

# 基于非线性映射的自适应混合 Kalman/ $H_\infty$ 滤波器

张勇刚<sup>1</sup>, 黄玉龙<sup>1</sup>, 李 宁<sup>1</sup>, 李雷雷<sup>2</sup>

(1. 哈尔滨工程大学自动化学院, 黑龙江 哈尔滨 150001;  
2. 国家广播电影电视总局广播电视规划院, 北京 100866)

**摘要:** Kalman 滤波器的精度高,但是鲁棒性差。 $H_\infty$  滤波器虽然鲁棒性好,但是精度不高,将两种滤波器进行混合获得新的滤波器可同时具备高精度和对干扰噪声的鲁棒性。通过对 Kalman 滤波器的实时性能评价,提出了一种基于非线性映射的自适应调节权值混合 Kalman/ $H_\infty$  滤波器,并通过全球定位系统/推位组合导航模型对提出的方法进行了仿真验证。仿真结果表明,在干扰噪声统计特性变化和系统模型存在摄动条件下,与 Kalman 滤波和  $H_\infty$  滤波方法相比,所提出的混合 Kalman/ $H_\infty$  滤波方法具有更高的滤波精度,更适用于实际应用。

**关键词:** Kalman 滤波;  $H_\infty$  滤波; 非线性映射; 混合滤波; 自适应

**中图分类号:** TP 274

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.3969/j.issn.1001-506X.2013.09.24

## Adaptive hybrid Kalman/ $H_\infty$ filter based on nonlinear mapping

ZHANG Yong-gang<sup>1</sup>, HUANG Yu-long<sup>1</sup>, LI Ning<sup>1</sup>, LI Lei-lei<sup>2</sup>

(1. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China;  
2. Academy of Broadcasting Planning, State Administration of Radio, Film, and Television, Beijing 100866, China)

**Abstract:** The precision of Kalman filter is high, but it is not robust to unknown disturbance. The robustness of  $H_\infty$  filter is good, but the precision is low. Hybrid Kalman/ $H_\infty$  filter can obtain both robustness to noise and high precision. By evaluating the performance of Kalman filter, an adaptive hybrid Kalman/ $H_\infty$  filter based on nonlinear mapping is proposed. Simulations are performed based on global positioning system/dead reckoning integrated navigation model to confirm the performance of the proposed method. As can be seen from simulation results, when statistics of the noise change and system model perturbation exists, the precision of the proposed hybrid Kalman/ $H_\infty$  filter is improved as compared with Kalman filter and  $H_\infty$  filter, thus it is more suitable for practical applications.

**Keywords:** Kalman filter;  $H_\infty$  filter; nonlinear mapping; hybrid filter; adaptive

## 0 引言

在系统模型和噪声统计特性精确已知时, Kalman 滤波是最优估计,但实际应用中只能建立近似的数学模型并且很难获得精确的噪声统计特性,导致 Kalman 滤波精度下降甚至出现滤波发散。为了解决 Kalman 滤波器鲁棒性差问题,人们提出了鲁棒 Kalman 滤波<sup>[1-4]</sup>、混合 Kalman/鲁棒 Kalman 滤波<sup>[5]</sup>、鲁棒  $H_\infty$  滤波<sup>[6-7]</sup> 等改进方法。其中,  $H_\infty$  滤波器的鲁棒性最好,但其精度不高。由文献[8-9]提出的方法最能反映 Kalman 滤波器和  $H_\infty$  滤波器在数学上的本质联系和区别,他们指出  $H_\infty$  滤波器和 Kalman 滤波器本质是一样的,前者仅仅是后者的一种推广。也有些学者从

博弈论角度<sup>[10]</sup>, 阐述了两种滤波器对噪声的假设处于两个极端, Kalman 滤波器认为噪声的概率分布是不变的,而  $H_\infty$  滤波器认为噪声的概率分布是任意的。正是由于两种滤波器对噪声的假设过于极端,从而使得混合 Kalman/ $H_\infty$  滤波器变得非常有意义。

目前混合  $H_2/H_\infty$  滤波器主要有 3 类。第一类是优化方差鲁棒混合滤波器<sup>[11]</sup>, 第二类是方差约束鲁棒混合滤波器<sup>[12-13]</sup>。这两种鲁棒混合  $H_2/H_\infty$  滤波器都具有以下缺点:一方面它只适用于线性时不变系统,另一方面其保守性强,虽然目前基于参数依赖的 Lyapunov 方法相对于基于二次稳定的方法保守性得到了一定的改善<sup>[14-15]</sup>,但是对于不确定系统,给出的都是鲁棒混合滤波器存在的充分条件,换

收稿日期:2012-06-14; 修回日期:2013-06-25; 网络优先出版日期:2013-08-06。

网络优先出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2422.TN.20130806.1027.006.html>

基金项目:国家自然科学基金(61001154, 61001169, 61201409); 中国博士后科学基金(2012M510923, 2013M530147); 中央高校基本科研业务费专项基金(HEUCFX41307)资助课题

