x f(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$, $\nabla_x^2 f(\tilde{\mathbf{x}}) > 0$, 则 $f(\mathbf{x})$ 为一个凹函数, 并且 $\tilde{\mathbf{x}}$ 是函数 $f(\mathbf{x})$ 的严格局部极小点. 式中 $\nabla_x^2 f(\tilde{\mathbf{x}}) > 0$, 表示 Hessian 矩阵 $\nabla_x^2 f(\tilde{\mathbf{x}}) > 0$ 正定.

证明 由梯度 $\nabla_x f(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$, 将函数 $f(\mathbf{x})$ 作泰勒级数展开, 可得 $f(\tilde{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}) = f(\tilde{\mathbf{x}}) + (\Delta\mathbf{x})^T \nabla_x^2 f(\tilde{\mathbf{x}}) \Delta\mathbf{x}$. 又由于 Hessian 矩阵 $\nabla_x^2 f(\tilde{\mathbf{x}})$ 正定, 所以 $(\Delta\mathbf{x})^T \nabla_x^2 f(\tilde{\mathbf{x}}) \Delta\mathbf{x} > 0$. 将上式代入 $f(\tilde{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x})$, 可得 $f(\tilde{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}) > f(\tilde{\mathbf{x}})$. 根据凹函数性质, 可得 $f(\mathbf{x})$ 为一个凹函数, $\tilde{\mathbf{x}}$ 为函数 $f(\mathbf{x})$ 的严格局部极小点. 证毕.

定理 1 卡尔曼滤波的增广目标函数为凹函数, 且该函数具有严格局部最小解.

证明 考察增广目标函数式(5), $L = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{q}) + \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{H}\mathbf{x} - \mu \sum_{k=1}^m \ln q_k$, 增广目标函数的梯度 $\nabla_x L = \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{D}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{H}^T \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$, 可解得惟一稳定解 $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{P} (\mathbf{D}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{H}^T \boldsymbol{\rho})$. 进一步, 还可求出目标函数的 Hessian 矩阵为 $\nabla_x^2 L = (\mathbf{P}^{-1})^T$, 由于矩阵 \mathbf{P} 为卡尔曼滤波估计误差矩阵, 该矩阵为正定的, 因此, $\nabla_x^2 L = (\mathbf{P}^{-1})^T > \mathbf{0}$. 根据引理 1 可得, $L(\mathbf{x})$ 为一个凹函数, 且存在严格局部极小点. 证毕.

定理 2 设序列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 由惩罚函数法产生, 且每个 \mathbf{x}^k 都是无约束子问题(5) 的局部最小点, 那么增广目标函数序列 $\{L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\rho}^k)\}$ 是单调下降的, 即 $L(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}, \boldsymbol{\rho}^{k+1}) \leq L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\rho}^k)$.

证明 令 $f(\mathbf{x}^k) = (\mathbf{x}^k - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x}^k - \hat{\mathbf{x}})$, $h(\mathbf{x}^k) = \mathbf{D}\mathbf{x}^k + \mathbf{q}$, $g(\mathbf{x}^k) = \mathbf{H}\mathbf{x}^k$, 由于每次迭代的 \mathbf{x}^k 都为 $\{L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\rho}^k)\}$ 一阶必要条件所得局部最小值, 可得 $f(\mathbf{x}^{k+1}) \leq f(\mathbf{x}^k)$, $h(\mathbf{x}^{k+1}) \leq h(\mathbf{x}^k)$, $g(\mathbf{x}^{k+1}) \leq g(\mathbf{x}^k)$. 在迭代过程中, 乘子 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{\rho}$ 以及惩罚参数 μ 都随迭代次数增加而不断衰减, 当迭代至最小点时, 方程式(5) 右边后 3 项趋近于 0, 因此, $\boldsymbol{\lambda}^{k+1} \leq \boldsymbol{\lambda}^k$, $\boldsymbol{\rho}^{k+1} \leq \boldsymbol{\rho}^k$. 增广目标函数序列应满足:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}, \boldsymbol{\rho}^{k+1}) &= f(\mathbf{x}^{k+1}) + (\boldsymbol{\lambda}^{k+1})^T h(\mathbf{x}^{k+1}) + (\boldsymbol{\rho}^{k+1})^T g(\mathbf{x}^{k+1}) \leq \\ & f(\mathbf{x}^k) + (\boldsymbol{\lambda}^{k+1})^T h(\mathbf{x}^k) + (\boldsymbol{\rho}^{k+1})^T g(\mathbf{x}^k) \leq \\ & f(\mathbf{x}^k) + (\boldsymbol{\lambda}^k)^T h(\mathbf{x}^k) + (\boldsymbol{\rho}^k)^T g(\mathbf{x}^k) = L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\rho}^k) \end{aligned}$$

