

# 晚清数学的发展

特古斯

(内蒙古师范大学 科学史研究所, 呼和浩特 010022)

**摘要:** 晚清数学的发展主要是由技术进步的派生需求引导的, 数学发展的目标与中体西用的要求之间存在冲突, 这种矛盾最终导致中国数学的全盘西化。西学东渐改变了中算知识结构却未能改变知识价值的结构, 数学会通的效率受到考核技术的制约, 考核技术的水平受到中体西用的制约。数学概念的进化因而受到阻碍, 会通工作陷入效益递减的境地, 最终导致中算被完全取代。

**关键词:** 晚清数学; 西学东渐; 中算; 数学会通

**中图分类号:** O-11 **文献标志码:** A **文章编号:** 1009-1971(2009)01-0001-01

数学可以通过积累而发展, 但中算却不同, 历史上曾经几度兴衰。晚清数学的发展没有再度陷入这种历史循环, 中算终于被彻底放弃, 个中缘由仍有待于进一步考查。本文将探讨晚清数学的结构与变迁, 分析数学知识的增量与特性, 考查进步和退化的问题转换, 并据此说明其被完全取代的原因。中算缺乏西算那种相对独立的自主性, 晚清数学的发展因而陷入效益递减的境地, 最终它被西方数学取而代之。

## 一、数学发展的动力

晚清数学的发展直到 1868 年仍然相对独立于新技术的开发, 但此后若干年的发展主要是由技术进步的派生需求引导的。数学发展的目标是技术收益的最大化, 中体西用的结果是数学知识的技术化。两者之间存在冲突, 这种矛盾最终导致中国数学的全盘西化。

### 1 技术压力

在古代, 人口对资源的压力往往由于战争与瘟疫得到缓解, 缓解压力的关键不在资源的变化而在人口的变化。近代西方开始转换模式, 模式转换是由技术变化引起的, 技术的进步可以扩张资源的基数。全球经济一体化进程由此发端, 随

着近代西方的海外扩张, 中国也被卷入其中。在鸦片战争前的一个世纪里, 中国人口由 1.5 亿增加到 4 亿<sup>[1]</sup>, 对土地构成越来越大的压力。假如技术条件不变, 中国或许还能重复循环传统社会结构, 即使改朝换代也将自然经济进行到底。然而, 技术条件发生了变化, 由于稀缺与竞争普遍存在, 技术的传播势在必行。为了发挥技术的潜力必须提高组织的效率, 中国再也不可能按照传统方式重建社会, 虽然制度创新的过程漫长而又曲折。

中国近代的技术变化是由内部竞争引导的, 内战引起战争双方的技术竞争, 为西方的闯入提供了外部条件。清代中期以前, 年交易额上千万两的商品据估计只有七种, 这说明了当时中国市场的规模。其中, 粮食约占商品值的 40%, 而棉布与盐约占 39%, 这说明了当时中国市场的特性。棉布与盐的生产者并未脱离农业, 交换主要是在农民之间进行的, 基本上是粮食同盐布间的交换<sup>[2]</sup>。起初, 西方所占中国市场的份额并不很大, 原因是交易费用太高, 包括种种敲诈勒索。例如, 英国棉布年输入额还不到 1 万两, 因为消费价可以达到商品值的两倍以上。然而, 英国通过发展技术不断降低生产成本, 至 19 世纪 30 年代初, 年输入额突破 30 万两。从此, 在中英棉纺织品贸易中, 中方由顺差变为逆差并且逆差不断

收稿日期: 2008-09-13

基金项目: 教育部重大项目“晚清科技史研究”(05JJD770018)