句话说,当线性矩阵不等式系统无可解行时,也不能说明鲁棒混合滤波器不存在。最后一类是估计加权混合滤波器<sup>[16-17]</sup>,目前这类混合滤波器的权值是设计者根据对系统模型不准确度和噪声统计特性不准确度的经验了解来确定的,固定权值的使用使得混合方法具有很强的保守性,且在 Kalman 滤波发散时,这种混合滤波器依然发散。

本文提出了一种基于非线性映射的自适应混合 Kalman/ $H_\infty$  滤波器,首先提出了 Kalman 滤波性能量化指标,进而在此量化指标和混合滤波器的权值之间建立非线性映射数学模型,从而使得混合滤波器的权值能够随着环境的改变在 0 和 1 之间自适应地调节其大小,降低了权值设定的保守性,同时也提高了混合滤波器的性能。

### 1 Kalman 滤波器和 $H_\infty$ 滤波器

#### 1.1 系统模型

考虑线性时变离散系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \Phi_{k+1} \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} \\ \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{L}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_{k+1} \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{w}_k$  为状态方程;  $\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}$  为观测方程;  $k$  表示第  $k$  步;  $\mathbf{x}_k$  为第  $k$  步的  $n$  维状态向量;  $\mathbf{z}_{k+1}$  为第  $k+1$  步的  $m$  维观测向量;  $\mathbf{y}_{k+1}$  为第  $k+1$  步的  $q$  维待估计的输出向量;  $\mathbf{w}_k$  为第  $k$  步  $p$  维系统噪声;  $\mathbf{v}_{k+1}$  为第  $k+1$  步  $m$  维观测噪声;  $\Phi_{k+1}$  为第  $k+1$  步  $n \times n$  维系统状态转移矩阵;  $\mathbf{H}_{k+1}$  为第  $k+1$  步  $m \times n$  维系统观测矩阵;  $\mathbf{G}_{k+1}$  为第  $k+1$  步  $n \times p$  维系统状态噪声矩阵;  $\mathbf{L}_{k+1}$  为第  $k+1$  步  $q \times n$  维估计矩阵。

#### 1.2 Kalman 滤波方程

采用式(1)的系统模型, Kalman 滤波假设  $\mathbf{w}_k$  和  $\mathbf{v}_{k+1}$  是不相关的零均值高斯白噪声, 方差分别为  $\mathbf{Q}_k$  和  $\mathbf{R}_{k+1}$ 。如果系统的初始状态为

$$\mathbf{P}_{20} = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{20})(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{20})^T], \hat{\mathbf{x}}_{20} = E(\mathbf{x}_0)$$

则 Kalman 滤波方程为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{2(k+1/k)} = \Phi_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{2(k)} \\ \mathbf{P}_{2(k+1/k)} = \Phi_{k+1} \mathbf{P}_{2(k)} \Phi_{k+1}^T + \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_{k+1}^T \\ \mathbf{K}_{2(k+1)} = \mathbf{P}_{2(k+1/k)} \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{2(k+1/k)} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{2(k+1)} = \hat{\mathbf{x}}_{2(k+1/k)} + \mathbf{K}_{2(k+1)} (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{2(k+1/k)}) \\ \mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{2(k+1/k)} \\ \hat{\mathbf{y}}_{2(k+1)} = \mathbf{L}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{2(k+1)} \\ \mathbf{P}_{2(k+1)} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{2(k+1)} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_{2(k+1/k)} \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $\hat{\mathbf{x}}_{2(k)}$  为 Kalman 滤波器第  $k$  步状态估计值;  $\hat{\mathbf{x}}_{2(k+1/k)}$  ( $k+1/k$ ) 表示基于  $k$  时刻以前的所有量测  $\{\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k\}$  对状态向量  $\mathbf{x}_{k+1}$  的进一步预测) 为 Kalman 滤波器第  $k+1$  步状态一步预测值;  $\mathbf{P}_{2(k)}$  为 Kalman 滤波器第  $k$  步状态估计误差协方差矩阵;  $\mathbf{P}_{2(k+1/k)}$  为 Kalman 滤波器第  $k+1$  步状态一步预测误差协方差矩阵;  $\mathbf{K}_{2(k+1)}$  为 Kalman 滤波器第  $k+1$  步增益矩阵;  $\mathbf{r}_{k+1}$  为 Kalman 滤波器第  $k+1$  步新息;  $\hat{\mathbf{y}}_{2(k+1)}$  为待估

计向量的第  $k+1$  步 Kalman 滤波估计值;  $\mathbf{I}$  为  $n$  阶单位矩阵。当系统模型和噪声统计特性精确已知时, Kalman 滤波为最小方差估计。

#### 1.3 $H_\infty$ 滤波方程

采用式(1)的系统模型, 对于给定的  $\gamma > 0$  (鲁棒参数),  $H_\infty$  滤波器的设计准则为

$$\frac{\sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k\|^2}{\|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0\|_{\mathbf{P}_0}^2 + \sum_{k=0}^{N-1} (\|\mathbf{w}_k\|^2 + \|\mathbf{v}_k\|^2)} < \gamma^2$$

