

精确的拉普拉斯数值反演方法及其应用

何光渝 王卫红

(西安石油学院)

提 要

介绍了一种拉普拉斯变换数值反演的新方法(Crump 方法)以及它在油气井现代试井分析中的应用。在数值解例中,将 Crump 方法和精确解及 Stehfest 方法分别作了比较。Crump 方法无论在计算精度、数值弥散还是在数值振荡上都有很大改进。用此方法绘制的典型曲线更精确。

主题词 拉普拉斯变换 数值分析 反演试井分析

1 引 言

近年来,在油气井现代试井分析中,常常需要使用拉普拉斯变换数值反演方法^[1]。Stehfest 方法是国内外常用的一种方法^[2,3,4,8,9]。Stehfest 方法简单易行,所用计算时间很少。然而,该方法也有很多缺点,参数 N 既受拉普拉斯空间解的影响,又受时间 t 及各种参数的影响,误差不能预先估计且不能减小;特别在解的曲线有陡峭变化时,要发生数值弥散和振荡。本文介绍的 Crump 方法既保持了 Stehfest 方法的简单易行的优点,又克服了以上所述的缺点。采用 Crump 方法绘制了均质无限大储层具有井筒储存和表皮效应的无量纲压降及其导数的典型曲线图版,其精度可与精确解相比拟。

2 Crump 方法

设函数 $f(t)$,当 $t \geq 0$ 时有定义,称下列函数

$$F(S) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (1)$$

为函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换。其中 $S = a + iw$ 是复变量。若函数 $f(t)$ 在 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 的任一有限区间上分段连续;当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $f(t)$ 的增长速度不超过某一指数函数,即存在常数 $M > 0$ 及 $\alpha \geq 0$,使得

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$$

成立。则上述的拉氏变换在半平面 $Re(s) > \alpha$ 上一定存在。(1)式右端积分绝对且一致收敛,在此平面内 $F(s)$ 为解析函数。同时可知反演公式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (2)$$

• 何光渝,1967 年毕业于兰州大学。现任西安石油学院石油工程系采油教研室主任,副教授。通讯处:陕西省西安市陵园路。邮政编码:710061。

或变换(2)式为

$$f(t) = \frac{e^{at}}{\pi} \int_0^\infty [Re\{F(s)\} \cos \omega t - Im\{F(s)\} \sin \omega t] dw \quad (3)$$

其中 α 为任意大于 a 的实数。这时可将(1)式和(3)式改写为下列形式

$$Re\{F(s)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \cos \omega t dt \quad (4)$$

$$f(t) = \frac{2e^{at}}{\pi} \int_0^\infty Re\{F(s)\} \cos \omega t dw \quad (5)$$

或

$$Im\{F(s)\} = - \int_0^\infty e^{-st} f(t) \sin \omega t dt \quad (6)$$

$$f(t) = - \frac{2e^{at}}{\pi} \int_0^\infty Im\{F(s)\} \sin \omega t dw \quad (7)$$

Dubner 和 Abate 对(5)式应用梯形近似公式得到 $F(s)$ 的数值反演近似公式^[5]。这种公式在计算机上编制程序非常简单,且数值反演误差能够控制。Dubner 和 Abate 方法的数值反演公式为

$$f(t) = \frac{2e^{at}}{T} \left[\frac{1}{2} F(a) + \sum_{k=1}^{\infty} Re\{F(a + \frac{k\pi i}{T})\} \cos \frac{k\pi i}{T} \right] + E_c \quad (8)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, E_c 为误差。

$$E_c = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-2naT) \{f(2nT + t) + \exp(2at)f(2nT - t)\} \quad (9)$$

式中参数 $a > \alpha$, $T > t_{\max}$, 利用 $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$, (9)式可变为

$$E_c \leq M e^{\alpha t} \frac{\exp\{2(\alpha - a)t\} + 1}{\exp\{2(\alpha - a)t\} - 1} \quad (10)$$

选取 $\alpha - a$ 充分大,则误差 E_c 能达到所期望的值。

Crump 采用傅里叶级数对上述方法作了进一步的改善^[6]。Crump 方法主要是对(3)式应用梯形近似公式,则有

$$f(t) = \frac{e^{at}}{T} \left[\frac{1}{2} F(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \{Re[F(a + \frac{k\pi i}{T})] \cos \frac{k\pi i}{T} - Im[F(a + \frac{k\pi i}{T})] \sin \frac{k\pi i}{T}\} \right] + E \quad (11)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, E 为误差。

