doi:10.6043/j.issn.0438-0479.2013.05.002

有限可解群的 Brauer 特征标表的一个注记

王 坚[1],曾吉文[1*],范娟娟[2]
(1.厦门大学数学科学学院,福建 厦门 361005;2.福建江夏学院经济贸易学院,福建 福州 350108)

摘要:Masahiko Miyamoto 证明了如果 A 是有限群 G 的一个初等交换的正规 q-子群,Q 是 G 的一个西罗 q-子群,那么 G 的所有不可约特征标都不会零化 $Z(Q)\cap A$. 本文将该结果推广到 Brauer 特征标上,证明了若 $x\in Z(Q)\cap O_q(G)$ 是 G 的 q 阶元素,那么 G 的所有不可约 p-Brauer 特征标都不能零化它,其中 $p\neq q$. 此外,得到对于非 p-群的有限可解群,其 Brauer 特征标表必有一非平凡的列不取零值.

关键词:可解群;Brauer 特征标;p-正则元.
中图分类号:O 152.6 **文献标志码**:A **文章编号**:0438-0479(2013)05-0590-02

1 预备知识

设 G 为一个有限群. $x\in G$ 被称为 G 的非零化元,如果 G 的所有不可约特征标都不能零化它. 这个概念是由 Isaacs 等在文献[1]中引入的. 他们证明了如果 G 是可解群,那么非零化元在 $G/F(G)$ 中的像是 2-元素. 他们猜想有限可解群的所有非零化元都在它的 Fitting 子群 $F(G)$ 里. 在文献[2]里,这一猜想被称为 Isaacs-Navarro-Wolf 猜想. 在文献[3]中,作者证明了如果 x 是 G 的一个非零化元并且 x 的阶与 6 互素,那么 $x\in F(G)$. 在文献[1]里,他们证明了如果 G 有一个正规的西罗 q-子群 Q,那么 $Z(Q)$ 所有的元素都是 G 的非零化元. 在文献[4]中,Masahiko Miyamoto 推广了这一结果并且证明了如果 A 是有限群 G 的一个初等交换的正规 q-子群,Q 是 G 的一个西罗 q-子群,那么 G 的所有不可约特征标都不会零化 $Z(Q)\cap A$. 关于非零化元的其它结果,可参见文献[5-7].

受文献[4]的启发,本文讨论 G 的非零化 p-正则元. 下面我们引进一些记号,G 总是指代一个有限群,p 是一个固定素数. G^0 是 p-正则元的集合,也就是 $G^0=\{g\in G\mid p\nmid o(g)\}$. $\mathrm{IBr}(G)$ 是 G 的不可约 p-Brauer 特征标的集合. 为方便起见,当素数 p 选定之后,我们将 p-Brauer 特征标简写为 Brauer 特征标. $\pi(G)$ 记为整除 G 的阶的所有素因子集合. 其他的记号,可参见文献[8].

2 主要结果

定义 $x\in G^0$ 被称为 G 的一个非零化 p-正则元,如果对任意的 $\varphi\in\mathrm{IBr}(G)$,$\varphi(x)\neq 0$.

定理 1 设 G 为一个有限群,Q 是 G 的西罗 q-子群($q\neq p$),那么 $Z(Q)\cap O_q(G)$ 中所有 q 阶元都是 G 的非零化 p-正则元.

证明 假设 $\varphi\in\mathrm{IBr}(G)$. 那么有

$$\varphi_{|Z(O_q(G))}=e(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r),$$

其中 e 是正整数,$\varphi_{|Z(O_q(G))}$ 是 φ 在 $Z(O_q(G))$ 的限制,

$$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\}\subseteq\mathrm{IBr}(Z(O_q(G)))=\mathrm{Irr}(Z(O_q(G)))$$

是 $\lambda=\lambda_1\in\mathrm{Irr}(Z(O_q(G)))$ 在 G 的共轭作用下的共轭类集合. 设 $I=\{g\in G\mid\lambda^g=\lambda\}$ 是 λ 的惯性子群,则 $|G:I|=r$.

假设命题不成立,那么存在 $Z(Q)\cap O_q(G)$ 中的 q 阶元 x,$\varphi(x)=0$. 注意到 $Z(Q)\cap O_q(G)\subseteq Z(O_q(G))$,$\deg(\lambda_j)=1$,Brauer 特征标值 $\lambda_j(x)$ 是 q 次单位元根. 取一个本原 q 次单位根 ξ. 根据文献[4]中的定理 1,集合 $\{1,\xi,\cdots,\xi^{q-1}\}$ 的任意 $q-1$ 元在有理数域 $\mathbf{Q}$ 都是线性无关的,并且

$$1+\xi+\cdots+\xi^{q-1}=0.$$

因此,$x^q-1=0$ 的所有 q 次根在表达式

收稿日期:2013-04-14
基金项目:国家自然科学青年基金(11201385);福建省自然科学基金项目(2011J01022);福建省教育厅 A 类科技项目(JA12336)
* 通信作者:jwzeng@xmu.edu.cn

$$\varphi(x)/e=\lambda_1(x)+\lambda_2(x)+\cdots+\lambda_r(x)$$

中出现的次数都是 r/q. 特别地, $r=|G:I|$ 被 q 整除. 考虑 Q 在集合

$$\{\lambda^g \mid g\in I\backslash G\}=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\}$$