因此, 增广目标函数序列 $\{L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\rho}^k)\}$ 是单调下降的. 证毕.

通过以上证明可得出以下结论: (1) 卡尔曼约束目标函数为一个凹函数, 约束解为该函数的严格局部极小点. (2) 惩罚函数法中目标函数序列是单调下降的, 可使用自适应步长迭代法得到约束极小值.

4 仿真实验

以无线电导航为例, 目标的运行方向受航路约束. 假设有两个位置固定的导航传感器可以测量目标的距离, 传感器的位置坐标分别用 (r_{n1}, r_{e1}) 和 (r_{n2}, r_{e2}) 表示. 目标的状态方程和测量方程分别为

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \sin \theta \\ T \cos \theta \end{bmatrix} \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad ,$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \left((s_x - r_{n1})^2 + (s_y - r_{e1})^2 \right)^{1/2} \\ \left((s_x - r_{n2})^2 + (s_y - r_{e2})^2 \right)^{1/2} \end{bmatrix} + \mathbf{e}_k \quad ,$$

其中,状态向量 $\mathbf{x}_k = (s_x, s_y, v_x, v_y)^T$,代表目标位置及速度; \mathbf{y}_k 为传感器测量到目标的距离信息.两导航传感器坐标分别为 $(0, 0), (8700, 8000)$,目标初始状态向量和估计误差分别为 $\hat{\mathbf{x}}_0 = (0, 0, 18, 21)^T$ 和 $\mathbf{P}_0 = \text{diag}(900, 900, 4, 4)$,方程组(1)中状态和测量误差方差为 $\mathbf{Q} = \text{diag}(4, 4, 1, 1)$ 和 $\mathbf{R} = \text{diag}(900, 900)$,采样周期 $T = 3\text{ s}$,目标随机加速度为 $u = \pm 2\text{ m/s}^2$,真实前进方向 $\theta = 60^\circ$.

在无线电导航中,如果目标受已知道路的约束,其前进的方向范围 $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, θ_1 和 θ_2 代表方向上下限,仿真设置为 $\theta_1 = 55^\circ, \theta_2 = 65^\circ$,那么,目标的速度和位置状态满足不等式约束:

$$\begin{cases} \tan \theta_1 \leq s_y/s_x \leq \tan \theta_2 \quad , \\ \tan \theta_1 \leq v_y/v_x \leq \tan \theta_2 \quad . \end{cases}$$

上式可以转化为不等式约束形式 $\mathbf{D}\mathbf{x} \leq \boldsymbol{\theta}$, 其中

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \tan \theta_1 & -1 & 0 & 0 \\ -\tan \theta_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tan \theta_1 & -1 \\ 0 & 0 & -\tan \theta_2 & 1 \end{bmatrix} .$$

图 1 和图 2 为文中约束无迹卡尔曼滤波(CUKF)算法与 UKF 算法跟踪误差均方根(RMSE)的对比图,图 3 和图 4 为使用 CUKF 与文献[3]中积极集法(Active Set Methods)AUKF 的跟踪 RMSE 的对比图. AUKF 算法的原理为^[3]: 如果跟踪结果满足约束条件, AUKF 算法不约束跟踪结果;如果跟踪结果不满足约束条件,那么采用先验等式约束条件 $\mathbf{D}_m \mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}$ 对跟踪结果进行约束,其中矩阵 $\mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} -\tan \theta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tan \theta & 1 \end{bmatrix}$,其约束角近似估计为 $\theta = 60.5^\circ$.