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2naT} f(2nT + t) \quad (12)$$

若 $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$, 则(12)式可改为

$$E \leq M e^{\alpha t} e^{-2T(\alpha - a)} \quad 0 < t < 2T \quad (13)$$

具体的计算过程为

(1) T 的选取。应有 $2T > t_{\max}$, 即 $T > \frac{t_{\max}}{2}$

(2) α 的选取。若所期望的相对误差为 E' , ($E' = \frac{E}{M e^\alpha}$) 由(13)式可得 α 的选择为

$$\alpha = \alpha - \frac{\ln E'}{2T} \quad (14)$$

式中 α 取稍大于 $\text{Max}[Re(p)]$, p 为 $F(s)$ 的奇点。

(3) T 和 α 选取好后, 即可利用(11)式得到拉普拉斯变换数值反演的结果。

在 Crump 方法中, 计算机的 CPU 时间主要用于正弦和余弦函数的计算上, 如果要求精度高, 误差小, 则(11)式中级数所取的项数 N 要大, 一般 N 要取 500 以上, 这样花费的时间较多。为了加快级数收敛, 减少 CPU 时间, Dubner 和 Abate 方法和 Crump 方法分别采用了快速傅里叶变换(FFT)、欧拉变换方法(ET, Euler Transformation)、和 ϵ 算法(EPAL, epsilon algorithm)。经过数值试验, ϵ 算法在加快收敛速度方面优于其他两种方法。

3 数值解例

为了更有效地比较各种数值反演方法在现代试井中的应用, 采用常见的变形贝塞尔函数作为例子, 这些例子都有精确解, 以供比较。

$$\text{例1} \quad F(s) = K_0(\sqrt{s}); \quad f(t) = \frac{1}{2t} \exp(-\frac{1}{4t})$$

$$\text{例2} \quad F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} K_1(\sqrt{s}); \quad f(t) = \exp(-\frac{1}{4t})$$

$$\text{例3} \quad F(s) = \frac{1}{s} \exp(-25s); \quad f(t) = U(t-25)$$

其中 U 为阶梯函数。

对以上三个解例, 分别用 Stehfest 方法^[7]和 Crump 方法进行计算, 然后与精确解进行比较, 所有的计算均采用双精度。采用 Crump 方法和 Stehfest 方法对例1和例2进行了计算, 所得部分结果列于表1、表2之中。对于例1 Stehfest 方法 $N=12$ 时其结果较好, 但有些点却不如 $N=10$ 。例2也是这样。我们还计算过文献所介绍的若干数值解例, 有的是 $N=8$ 结果较好, 有的是 $N=10$ 结果较好, 总之, 在 Stehfest 方法中, N 的选取对解的精度影响很大。在现代试井分析的实际计算中, 需要数值反演的函数往往是这些简单数值解例的组合函数, 这时 N 的选取不一定是由简单数值解例中所确定的 N 而计算出的结果为最好。其次, Stehfest 方法的另一缺点是相对误差不能人为控制, 理论上也不能预估。每算一次都要事先进行若干算例的试算, 以求出误差估计, 非常麻烦, 且 N 一旦选定, 相对误差即为固定, 再不能减小。而 Crump 方法却没有上述缺点。对例1和例2, Crump 方法是采用 ϵ 算法加速级数收敛^[11], N 取为 31, 事先确定好相对误差, 即可根据(14)式求出参数 α 。分别采用 $\alpha=0.62$ ($E'=0.001$), $\alpha=1.07$ ($E'=0.0000001$) 来计算, 以验证这种方法可以预先估计相对误差。事实上, 当 $\alpha=1.07$ 时, 所得解有效数字 6 位数字与精确解完全一致。

例3中精确解 $f(t)=U(t-25)$ 为阶梯函数, 即当 $t-25<0$ 时, $f(t)=0$; $t-25=0$ 时, $f(t)=0.5$; $t-25>0$ 时, $f(t)=1$ 。阶梯函数是验证一般数值解法的标准解例。Crump 方法和 Stehfest 方法与精确解的比较见图1, Stehfest 方法的解出现了严重的类似于数值弥散现象且有数值振

表1 Crump方法,Stehfest方法和精确解的比较(例1)