式中, 对  $\mathbf{w}_k$  和  $\mathbf{v}_k$  的统计特性不做任何假设。由  $H_\infty$  滤波器的设计准则可知, 不管  $\mathbf{w}_k$  和  $\mathbf{v}_k$  的统计特性如何、初始的状态估计误差大小如何, 只要系统噪声与观测噪声能量有限, 则待估计量的估计误差能量有限, 所以  $H_\infty$  滤波器对噪声统计特性不准具有鲁棒性; 因为模型误差可以被当作是系统噪声或观测噪声, 所以  $H_\infty$  滤波器对模型不准确也具有鲁棒性。上述准则物理意义为,  $H_\infty$  滤波器保证了输出误差能量与输入噪声能量之比有界。鲁棒参数  $\gamma$  决定了  $H_\infty$  滤波器的鲁棒性,  $\gamma$  越小,  $H_\infty$  滤波器的鲁棒性越强,  $\gamma$  越大,  $H_\infty$  滤波器的鲁棒性越弱, 当  $\gamma \rightarrow +\infty$  时,  $H_\infty$  滤波器退化成标准的 Kalman 滤波器。系统的初始状态为:  $\hat{\mathbf{x}}_{\infty 0} = \hat{\mathbf{x}}_{20}$  和  $\mathbf{P}_{\infty 0} = \mathbf{P}_{20}$ 。则  $H_\infty$  滤波器存在条件和滤波方程为<sup>[8-9]</sup>

对于给定的  $\gamma > 0$ , 如果  $[\Phi_k \ \mathbf{G}_k]$  满秩, 则  $H_\infty$  滤波器存在当且仅当对于所有的  $k$ , 有

$$\mathbf{P}_{\infty(k)}^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k - \gamma^2 \mathbf{L}_k^T \mathbf{L}_k > 0 \quad (3)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\infty(k+1)} &= \Phi_k \mathbf{P}_{\infty(k)} \Phi_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{G}_k^T - \\ &\Phi_k \mathbf{P}_{\infty(k)} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k^T & \mathbf{L}_k^T \end{bmatrix} \mathbf{R}_{e,k}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{L}_k \end{bmatrix} \mathbf{P}_{\infty(k)} \Phi_k^T \\ \mathbf{R}_{e,k} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{L}_k \end{bmatrix} \mathbf{P}_{\infty(k)} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k^T & \mathbf{L}_k^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

则  $H_\infty$  滤波方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\infty(k+1)} &= \mathbf{P}_{\infty(k+1)} \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{\infty(k+1)} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{D})^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{\infty(k+1)} &= \Phi_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{\infty(k)} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \Phi_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{\infty(k)}) \\ \hat{\mathbf{y}}_{\infty(k+1)} &= \mathbf{L}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{\infty(k+1)} \end{aligned} \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{K}_{\infty(k+1)}$  为  $H_\infty$  滤波器第  $k+1$  步增益矩阵;  $\hat{\mathbf{x}}_{\infty(k)}$  和  $\hat{\mathbf{x}}_{\infty(k+1)}$  分别为  $H_\infty$  滤波器第  $k$  步和  $k+1$  步状态估计;  $\mathbf{P}_{\infty(k+1)}$  为  $H_\infty$  滤波器第  $k+1$  步广义估计误差协方差矩阵;  $\hat{\mathbf{y}}_{\infty(k+1)}$  为待估计向量  $\mathbf{y}_{k+1}$  的第  $k+1$  步  $H_\infty$  滤波估计值。

### 2 Kalman 滤波器性能评价

#### 2.1 Kalman 滤波性能的量化指标

引理 1<sup>[18]</sup> 如果系统模型是精确的,  $\mathbf{w}_k$  和  $\mathbf{v}_k$  为互不相关的零均值高斯白噪声序列, 而且它们的方差  $\mathbf{Q}_k, \mathbf{R}_{k+1}$  是精确的, 那么新息序列  $\{\mathbf{r}_{k+1}\}$  是一个零均值、白噪声序列, 且其方差为

$$E(\mathbf{r}_{k+1} \mathbf{r}_{k+1}^T) = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{2(k+1/k)} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1} \quad (6)$$

引理 2<sup>[19]</sup> 在式(1)的系统模型下, 设计式(2)的 Kal-

man 滤波器, 如果不等式(7)成立, 那么 Kalman 滤波器发散。

$$\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1} > \lambda \text{tr}(\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{2(k+1/k)} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1}) \quad (7)$$