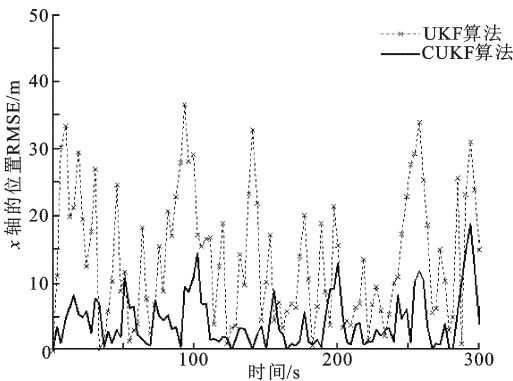


图 1 CUKF 算法和 UKF 算法中 x 轴的位置跟踪 RMSE 值对比

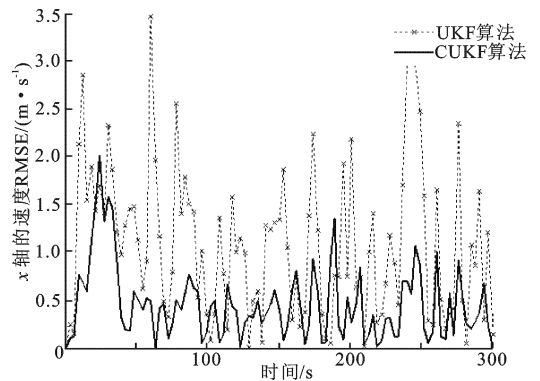


图 2 CUKF 算法和 UKF 算法中 x 轴的速度跟踪 RMSE 值对比

从图 1 到图 4 可得, CUKF 和 AUKF 算法的跟踪效果都要好于普通 UKF 算法的跟踪效果,并且 CUKF 算法的跟踪均方根误差要小于 AUKF 算法的均方根误差. AUKF 算法只对不满足约束条件的跟踪结果进行约束,因此在某些时刻跟踪效果与 UKF 算法相同; AUKF 算法的另一个缺点为需要较准确的先验等式约束条件,否则,约束滤波结果会发散. CUKF 算法不需要精确的先验条件,并且在每个时刻都能对跟踪结果进行约束,所以约束效果要好于 AUKF 算法.从图 1 和图 3 可得, UKF 算法的 x 轴的位置误差均方根为 13.08 m, AUKF 算法的误差均方根为 7.05 m,而 CUKF 算法的误差均方根约为 4.32 m,跟踪精度分别提高了 46.1% 和 66.9%.经 1000 次蒙特卡罗实验, CUKF 算法、AUKF 算法和 UKF 算法的位置、速度跟踪误差如表 1 所示.

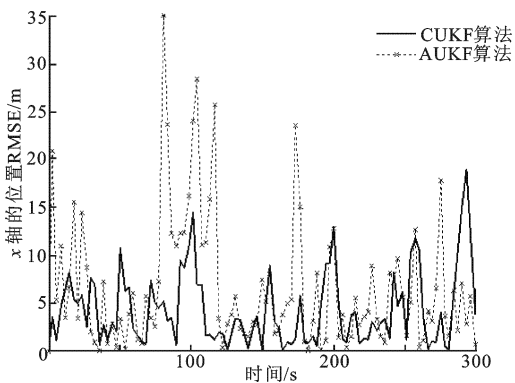


图 3 CUKF 算法和 AUKF 算法中 x 轴的位置跟踪 RMSE 值对比

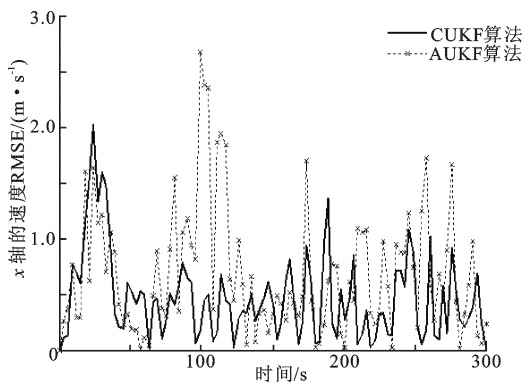


图 4 CUKF 算法和 AUKF 算法中 x 轴的速度跟踪 RMSE 值对比

表 1 各算法的目标跟踪 RMSE 值

算法	x/m	y/m	$v_x/(m \cdot s^{-1})$	$v_y/(m \cdot s^{-1})$
UKF	14.12	24.45	1.15	1.99
AUKF	7.17	12.62	0.87	1.51
CUKF	4.64	8.01	0.72	1.13