Table 1 A comparison of Crump's method,Stehfest's method and exact solutions(Example 1)

t	精确解	Crump方法相对误差(%)		Stehfest方法相对误差(%)		
		$N=31$	$N=31$	$N=8$	$N=10$	$N=12$
		$\alpha=0.62$	$\alpha=1.07$			
0.10	0.410425	0.023275	0.003263	0.686802	0.074277	0.144808
0.20	0.716262	0.025782	0.000841	1.049723	0.254693	0.008452
0.30	0.724330	0.002979	0.000019	0.358735	0.086062	0.080210
0.40	0.669077	0.003153	0.000008	0.109450	0.187941	0.060496
0.50	0.606531	0.003326	0.000008	0.344166	0.189966	0.022953
0.60	0.549367	0.003518	0.000009	0.442168	0.152714	0.003601
0.70	0.499766	0.003711	0.000009	0.495456	0.037464	0.089331
0.80	0.457260	0.003899	0.000010	0.486219	0.038122	0.097191
0.90	0.420814	0.004079	0.000010	0.414151	0.256305	0.752864
1.00	0.389400	0.004249	0.000009	0.378749	0.056544	0.412818
2.00	0.220624	0.001112	0.000326	0.047346	0.089694	0.897348
3.00	0.153341	0.001631	0.000001	0.096264	0.064169	0.008531
4.00	0.117427	0.002032	0.000005	0.148248	0.040891	0.011207
5.00	0.095123	0.002373	0.000006	0.163719	0.022785	0.012199
6.00	0.079932	0.002691	0.000007	0.163815	0.009818	0.011542
7.00	0.068923	0.002981	0.000007	0.157292	0.000680	0.010282
8.00	0.060577	0.003246	0.000008	0.148050	0.005758	0.008891
9.00	0.054034	0.003489	0.000009	0.137914	0.010306	0.007555
10.00	0.048765	0.003712	0.000009	0.127755	0.013518	0.006342

表2 Crump方法,Stehfest方法和精确解的比较(例2)

Table 2 A comparison of Crump's method,Stehfest's method and exact solutions(Example 2)

t	精确解	Crump方法相对误差(%)		Stehfest方法相对误差(%)		
		$N=31$	$N=31$	$N=8$	$N=10$	$N=12$
		$\alpha=0.62$	$\alpha=1.07$			
0.10	0.082085	0.105582	0.027187	2.144244	0.629852	0.161237
0.20	0.286505	0.027630	0.000226	0.039859	0.093087	0.046398
0.30	0.434598	0.018310	0.000059	0.220678	0.085224	0.013775
0.40	0.535261	0.014976	0.000037	0.201833	0.041207	0.002978
0.50	0.606531	0.013303	0.000033	0.148834	0.016940	0.009918
0.60	0.659241	0.012313	0.000031	0.102615	0.001779	0.005005
0.70	0.699673	0.011664	0.000029	0.078509	0.032232	0.033916
0.80	0.731616	0.011210	0.000028	0.053789	0.016232	0.041295
0.90	0.757465	0.010877	0.000029	0.022733	0.059424	0.223742
1.00	0.778801	0.010623	0.000026	0.014095	0.013714	0.219625
2.00	0.882497	0.010195	0.000015	0.011708	0.004571	0.037915
3.00	0.920044	0.009801	0.000022	0.010110	0.001242	0.000653
4.00	0.939413	0.009606	0.000024	0.007332	0.000117	0.000442
5.00	0.951229	0.009493	0.000024	0.005286	0.000280	0.000285
6.00	0.959189	0.009419	0.000023	0.003877	0.000412	0.000182
7.00	0.964916	0.009369	0.000023	0.002898	0.000441	0.000117
8.00	0.969233	0.009332	0.000023	0.002204	0.000427	0.000073
9.00	0.972604	0.009303	0.000023	0.001700	0.000398	0.000045
10.00	0.975310	0.009281	0.000023	0.001326	0.000363	0.000025

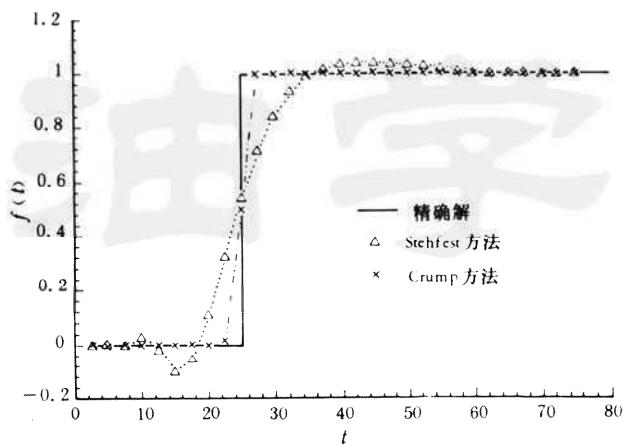


图1 Crump方法,Stehfest方法和精确解的比较(例3)