式中,  $\lambda$  为储备系数,  $\lambda \geq 1$  且其具体值取决于实际系统;  $\text{tr}$  表示矩阵的迹。

以下是对引理 2 的进一步阐述。如果系统模型和噪声统计特性都是精确已知的, 由引理 1 可知,  $E(\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}) = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{2(k+1/k)} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1}$  成立, 从而每一时刻  $\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}$  的期望值应该等于  $\text{tr}(\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{2(k+1/k)} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})$ , 那么每一时刻  $\text{tr}(\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{2(k+1/k)} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})$  的值和  $\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}$  的实际值就应该非常接近, 即两者的比值接近于 1, 而且从整个滤波过程来看, 两者比值的均值更接近于 1; 如果滤波器的设计者对系统模型和噪声统计特性的信息了解不准, 导致估计误差增大, 而  $\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}$  又反映了实际估计误差的信息, 则  $\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}$  也将增大, 从而使得  $\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}$  与  $\text{tr}(\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{2(k+1/k)} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})$  的比值也将增大。引理 2 的含义就是当系统模型和噪声统计特性严重不准时, Kalman 滤波发散, 此时滤波过程中输出残差  $\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}$  将远大于  $\text{tr}(\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{2(k+1/k)} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})$ 。

以上定性分析了如何评价 Kalman 滤波器滤波性能, 为了能够从定量角度来评价 Kalman 滤波器滤波性能, 定义如下量化指标:

**定义 1** 定义一个指标  $J_i$ , 其表达式为

$$J_i = \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T \mathbf{r}_{i+1}}{\text{tr}(\mathbf{H}_{i+1} \mathbf{P}_{2(i+1/i)} \mathbf{H}_{i+1}^T + \mathbf{R}_{i+1})} \quad (8)$$

**定义 2** 定义反映 Kalman 滤波性能的指标  $\bar{J}_k$ , 其表达式为

$$\bar{J}_k = \frac{1}{M} \sum_{i=k-M+1}^k J_i \quad (9)$$

式(9)表示在  $[k-M+1, k]$  内对  $J_i$  采样取平均值, 其基本思想为用时间平均去近似  $E(\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1})$ , 从而评价 Kalman 滤波器性能, 其中,  $M$  表示采样的窗口长度。  $M$  为经验取值, 但  $M$  的取值需适中, 如果  $M$  取值过大, 则评价的记忆长度过长, 不能达到实时评价 Kalman 滤波器性能的目的; 如果  $M$  取值过小, 则不能达到用时间平均来近似统计均值的目的。实际应用中,  $M \in [10, 100]$  可较好地满足实时性和精度要求, 仿真表明在这个区间取值时, 其大小对 Kalman 滤波性能评价影响不大。

### 2.2 Kalman 滤波性能评价方法

为了进行 Kalman 滤波性能评价, 定义两个指标临界值,  $J_2$  和  $J_\infty$ 。

**定义 3** 如果 Kalman 滤波性能很好, 对于每一时刻的  $\bar{J}_k$ , 有  $\bar{J}_k \leq J_2$ , 则称  $J_2$  为 Kalman 滤波器高精度运行的上确界。

**定义 4** 如果 Kalman 滤波性能很差甚至发散, 对于每一时刻的  $\bar{J}_k$ , 有  $\bar{J}_k \geq J_\infty$ , 则称  $J_\infty$  为 Kalman 滤波器低精度运行的下确界。

从上面的定义可以得到评价 Kalman 滤波性能的方法, 当  $\bar{J}_k \leq J_2$  时, Kalman 滤波精度高, 此时可认为 Kalman 滤波器性能好; 当  $J_2 \leq \bar{J}_k \leq J_\infty$  时, Kalman 滤波器性能一般; 当  $\bar{J}_k \geq J_\infty$  时, Kalman 滤波精度非常低, 此时 Kalman 滤波器性能差。  $J_2$  和  $J_\infty$  为经验取值, 本文建议  $J_2 \in [1.0, 2.0]$  和  $J_\infty \in [30, 70]$ , 仿真表明在这个区间取值时, 其大小对 Kalman 滤波性能评价影响不大。

### 3 基于非线性映射的自适应混合 Kalman/ $H_\infty$ 滤波器

采用与固定权值估计加权求和混合滤波器类似的思想, 本文提出如下自适应调节权值的估计加权求和混合 Kalman/ $H_\infty$  滤波器, 其算法总结如下:

- (1) 采用式(2)构成 Kalman 子滤波器;
- (2) 采用式(3)~式(5)构成  $H_\infty$  子滤波器;
- (3) 混合 Kalman/ $H_\infty$  滤波器为

$$\bar{\mathbf{J}}_{k+1} = \frac{1}{M} \sum_{i=k-M+1}^k \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T \mathbf{r}_{i+1}}{\text{tr}(\mathbf{H}_{i+1} \mathbf{P}_{2(i+1/i)} \mathbf{H}_{i+1}^T + \mathbf{R}_{i+1})} \quad (10)$$

$$d_{k+1} = \begin{cases} 1, & \bar{\mathbf{J}}_{k+1} \leq J_2 \\ be^{-\frac{\bar{\mathbf{J}}_{k+1}}{a}}, & J_2 < \bar{\mathbf{J}}_{k+1} \leq J_\infty \\ 0, & \bar{\mathbf{J}}_{k+1} > J_\infty \end{cases} \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = d_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{2(k+1)} + (1 - d_{k+1}) \hat{\mathbf{x}}_{\infty(k+1)} \quad (12)$$