上的作用. 对任意的 $g\in I\backslash G$, λ^g 的 Q-轨道的长度是

$$|Q:Q\cap I^g|=|G:Q\cap I^g|_q=(|G:I^g||I^g:Q\cap I^g|)_q=|G:I|_q|I^g:Q\cap I^g|_q,$$

它是被 $|G:I|_q$ 整除的, 其中 $|S|_q$ 指能整除 $|S|$ 的 q 的最高次幂. 此外, 因为 $x\in Z(Q)$, 我们有

$$\lambda^{gy}(x)=\lambda^g(yxy^{-1})=\lambda^g(x),$$

即对任意的 $y\in Q$ 及 $g\in G$, 每个 Q-轨道在元素 x 上取相同的值. ξ 在集合 $\{\lambda_1(x),\lambda_2(x),\cdots,\lambda_r(x)\}$ 中出现的次数 r/q 被 $|G:I|_q=r_q$ 整除, 这显然是不可能的. 因此对所有的 $\varphi\in \mathrm{IBr}(G)$, $\varphi(x)\neq 0$.

推论 1　假设 G 是一个满足 $\pi(G)\neq\{p\}$ 的非平凡的可解群, 那么它含有非平凡的非零化 p-正则元.

证明　如果 $O_p(G)\neq 1$, 考虑 $\bar{G}=G/O_p(G)$. 对群 G 的阶进行归纳, 可以得到 $\bar{G}$ 有一个非单位非零化的 p-正则元 $\bar{x}$. 将 $\mathrm{IBr}(G)$ 与 $\mathrm{IBr}(\bar{G})$ 视为同一, 那么 $x_{p'}$ 是 G 的非零化 p-正则元.

如果 $O_p(G)=1$, 设 A 是 G 的极小正规子群, 那么 A 是一个初等交换 q-群, 其中 $q\in\pi(G)$. 令 Q 是 G 的西罗 q-子群, 那么 $A\lhd Q$. 因此, $Z(Q)\cap A\neq 1$, 并且由定理 1 我们知道, 任意 $x\in Z(Q)\cap A$ 都是 G 的非零化 p-正则元.

注　如果 A 是 G 的一个初等交换的正规的 q-子群, 那么 $Z(Q)\cap A$ 的所有非平凡元素都满足我们定理 1 的条件. 当 $p\nmid |G|$, $\mathrm{IBr}(G)=\mathrm{Irr}(G)$(文献[8]的定理 2.12), 因此我们的结果覆盖了文献[4]的结果. 另外, 结论 2 对有限 p-可解群不成立. 例如, 当 $G=A_5\times C_7$, $p=7$, G 没有非平凡的非零化 7-正则元. p-正则元属于 Fitting 子群的结论也不成立. 例如, 当 $G=S_4$, $p=3$, G 的所有的 3-正则元都是非零化的, 但 $F(G)=K_4$. 最后, 我们给出有限幂零群的一个结果.

推论 2　如果 G 是一个有限幂零群, 那么它的所有非零化的 p-正则元都属于 $Z(G)$.

证明　由条件可设 $G=P_1\times P_2\times\cdots\times P_n$, $P_i\in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$, $p=p_1$. P_1 可以是 G 的平凡的西罗 p-子群. 那么 $\mathrm{IBr}(G)=\mathrm{IBr}(P_2)\times\cdots\times\mathrm{IBr}(P_n)=\mathrm{Irr}(P_2)\times\cdots\times\mathrm{Irr}(P_n)$, G 的非零化的 p-正则元恰好是 $P_2\times\cdots\times P_n$ 非零化的正则元. 因此, 由文献[1]的定理 B 我们可以得到该结论.

参考文献:

[1] Isaacs I M, Navarro G, Wolf T R. Finite group elements where no irreducible character vanishes[J]. J Algebra, 1999, 222: 413-423.

[2] Moretó A, Wolf T R. Orbit sizes, character degrees and Sylow subgroups[J]. Adv Math, 2004, 184: 18-36.

[3] Dolfi S, Navarro G, Pacifici E, et al. Non-vanishing elements of finite groups[J]. J Algebra, 2010, 323: 540-545.

[4] Miyamoto M. Non-vanishing elements in finite groups [J]. J Algebra, 2012, 364: 88-89.

[5] Doifi S, Pacifici E, Sanus L, et al. On the orders of zeros of irreducible characters[J]. J Algebra, 2009, 321: 345-352.

[6] He L. Notes on non-vanishing elements of finite solvable groups[J]. Bull Malays Math Sci Soc, 2012, 35: 163-169.

[7] Malle G, Navarro G. Characterizing normal Sylow p-subgroups by character degrees[J]. J Algebra, 2012, 370: 402-406.

[8] Navarro G. Characters and blocks of finite groups[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

A Note on the Brauer Character Table of Finite Solvable Groups

WANG Jian[1], ZENG Ji-wen[1*], FAN Juan-juan[2]

(1. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China;
2. Department of Economics and Trade, Fujian Jiangxia University, Fuzhou 350108, China)

Abstract: Masahiko Miyamoto has proved that if A is an elementary abelian normal q-subgroup of a finite group G and Q is a Sylow q-subgroup of G, then no irreducible character of G vanish on any element of $Z(Q)\cap A$. In this paper, we extend it to Brauer characters and show that if $x\in Z(Q)\cap O_q(G)$ of order q, then no p-Brauer characters can vanish it, where $p\neq q$. Moreover, we obtain that for a finite solvable group which is not a p-group, its Brauer character table has a nontrivial column without zero value.

Key words: solvable group; Brauer character; p-regular element