Fig. 1 A comparison of Crump's method, Stehfest's method and exact solution (Example 3)

荡,而 Crump 方法几乎和精确解完全一致。对某些问题采用 Stehfest 方法所得结果发生振荡现象,其原因可能就在于此。

4 拉普拉斯变换数值反演在现代试井分析中的应用

现代试井分析中,考虑表皮效应和井筒储存效应后的数学模型都很复杂,人们通常采用拉普拉斯变换方法及其数值反演求解,以绘制典型曲线图版,下面以均质地层为例说明其应用。

假设均质无限大储集层是水平的,原始地层压力为 P_D ,厚度为 h ,在储层中心有一口井以定产量生产,均质弱可压缩液体在储层内向一口具有井筒储存和表皮效应井渗透时,其无因次压降数学模型为

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = e^{-z_s} \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad (15)$$

$$r \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = -1 + C_D \frac{dp_{WD}}{dt_D} \quad (16)$$

$$P_D|_{r_D=\infty} = 0 \quad (17)$$

$$P_D|_{t_D=0} = 0 \quad (18)$$

$$P_{WD}(t_D) = P_D(1, t_D) \quad (19)$$

式中 P_D 是系统的无因次压力, P_{WD} 是无因次井底压力, t_D, C_D 分别是无因次时间和无因次井筒储层常数,且

$$r_D = \frac{r}{r_{we}} = \frac{r}{r_w e^{-z_s}} \quad (20)$$

即对表皮效应用有效井筒半径处理。对式(15)~(19)作拉氏变换,不难得到其拉氏空间井底压力解为

$$P_{WD}(Z) = \frac{K_0(\sqrt{Z/C_D e^{2s}})}{Z[\sqrt{Z/C_D e^{2s}} K_1(\sqrt{Z/C_D e^{2s}}) + Z K_0(\sqrt{Z/C_D e^{2s}})]} \quad (21)$$

拉氏空间井底压力导数解为

$$P'_{WD}(Z) = \frac{K_0(\sqrt{Z/C_D e^{2s}})}{\sqrt{Z/C_D e^{2s}} K_1(\sqrt{Z/C_D e^{2s}}) + Z K_0(\sqrt{Z/C_D e^{2s}})} \quad (22)$$

对于拉氏空间解,要求得其实空间的解有两个途径,一是通过拉氏逆变换求解析解,此方法比较复杂,结果仍是无穷积分,不便计算;二是利用数值反演方法,求其数值解。目前在我国油田广泛使用的SSI软件公司的试井解释软件,其中的一些均质、非均质储层的试井典型曲线图就是采用Stehfest方法绘制出来的^[8~10]。为比较Stehfest方法和Crump方法,分别用这两种方法(Stehfest方法N分别取8、10、12)计算了井底压力(21式)和其导数解(22式),采用Crump方法绘制了相应的样板曲线(图2和图3)。对比两种计算结果发现两种方法的井底压力解虽略有不同,但相差甚微,其中Stehfest法取N=8时,结果稍差;压

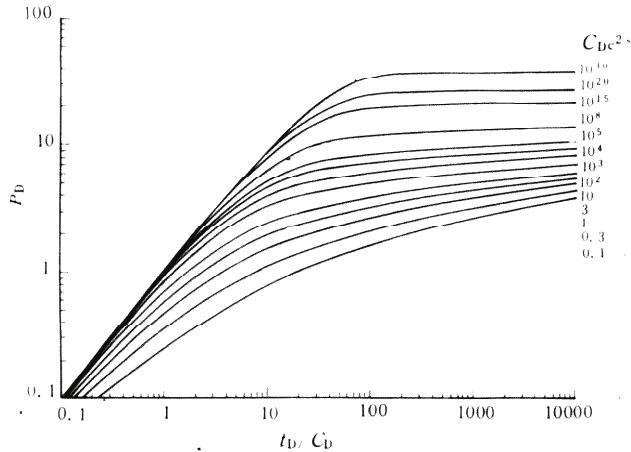


图2 均质油藏具有井储效应的有效井径模型样板曲线
Fig. 2 Well testing type-curve of a well in a homogeneous reservoir taking wellbore storage and effective wellbore radius into consideration