式(11)本质为将 Kalman 滤波性能指标  $\bar{\mathbf{J}}_{k+1}$  利用非线性映射的方法转变为取值范围在  $[0, 1]$  内的权值  $d_{k+1}$ , 其中,  $a$  与  $b$  的取值决定了权值  $d_{k+1}$  对量化指标变化的灵敏度和混合滤波器的稳定性。  $a$  的取值越小、  $b$  的取值越大, 那么权值  $d_{k+1}$  对量化指标变化的灵敏度越高, 但是混合滤波器的稳定性差, 综合考虑,  $a$  与  $b$  的取值需适中。为了保证混合滤波器的权值不超过 1,  $b$  的取值不能超过 1, 仿真结果表明, 当  $a \in [1, 10]$ ,  $b \in [0.5, 1]$  时, 权值能较好地自适应调节。  $\hat{\mathbf{x}}_{2(k+1)}$  为 Kalman 滤波器估计值,  $\hat{\mathbf{x}}_{\infty(k+1)}$  为  $H_\infty$  滤波器估计值。

第 2 节中研究了如何评价 Kalman 滤波性能, 建立了 Kalman 滤波性能的量化指标  $\bar{J}_k$ 。通过分析可以知道, 当  $\bar{J}_k \leq J_2$  时, Kalman 滤波器的精度高, 此时可认为 Kalman 滤波器性能好, 可以完全信任它, 权值  $d_k = 1$ ; 当  $J_2 \leq \bar{J}_k \leq J_\infty$  时, Kalman 滤波器性能一般, 既不可以完全信任 Kalman 滤波器, 也不能完全信任  $H_\infty$  滤波器, 此时权值  $0 < d_k < 1$ ; 当  $\bar{J}_k \geq J_\infty$  时, Kalman 滤波器性能差, 此时权值  $d_k = 0$ 。根据这个分析可见, Kalman 滤波性能量化指标  $\bar{J}_k$  和权值  $d_k$  之间存在某种关系, 为此需要在  $\bar{J}_k$  和  $d_k$  之间建立合理的数学模型, 本文采用如式(11)的非线性映射模型。

从数学意义上讲,  $\bar{J}_k$  是一个表示 Kalman 滤波器性能的参数,  $d_k$  是一个表示混合滤波器的设计者对 Kalman 滤波器

性能信任度的参数。在实际应用中,随着环境的改变,Kalman 滤波器的性能将改变,随之 $\bar{J}_k$  的值也改变,由式(11)使得  $d_k$  在 0 和 1 之间不断地变化,从而实现了混合滤波器的权值能够随着环境的改变在 0 和 1 之间自适应地调节其大小。

本文提出的新型混合 Kalman/ $H_\infty$  滤波算法与单一的 Kalman 滤波算法或  $H_\infty$  滤波算法相比,增加了一定的计算量,但能够同时获得鲁棒性能和较高的精度,适合某些对计算量要求不高,但对精度和鲁棒性要求较高的应用。

### 4 算法仿真

考虑离散系统滤波问题研究中广泛采用的全球定位系统(global positioning system, GPS)/推位(dead reckoning, DR)组合导航算例。采用航位 DR 系统位置误差和速度误差作为状态变量,即  $\mathbf{x}_k = [\delta s_k \ \delta v_k]^T$ ,其中, $\delta s_k$  表示 DR 系统第  $k$  时刻位置误差; $\delta v_k$  表示 DR 系统第  $k$  时刻速度误差,以航位推算的位置与 GPS 测量的位置之差作为观测量  $\mathbf{z}_{k+1}$ ,可以得到 GPS/DR 组合导航系统方程和观测方程为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \delta s_{k+1} \\ \delta v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T + \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta s_k \\ \delta v_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \delta s_{k+1} \\ \delta v_{k+1} \end{bmatrix} + \mathbf{v}_{k+1} \\ \mathbf{y}_{k+1} = L_{k+1} \begin{bmatrix} \delta s_{k+1} \\ \delta v_{k+1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (13)$$

式中, $\mathbf{y}_{k+1}$  为第  $k+1$  时刻一维待估计量,通常为状态变量的线性组合; $L_k$  为估计矩阵,根据不同的估计要求设定; $\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$  为不确定噪声信号; $T$  为采样周期,本系统中  $T=0.1 \text{ s}$ ; $\alpha$  为代表模型不确定性的参数, $\alpha=0$  即为无摄动的系统。

在进行滤波之前需要对各滤波器的参数进行设置,选取 Kalman 滤波器参数为系统噪声方差阵  $\mathbf{Q}_k = 1 \text{ m}^2/\text{s}^2$ ,观测噪声方差阵  $\mathbf{R}_k = 1 \text{ m}^2$ ;选取  $H_\infty$  滤波器的鲁棒参数  $\gamma = 3.5$ ;混合 Kalman/ $H_\infty$  滤波器参数为  $M = 50, J_2 = 1.5, J_\infty = 50, \alpha = 4, b = 1$ 。