为直观地表现 CUKF 算法和 UKF 算法的跟踪精度,对 x 轴的位置跟踪误差及其置信区间进行了 1000 次蒙特卡罗实验,仿真结果如图 5 所示. x 轴位置的置信区间为位置跟踪误差加上 $\pm 3(\mathbf{P}_{(1,1),k|k}^{xx})^{1/2}$ ($\mathbf{P}_{(1,1),k|k}^{xx}$ 为 x 轴位置跟踪误差方差),可代表滤波误差范围.从图 5 中容易得出,CUKF 算法的跟踪误差和置信区间都要小于 UKF 算法的,说明其跟踪精度比 UKF 算法的要高.

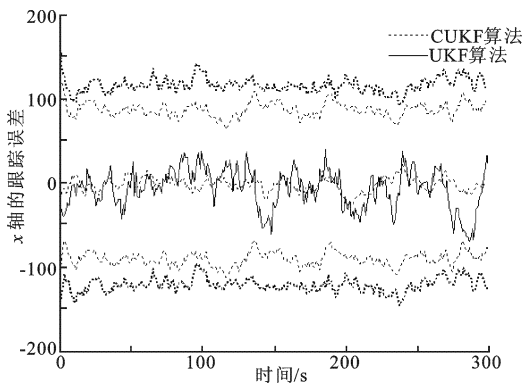


图 5 x 轴跟踪误差以及置信区间 $(\pm 3(\mathbf{P}_{(1,1),k|k}^{xx})^{1/2})$ 比较

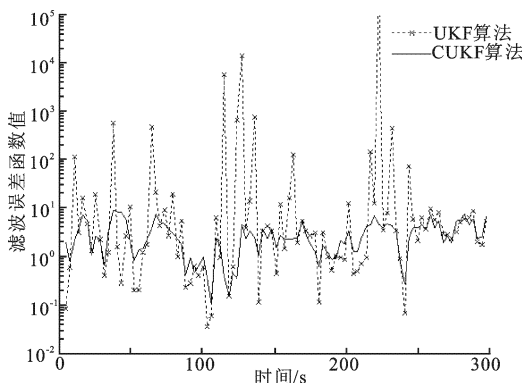


图 6 两种滤波器滤波误差函数值比较

如果利用不等式约束条件对滤波误差函数进行约束,那么滤波精度将得到提高.为比较各个时刻的 CUKF 算法与 UKF 算法的滤波误差函数值 $f(\mathbf{x}_k) = (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{P}_k^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)$,在每次更新估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 和估计误差方差 \mathbf{P}_k^{-1} 后,与真实值 \mathbf{x}_k 一起代入滤波误差函数中,计算每次所得滤波误差函数值.仿真结果如图 6 所示,对比各时刻的 CUKF 算法和 UKF 算法的跟踪滤波误差方差值,可得出以下结论:(1)CUKF 算法的平均滤波精度要高于 UKF 算法. CUKF 算法的滤波误差方差值 $f(\mathbf{x}_k)$ 受到了有效约束,其最大值不超过 10,而 UKF 算法中该值虽然有时比 CUKF 算法的小,但很多时刻该值远远大于 10.(2)UKF 算法的滤波稳定性低于 CUKF 算法的滤波稳定性. UKF 算法的误差函数值 $f(\mathbf{x}_k)$ 很不稳定,在 225 s 时该值为 CUKF 算法的 10 000 倍,因此 UKF 算法的滤波稳定性低于 CUKF 算法的滤波稳定性.