力导数解和其样板曲线差异较大,并且在部分区域出现振荡,结果见表3、表4。

表3 Crump方法和Stehfest方法计算结果对比

Table 3 A comparison of results obtained by Crump's and Stehfest's methods

$C_D e^{2s}$	t_D/C_D	Crump方法		Stehfest方法 $P'D \cdot t_D/C_D$		
		$P'D \cdot t_D/C_D$	$N=8$	$N=10$	$N=12$	
0.1	10	0.306	0.306	0.306	0.322	
10^3	100	0.567	0.563	0.571	0.569	
10^5	100	0.605	0.579	0.609	0.610	
10^8	100	0.690	0.618	0.672	0.691	
10^{15}	200	0.655	0.517	0.636	0.665	
10^{20}	200	0.790	0.594	0.719	0.779	
10^{20}	300	0.623	0.473	0.628	0.647	
10^{30}	300	0.801	0.491	0.693	0.786	
10^{30}	500	0.601	0.446	0.649	0.645	
10^{30}	2000	0.520	0.596	0.507	0.509	

表4 Crump方法和Stehfest方法计算结果对比

Table 4 A comparison of results obtained by Crump's and Stehfest's methods

$C_D e^{2s}$	t_D/C_D	Crump方法 $P'_D \cdot t_D/C_D$	Stehfest方法 $P'_D \cdot t_D/C_D$		
			$N=8$	$N=10$	$N=12$
10^{31}	100	7.167912	7.350545	7.211284	7.176475
10^{31}	200	1.695857	1.640618	1.625750	1.668944
10^{31}	300	0.800904	0.490549	0.693017	0.786242
10^{31}	400	0.646105	0.371656	0.622355	0.671985
10^{31}	500	0.600842	0.446166	0.648624	0.645077
10^{31}	600	0.578775	0.526445	0.659880	0.616015
10^{31}	700	0.565018	0.584322	0.652835	0.587590
10^{31}	800	0.555454	0.620348	0.636321	0.563726
10^{31}	900	0.548382	0.640328	0.616739	0.545500
10^{31}	1000	0.542930	0.649523	0.597473	0.532357
10^{31}	2000	0.520289	0.596452	0.507048	0.508735
10^{31}	3000	0.513328	0.549959	0.495260	0.511330
10^{31}	4000	0.509934	0.526707	0.495368	0.511317
10^{31}	5000	0.507923	0.514362	0.496987	0.510275

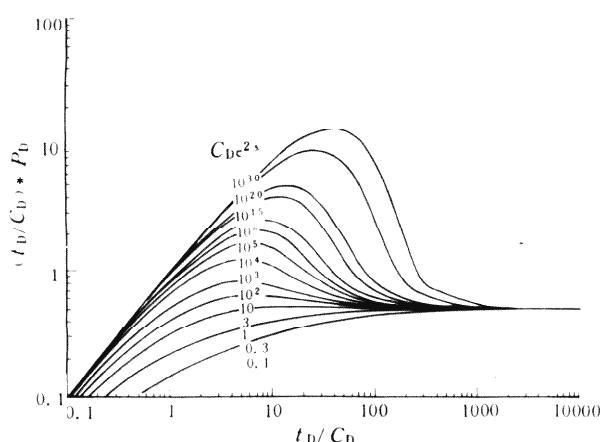


图3 均质油藏具有井储效应的有效井径模型样曲线

Fig. 3 Well testing type-curve of a well in a homogeneous reservoir taking wellbore storage and effective wellbore radius into consideration

别是 N 选取的不好,误差更大。更主要的是 N 的选取没有一定的规律可遵循。另外,从表4可看出用 Stehfest 方法计算出的导数典型曲线有明显的振荡, $N=8$ 时振荡最明显, $N=12$ 时,振荡较弱。同时振荡的大小和位置与 $C_D \cdot e^{2s}$ 和时间 t 有关,但 Crump 方法得到的结果却没有类似的现象,其原因与前面分析的 Stehfest 方法的适用范围有关,它主要适用于曲线比较平缓的情况,而 Crump 方法则没有这一限制。在 Crump 方法中,我们要注意的是(14)式中 α 的选择,当极个别的点出现振荡时,即要注意拉氏空间象函数的奇点, α 的选取与象函数的奇点有关。

表3和表4是从计算结果中选取的部分点。从表3可看出,用 Stehfest 方法计算时 N 取不同的值解也不同,部分点结果相差较大,若无精确解时,则难以选取适当的 N ,也无法知道其误差大小。将 Stehfest 方法的三种结果与 Crump 方法的结果相比,可看出 $N=12$ 时的解大部分与 Crump 方法的解比较接近, $N=8$ 和 $N=10$ 时其结果小部分也比较差,但总体上看要差一些。这里采用的 Crump 方法相对误差控制在 0.0000001,也就是说用 Crump 方法求得的典型曲线几乎和精确解完全一致,而 Stehfest 方法算得的结果则有一定的误差,特