为了验证本文提出的方法,仿真分为 3 大类,第 1 类是系统模型精确,观测噪声统计特性精确,但是系统噪声统计特性不准;第 2 类是系统模型精确,系统噪声统计特性精确,但是观测噪声统计特性不准;第 3 类是系统噪声和观测噪声的统计特性精确,但是系统模型存在摄动。

(1) 系统模型精确,观测噪声统计特性精确,但是系统噪声统计特性不准

待估计量  $\mathbf{y}_k$  为位置误差,设定  $L_k = [1 \ 0]$ ,仿真过程分为 4 段,在 1~1 000 步系统噪声是均值为 0 m/s、方差为  $1 \text{ m}^2/\text{s}^2$  的速度高斯白噪声;在 1 001~2 000 步系统噪声是均值为 2.511 m/s、方差为  $4.38 \text{ m}^2/\text{s}^2$  均匀分布的速度白噪声;在 2 001~3 000 步系统噪声是速度高斯一阶马尔可夫有色

噪声,模型为

$$\mathbf{w}(k) = 0.9 \times \mathbf{w}(k-1) + \tau(k) \quad (14)$$

式中, $\tau(k)$  是均值为 0 m/s,方差为  $1 \text{ m}^2/\text{s}^2$  的速度高斯白噪声。在 3 001~4 000 步系统噪声是均值为 0 m/s,方差  $100 \text{ m}^2/\text{s}^2$  的速度高斯白噪声,整个过程中观测噪声采用的都是均值为 0 m、方差为  $1 \text{ m}^2$  的位置高斯白噪声。仿真曲线如图 1 所示,各段的估计误差的均方根 (root mean square, RMS) 统计值如表 1 所示。

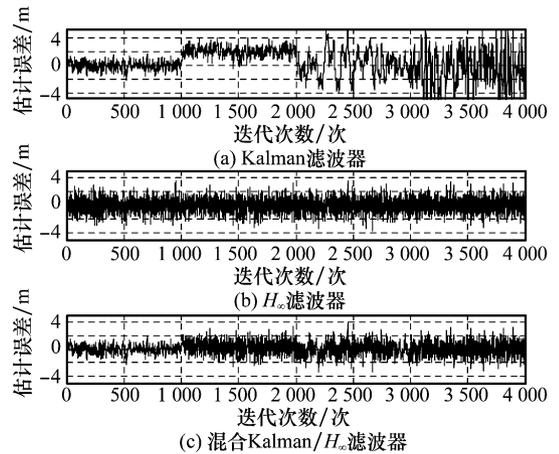


图 1 系统噪声统计特性变化时 3 种滤波器对位置误差的估计误差曲线图

表 1 噪声统计特性变化时 3 种滤波器在各段的位置误差的估计误差的 RMS 统计值

滤波器类型	方差准确的高斯白噪声段	非高斯白噪声段	高斯一阶马尔可夫有色噪声段	方差不准的高斯白噪声段	滤波全过程
Kalman	0.581	2.089	1.847	2.834	2.009
$H_\infty$	0.954	1.048	1.040	1.007	1.013
Kalman/ $H_\infty$	0.582	1.058	1.052	1.007	0.946

从图 1 和表 1 可以看出,当系统噪声为方差准确的高斯白噪声时,此时 Kalman 滤波器的精度高于  $H_\infty$  滤波器的精度,而且混合 Kalman/ $H_\infty$  滤波器的精度与 Kalman 滤波器的精度相当;当系统噪声为非高斯的白噪声或高斯一阶马尔可夫有色噪声或方差不准的高斯白噪声时,此时 Kalman 滤波器的精度低于  $H_\infty$  滤波器的精度,而混合 Kalman/ $H_\infty$  滤波器的精度与  $H_\infty$  滤波器的精度相当;在整个滤波过程中混合 Kalman/ $H_\infty$  滤波器的精度要高于 Kalman 滤波器和  $H_\infty$  滤波器。由此说明本文提出的混合 Kalman/ $H_\infty$  滤波方法与 Kalman 滤波和  $H_\infty$  滤波方法相比,对于系统噪声统计特性变化应用具有更高的滤波精度。

(2) 系统模型精确,系统噪声统计特性精确,但是观测噪声统计特性不准

待估计量  $\mathbf{y}_k$  为速度误差,设定  $L_k = [0 \ 1]$ ,仿真过程分为 4 段,在 1~1 000 步观测噪声是均值为 0 m、方差为  $1 \text{ m}^2$  的位置高斯白噪声;在 1 001~2 000 步观测噪声是均值为

5.0 m、方差为 8.86 m<sup>2</sup> 均匀分布的位置白噪声;在 2 001~3 000步观测噪声是位置高斯一阶马尔可夫有色噪声,模型为

$$v(k) = 0.9 \times v(k-1) + \tau(k) \quad (15)$$

式中,τ(k)是均值为 0 m,方差为 25 m<sup>2</sup> 的位置高斯白噪声。在 3 001~4 000步观测噪声是均值为 0 m,方差 100 m<sup>2</sup> 的位置高斯白噪声,整个过程中系统噪声均采用均值为 0 m/s、方差为 1 m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup> 的速度高斯白噪声。仿真曲线如图 2 所示,各段的速度估计误差的 RMS 统计值如表 2 所示。