作者简介: 特古斯(1956-), 男, 内蒙古呼伦贝尔人, 教授, 从事数学史研究。

扩大<sup>[3]</sup>。

一方面,英国生产持续发展,急需扩大中国市场,以便甩出过剩产品;另一方面,天朝上国无所不有,自然经济自给自足,无意扩展国际贸易。英国屡次遣使访华,谋求减少通商限制、降低交易费用,甚至要求割地。乔治三世在给乾隆皇帝的信中表示,英国的目的不在扩张领土或者寻求财富,而在交流技术与传播知识<sup>[4]</sup>。马嘎尔尼勋爵则随团带来不少表现当时英国技术水平的器械作为礼物,但是,乾隆并不领情,发展科学技术与维护天朝体制之间存在难以调和的矛盾。清廷坚持闭关锁国、一口通商、公行代理。不过,在行商与外商之间存在共谋,如同官员与行商之间存在共谋,他们都有与其政府不同的效用函数。鸦片贸易始终是一个难题,禁令使它绕过公行,反而导致进口猛增。官员发现,在分割好处时自己却被排除在外,于是缉私艇与走私船之间不断发生武装冲突。

外交努力既然无济于事,英国决定诉诸武力,强行打开中国大门。鸦片战争的胜败只和实力有关而与目的无关,实力只和技术有关而与人数无关。开战时英军不过 4 000 人,军舰不过 16 艘,却装备了 540 门火炮。此外,还有 4 只武装轮船,1 只运兵船和 27 只运输船<sup>[5]</sup>。1841 年 8 月英军驶抵天津海口,而山海关尚无一门大炮可用。凭借军事技术优势,英国人得到极大好处,甚至超出原计划索要的权益。随着交易费用的降低,英国商品的竞争力大为增强,民族手工业饱受摧残。丧权辱国的经历令人感到引进技术的需要,但这并未成为国策,直到出现极度危险的内部竞争者。

太平天国的出现使得二人对局变为三方对抗,任何一方都不可能同时吃掉另外两方,而任何两方都有可能联合吃掉另外一方。不过,大清帝国无法与太平天国合作,因为后者想要控制的是同一片天下的资源。洋人的目标是要保护自己在华的既得利益,太平天国虽不限制通商却不肯承认他们的条约权利,不可能与之合作打江山,然后分享天下。洋人遂发现,利益最大化的方案在于趁机向朝廷索要更多权益,然后帮助清军除掉太平天国。由于担心洋人会助逆犯顺,清廷不肯轻易就范。洋人于是再次动武,清军不敌只好谈和。洋人得到所要的一切,清军得到新式

武器,太平天国成为共同的敌人。定都南京以后,太平军开始更新武器,陆续装备了许多洋枪、洋炮。作为他们的主要对手,湘军和淮军于是也不得不突破夷夏大防来加紧装备新式武器,毕竟打胜仗才是硬道理。经过十年内战,朝廷看到新式武器的效用果然不同凡响。由此想到,发展军事技术不仅可以镇压其他农民武装,而且日后还可用来对付洋人。1861 年,引进技术成为政府决策,一批军工企业随之而起。

冷兵器的一个优点是维护费用较低,几乎可以不变成本反复利用。新式武器则不然,它有赖于一次性消耗品,除非源源不断地补充弹药,否则不能发挥正常的功能。生产新式武器所需原料较多、技术要求较高,导致军费开支大增。又因管理跟不上,生产成本居高不下,财政压力越来越大。军费通常依靠关税,另外还靠“搜刮”。两次鸦片战争的结果使得关税税率大跌,税收增量有限,无法满足日益增长的军费需求。搜刮的办法此时也已行不通了,因为“军兴以来,凡有可设法生财之处,历经搜刮无遗”<sup>[2]180</sup>,民间再无钱财可供搜刮。无论如何,军费问题必须解决,否则无以生存。洋务派最终发现另有生财之处,根据西方经验,他们提出扩大技术引进范围。西方民用技术虽属技艺之末,却可用来“振兴工商”。发展近代工商业既可与洋商争利,又可作为军费来源之一,而且冶金、矿业和运输业的发展还能降低军火生产的成本。19 世纪 70 年代,清廷开始加大技术引进的力度,以期全面实现近代化。