5 结 论

1. Crump 方法在拉普拉斯数值反演中结果精确,可以估计误差,控制误差大小,计算简单易行。
2. Stehfest 方法对于不同的 N 其结果不同, N 的选取没有规律可遵循,且无法预估误差。特别在解的曲线较陡时,会出现振荡,数值弥散亦较大,解的精度较差,而 Crump 方法无此现象。
3. 在现代试井分析中用 Crump 方法计算的样板曲线图版较 Stehfest 方法更为精确、可靠。

参 考 文 献

- [1] 刘尉宁主编.现代试井分析方法的新进展及解释软件.中国石油天然气总公司情报所,1989.
- [2] Bourdet D and Gringarten A C. Determination of fissure volume and block size in fractured reservoirs by type-curve analysis. SPE 9293, Sept., 1980.
- [3] 李允,张大枢.计算机辅助下的双重介质油气藏试井分析方法.西南石油学院学报,1990,(2).
- [4] 贾永禄,赵必荣.拉普拉斯变换及其数值反演在试井分析中的应用.天然气工业,1992,(1).
- [5] Dubner H and Alate J. Numerical inversion of laplace transforms by relating them to the finite fourier cosine transform. J. ACM 15,1,1968.
- [6] Crump K S. Numerical inversion of laplace transforms using a fourier series approximation. J. ACM, 1976, 23(1).
- [7] Stehfest h. Algorithm 368. Numerical inversion of laplace transforms. Communications of the ACM, Jan, 1970.
- [8] Mavor M J and Cinco H. Transient pressure behavior of naturally fractured reservoirs. SPE7977, 1979.
- [9] Gringarten A C et al. A comparision different skin and wellbore storage type-curve for early-time transient analysis. SPE8205, 1979.
- [10] Bourte D et al. A newset of type-curves simplifies well test analysis. World Oil, May 1983.
- [11] 郝柏林.FORTRAN 77程序设计.北京:人民邮电出版社,1987.
- [12] 何光渝主编.FORTRAN 77算法手册.北京:科学出版社,1993.

(本文收到日期1993-07-15)

(修改稿收到日期1993-10-11)

(编辑 杨 苗)

AN APPLICATION OF AN ACCURATE AND EFFICIENT NUMERICAL INVERSION OF THE LAPLACE TRANSFORM IN MODERN WELL-TESTING ANALYSIS

He Guangyu Wang Weihong

(Xi'an Petroleum Institute)

Abstract

A new numerical inversion of the Laplace transform (Crump's method) is present-

ed. This method is applied in modern well testing analysis. Crump's method, Stehfest's method and exact solution are compared in examples cited. The results show that Crump's method is more accurate and stable. The type-curves derived by this method are more exact than those derived by Gringarten et al.

Key Words Laplace transform numerical analysis inversion well test analysis

渤海湾盆地新生界的天然气大有希望

为了进一步搞清渤海湾盆地新生界天然气的富集条件和勘探目标评价,中国石油天然气总公司石油勘探开发科学研究院廊坊分院天然气勘探开发研究所的青年科技人员,从气源岩的多源性、裂谷活动的多期性、烃类在空间盖层内差异的扩散性、压力场的多变性、水化学离子的分异性、沉积体系的多样性入手,总结了大陆裂谷盆地天然气的富集规律。在天然气盖层研究上,首次将煤岩学研究的吸附等温线法用于测定气藏盖层,结合突破压力、孔隙度和渗透率等各项参数,对各类曲线形态,进行了气藏盖层的分类和评价。并应用封盖体系新理论,解释了烃类的平面“差异运移”和纵面“差异扩散”的特点。首次提出了关于用现代藻类生烃量预测天然气远景资源量的新见解。揭示了气层盆地的地下水化学特征与油气水组合相关性规律。指出:扇中、扇端过渡带为当前找气重要的有利岩相带;致密砂岩、碳酸盐岩、煤层、火山岩等五类非常规储层的勘探新领域;凹陷中央深层断裂背斜构造带高成熟气、深大断裂带多种成因类型气、凸起带剥蚀超覆带、低温冷却区、低压次生气的天然气勘探方向。

(文思 供稿)