5 结束语

在滤波过程中有效利用约束条件可提高滤波精度.为了解决不等式约束滤波问题,提出了一种新的约束

无迹卡尔曼滤波算法. 该文的创新点是将在不等式状态约束条件转化为一个惩罚函数, 从而可利用最优化理论求得约束最优解, 并且给出了迭代求解的详细步骤. 算法不仅适用于等式约束, 而且对不等式约束也同样适用, 为解决约束卡尔曼滤波问题提供了一种通用的理论框架. 仿真实验表明, 算法对滤波误差函数进行了有效约束, 其位置和速度跟踪精度均高于普通无迹卡尔曼滤波器, 且稳定性更好, 是一种可行的约束滤波算法.

参考文献:

- [1] 陈金广, 李洁, 高新波. 一种收缩非线性状态约束滤波算法[J]. 西安电子科技大学学报, 2011, 38(1): 104-109.
Chen Jinguang, Li Jie, Gao Xinbo. Iterative Shrinking Filtering Algorithm with Nonlinear State Constraints [J]. Journal of Xidian University, 2011, 38(1): 104-109.
- [2] Julier S J, Uhlmann J K. A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(3): 477-482.
- [3] Simon D. Kalman Filtering with State Constraints: a Survey of Linear and Nonlinear Algorithms [J]. IET Control Theory and Applications, 2010, 4(8): 1303-1318.
- [4] Boulkroune B, Darouach M, Zasadzinski M. Moving Horizon State Estimation for Linear Discrete-time Singular Systems [J]. IET Control Theory and Applications, 2010, 4(3): 339-350.
- [5] De Geeter J, Brussel H. A Smoothly Constrained Kalman Filter [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1997, 19(10): 1171-1177.
- [6] Simon D, Chia T L. Kalman Filtering with State Equality Constraints [J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2002, 38(1): 128-136.
- [7] Vincent S, Ghaleb H, Houcine C. State Estimation under Nonlinear State Inequality Constraints: a Tracking Application [C]//16th Mediterranean Conference on Control and Automation. France: IEEE, 2008: 1669-1674.
- [8] Bonnans J, Gilbert J. Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects [M]. New York: Springer, 2000: 51-65, 353-368.
- [9] Jiang Q, Geng G C. A Reduced-space Interior Point Method for Transient Stability Constrained Optimal Power Flow [J]. IEEE Trans on Power Systems, 2010, 25(3): 1232-1240.
- [10] Simon D. Optimal State Estimation [M]. New Jersey: Wiley Interscience. 2006: 212-224.

(编辑: 齐淑娟)

(上接第 47 页)

- [5] 党德鹏, 孟真. 基于支持向量机的信息安全风险评估 [J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2010, 38(3): 46-49.
Dang Depeng, Meng Zhen. Assessment of Information Security Risk by Support Vector Machine [J]. Journal Huazhong University of Science and Technology(Natural Science Edition), 2010, 38(3): 46-49.
- [6] 高会生, 郭爱玲. 组合核函数 SVM 在网络安全风险评估中的应用 [J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(11): 123-125.
Gao Huisheng, Guo Ailing. Application of Combined Kernel SVM on Network Security Risk Evaluation [J]. Computer Engineering and Application, 2009, 45(11): 123-125.
- [7] 陆从德, 张太镒, 胡金燕. 基于乘性规则的支持向量域分类器 [J]. 计算机学报, 2004, 27(5): 690-694.
Lu Congde, Zhang Taiyi, Hu Jinyan. Support Vector Domain Classifier Based on Multiplicative Updates [J]. Chinese Journal of Computers, 2004, 27(5): 690-694.
- [8] Tax D M J, Duijn R P W. Support Vector Data Description [J]. Mach Learn, 2004, 54(1): 45-66.
- [9] 梁锦锦. 支持向量机和支支持向量域描述的若干问题研究 [D]. 西安: 西安电子科技大学, 2009.
- [10] 梁锦锦, 刘三阳, 吴德. 空间支持向量域分类器 [J]. 西安电子科技大学学报, 2008, 35(6): 1080-1083.
Liang Jinjin, Liu Sanyang, Wu De. Space Support Vector Domain Classifier [J]. Journal of Xidian University, 2008, 35(6): 1080-1083.

(编辑: 齐淑娟)