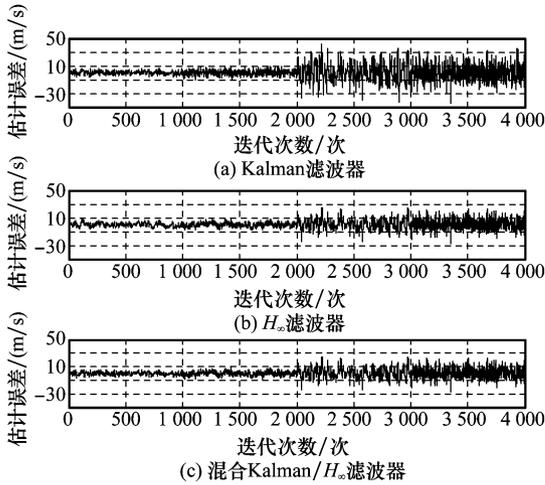


图 2 观测噪声统计特性变化时 3 种滤波器对速度误差的估计误差曲线图

表 2 观测噪声统计特性变化时 3 种滤波器在各段的速度误差的估计误差的 RMS 统计值 m/s

滤波器类型	方差准确的高斯白噪声段	非高斯白噪声段	高斯一阶马尔可夫有色噪声段	方差不准的高斯白噪声段	滤波全过程
Kalman	2.224	3.495	15.276	11.065	9.656
H <sub>∞</sub>	2.701	2.978	8.593	7.142	5.956
Kalman/H <sub>∞</sub>	2.226	2.996	8.608	7.143	5.801

从图 2 和表 2 可以看出,当观测噪声为方差准确的高斯白噪声时,Kalman 滤波器的精度高于 H<sub>∞</sub> 滤波器的精度,而且混合 Kalman/H<sub>∞</sub> 滤波器的精度与 Kalman 滤波器的精度相当;当观测噪声为非高斯的白噪声或高斯一阶马尔可夫有色噪声或方差不准的高斯白噪声时,此时 Kalman 滤波器的精度低于 H<sub>∞</sub> 滤波器的精度,而混合 Kalman/H<sub>∞</sub> 滤波器的精度与 H<sub>∞</sub> 滤波器的精度相当;在整个滤波过程中混合 Kalman/H<sub>∞</sub> 滤波器的精度要高于 Kalman 滤波器和 H<sub>∞</sub> 滤波器。由此说明本文提出的混合 Kalman/H<sub>∞</sub> 滤波方法与 Kalman 滤波和 H<sub>∞</sub> 滤波方法相比,对于观测噪声统计特性变化应用具有更高的滤波精度。

(3) 系统模型存在摄动,系统噪声和观测噪声统计特性精确

待估量 y<sub>k</sub> 为位置误差,设定 L<sub>k</sub>=[1 0],仿真过程分为 3 段,在 1~2 000 步模型无摄动,即摄动参数 α=0 s;在 2 001~4 000 步模型摄动参数 α=0.1 s;在 4 001~6 000 步

模型摄动参数 α=0.5 s。整个过程中系统噪声采用均值为 0 m/s、方差为 1 m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup> 的速度高斯白噪声,观测噪声采用均值为 0 m、方差为 1 m<sup>2</sup> 的位置高斯白噪声。仿真曲线如图 3 所示,各段的估计误差的 RMS 统计值如表 3 所示。

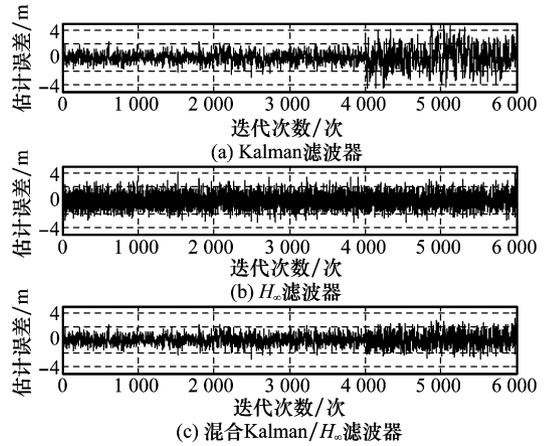


图 3 系统模型存在摄动时 3 种滤波器对位置误差的估计误差曲线图

表 3 系统模型存在摄动时 3 种滤波器在各段的位置误差的估计误差的 RMS 统计值 m

滤波器类型	α=0 s 段	α=0.1 s 段	α=0.5 s 段	滤波全过程
Kalman	0.583	0.822	1.999	1.293
H <sub>∞</sub>	0.998	1.011	1.008	1.006
Kalman/H <sub>∞</sub>	0.583	0.847	1.012	0.833