在技术引进的过程中存在一定的风险,项目的评估与设备的鉴定无不需要相应的知识,而代理利益与国家利益不尽一致。掌握知识存在规模效益,可以取代高薪洋员从而降低生产成本,可以自主开发国内资源从而“权自我操,利自我开”。有些人感到,知识的扩张至少应当与技术引进同等重要,因为技术的发展建立在知识存量之上;另一些人则以为要点在于制器尚象,基础知识不过是西学的皮毛,于实用无大裨益。曾国藩等人觉得“洋人制器出于算学”,因为制器有赖于格致,而数学说明了格致原理。他的意见很有代表性,当时许多洋人也都认为数学与科学相似,可用于收益最大化。

总之,内部和外部的竞争打破了清朝正常的

财政平衡, 实现技术近代化是唯一的出路, 知识扩张是技术进步的派生需求。人们逐渐意识到“除非基础知识存量扩张, 不然新技术的发展最终会陷入收益递减的境地”<sup>[6]</sup>, 虽然朝廷未能达成这样的共识。

## 2 知识存量

晚清数学的初始条件包括传统知识、传入知识及其会通结果。由于此前中算家的努力, 特别是经过乾嘉学派的发掘与整理, 一些优秀的传统数学结果得以重现于世。明末清初, 一些西方数学知识传入中国, 中算家将其中的一部分收入《数理精蕴》之中, 并有所发挥。中国古代数学专门研究算术问题, 几何与代数对象也都作为算术问题来研究, 数学结果总与某个特定的值相联系。随着西学东渐, 中算家感到几何有其独立意义, 数学遂被划为算术与几何两大部分。后来中算依此分类, 算术包括代数, 几何包括三角。

早期的中算虽也涉及无理数, 但是它的性质没有引起关注, 中算家讨论问题的范围通常并不超出有理数域。中国古代的算术基础建立在率的概念之上<sup>[7]</sup>, 率的运用并不完全取决于几何直观, 这有别于西算传统。依西方传统观念, 数不可独立于量而算术不可独立于几何。梅文鼎将纯粹的算术关系归之于自然之理, 同时也不排斥直观基础。经过会通中西, 中算家拒绝了西算的看法却接受了西算的做法, 《数理精蕴》的运算法则均有几何依据。焦循在此基础上给出基本运算律, 虽然未能摆脱直观, 结果却是一般性的。

勾股算术的基础是因式分解与乘法公式, 由于附加的约束条件, 它们有其特殊的形式。古代的“勾实之矩”与“股实之矩”表达了最基本的因式分解公式, 并说明了其他同类结果, 它们是由馨折形与矩形的关系所确立<sup>[8]</sup>。乘法基本公式为二次三项式, 其中一项可负, 是由长方形与正方形的关系所确立。中算家的开方法涉及乘法公式。

$$(x_1 + L + x_n)^k \sum_{k_1 + L + k_n = k} \frac{k!}{k_1! L k_n!} x_1^{k_1} L x_n^{k_n}$$

但是, 只有  $n = 2$  的特殊情形, 也即二项式, 被保留下来作为“开方作法本源”。直到明安图以前, 一般情形未能得到有效利用, 甚至没有整理出来。

比例算法在中国古代有着广泛而灵活的应用, 问题复杂多变而原理极其简单, 即内项积等于外项积。比例的其他一些性质属于西学, 《数理精蕴》讨论种种“和较比例”, 给出合比、分比及合分比等基本关系。中国古代能求等差数列与等比数列的部分和, 刘徽能求无穷递减等比级数的和, 等差中项与等比中项后来都列入“算法原本”。关于一次同余式组, 秦九韶克服没有素数概念的困难, 给出一般解法。朱世杰为二项式系数赋予垛积意义, 得出高阶等差级数求和公式, 进而给出幂和公式。汪莱为二项式系数赋予组合意义, 得出二项式系数之和, 给出组合公式并指出其对称性质。董祐诚由割圆连比例导出方锥堆和纵方堆, 它们是二项式系数的两个线性组合。《数理精蕴》尝论对数求法, 包括中比例法、递次自乘法以及递次开方法, 中算家用到乘除变加减及乘方变乘法等性质。