从图 3 和表 3 可以看出,当系统模型不存在摄动或存在小摄动时,Kalman 滤波器的精度高于 H<sub>∞</sub> 滤波器的精度,而且混合 Kalman/H<sub>∞</sub> 滤波器的精度与 Kalman 滤波器的精度相当;当系统模型存在大摄动时,此时 H<sub>∞</sub> 滤波器的精度高于 Kalman 滤波器的精度,而混合 Kalman/H<sub>∞</sub> 滤波器的精度与 H<sub>∞</sub> 滤波精度相当;在整个滤波过程中混合 Kalman/H<sub>∞</sub> 滤波器的精度要高于 Kalman 滤波器和 H<sub>∞</sub> 滤波器。由此说明本文提出的混合 Kalman/H<sub>∞</sub> 滤波方法与 Kalman 滤波和 H<sub>∞</sub> 滤波方法相比,对于模型存在摄动的应用具有更高的滤波精度。

### 5 结 论

本文提出了一种基于非线性映射的自适应调节权值混合 Kalman/H<sub>∞</sub> 滤波器,其基本思想为,通过实时评价 Kalman 滤波器性能,建立性能指标与混合参数之间的非线性关系,从而实现混合权值的自适应调节,适应噪声统计特性及系统模型参数的变化。GPS/DR 组合导航仿真结果表明,本文提出的混合 Kalman/H<sub>∞</sub> 滤波方法与 Kalman 滤波和 H<sub>∞</sub> 滤波方法相比,对于干扰噪声统计特性变化和模型存在摄动的应用具有更高的滤波精度。

### 参考文献:

[1] Mohamed S M K, Nahavandi S. Robust finite-horizon Kalman

- filtering for uncertain discrete-time systems[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2011, 57(6): 1548–1552.
- [2] Wang F, Balakrishnan V. Robust Kalman filters for linear time-varying systems with stochastic parametric uncertainties[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2002, 50(4): 803–813.
- [3] Xie L H, Soh Y C, Souza C E D. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1994, 39(6): 1310–1314.
- [4] Sayed A H. A framework for state space estimation with uncertain models[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2001, 46(7): 998–1013.
- [5] Xu H, Mannor S. A Kalman filter design based on the performance/robustness tradeoff[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2009, 54(5): 1171–1175.
- [6] Barmish B R. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system[J]. *Journal of Optimization Theory and Application*, 1985, 46(4): 399–408.
- [7] Nishiyama K. Robust estimation of a single complex sinusoid in white noise- $H_\infty$  filtering approach[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1999, 47(10): 2853–2856.
- [8] Hassibi B, Sayed A H, Kailath T. Linear estimation in Krein spaces. Part I: theory[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1996, 41(1): 18–33.
- [9] Hassibi B, Sayed A H, Kailath T. Linear estimation in Krein spaces. Part II: application[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1996, 41(1): 34–42.
- [10] Dan S. *Optimal state estimation Kalman,  $H_\infty$ , and nonlinear approaches*[M]. New Jersey: Wiley, 2006.
- [11] Berstein D S, Haddad W M. Steady state filtering with an  $H_\infty$  error bound[C]//*Proc. of the American Control*, 1989: 847–852.
- [12] Wang Z D, Unbehauen H. Robust  $H_2/H_\infty$  state estimation for systems with error variance constraints: the continuous time case[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1999, 44(5): 1061–1065.
- [13] Wang Z D, Huang B. Robust  $H_2/H_\infty$  filtering for linear systems with error variance constraints[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2000, 48(8): 2463–2467.
- [14] Gao H J, Chen T G.  $H_\infty$  estimation for uncertain systems with limited communication capacity[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2007, 52(11): 2070–2084.
- [15] He Y, Wu M, She J H. Improved bounded real lemma representation and  $H_\infty$  control of systems with polytopic uncertainties[J]. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 2005, 52(7): 380–383.
- [16] Dan S, Hossny E S. Hybrid  $H_2/H_\infty$  estimation for phase-locked loop filter[C]//*Proc. of the American Control*, 1996: 2212–2216.
- [17] Jwo D J, Chen R J. Mixed  $H_2/H_\infty$  filtering approach for GPS/INS navigation systems[C]//*Proc. of the Recent Advances in Space Technologies*, 2003: 409–414.
- [18] Mehra R K. On the identification of variances and adaptive Kalman filtering[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1970, 15(2): 175–184.
- [19] Xu J S, Qin Y Y, Peng R. New method for selecting adaptive Kalman filter fading factor[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2004, 26(11): 1552–1554. (徐景硕, 秦永元, 彭蓉, 自适应卡尔曼滤波器渐消因子选取方法研究[J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(11): 1552–1554.)

## 作者简介:

张勇刚(1981-),男,副教授,博士,主要研究方向为自适应滤波、组合导航。

E-mail: zhangyg@hrbeu.edu.cn

黄玉龙(1990-),男,硕士研究生,主要研究方向为自适应滤波、组合导航。

E-mail: 2420449655@qq.com

李 宁(1980-),女,助理研究员,博士,主要研究方向为自适应滤波、组合导航。

E-mail: ningli@hrbeu.edu.cn

李雷雷(1980-),男,工程师,博士,主要研究方向为自适应滤波。

E-mail: gang811025@yahoo.com.cn