《九章算术》有盈不足术, 解法涉及数字方阵, 方程的起源可能与此有关。经过刘徽的阐发, 中国古代的线性方程组解法一般化, 特别是行的初等变换已臻于成熟。清代中算家恢复了古代的方程论, 不同于和算家, 中算家没有引进行列式的概念。古代的开方式在形式上可对应于代数方程, 实质上则大不相同, 它的目的不在确定解的结构而在求出一个正根。最初的开方式对应于二项方程, 这样的方程有, 且只有一个正根, 因为它们的系数符号相反。带纵开方式有时不止一个正根, 虽然对应于同一个代数方程, 但中算家并不觉得它们是同一个开方式, 因为, 它们的演段性质不同<sup>[8]962-963</sup>。传入的代数方程数值解法虽不及传统方法简便, 但其理论化的思想倾向引起汪莱的注意, 方程的正根个数于是成为他的研究对象。对于某些特殊类型的方程, 汪莱已能正确判定有无正根以及有多少正根, 他还给出一定条件下正根与正根的关系。在此基础上, 李锐给出符号法则, 与笛卡尔法则基本一致<sup>[9]</sup>。

传统几何知识关注的是图形的度量, 度量图形的关键是等积变换, 面积由出入相补确定而体积由截面原理确定。传统的面积和体积理论均与勾股术有关, 构成平面图形的基本元素是勾股形, 构成立体图形的基本元素是具有勾股形面的阳马和鳖臑。西学东渐以后, 梅文鼎以三角形取

代勾股形并以立三角取代阳马和鳖臑,改变了传统知识的结构。传入的几何知识不同于传统知识,它更加关注图形的性质,图形的度量依赖于这些性质。

《数理精蕴》由点、线、面、体、角、圆、弧、平行等基本概念出发,分别讨论平面和立体图形的性质,规定出相似和全等的条件。要点包括三角形的性质、面积及其内圆和外圆半径,四边形的分类、性质、面积以及多边形的内角和,圆的有关性质与度量乃至椭圆面积求法;空间图形定位与多面角的性质,多面体与旋转体的度量,甚至还有度量椭球的尝试。三角形内角和等于二直角,两边之和大于第三边,内角平分线分对边之比等于两边比。平行四边形的对角线互相平分,过对角线作相交二线平行于边,则对角线旁所成横直二形等积。圆是正多边形的极限,正多边形的面积取决于边长而边长由圆径确定,等周面积以圆为大。相交弦截段适合“递转”比例,圆外相交的割线之比等于圆外截段的递转之比。等高处截积相等的图形等积,同底等高锥体为柱体三分之一。相似多面体的体积之比为相似比的平方,正多面体仅有五种,体积取决于棱长而棱长可由球径确定。表面积一定时球的体积最大,居圆困三分之二,球缺取决于球扇形。球表面积为大圆面积的四倍,球冠面积等于等高圆困的侧面积,旋转椭圆体与球体之比等于半轴与半径的平方比。

明末清初的历法研究展现了三角学的价值,梅文鼎为此展开较为系统的研究,一些成果被收入《数理精蕴》。三角学研究割圆八线,直到晚清以前,三角函数没有被分离出来作为独立的对象。正弦的定义相当于正弦函数乘以半径,它是“八线之主”,其他各线均可由此确定。正弦求余弦用勾股关系,切割诸线由此二线表出,构成“八线相当法”。钝角的八线用补角的八线,可能的符号变化没有提及,也未涉及任意角的八线。八线公式以倍角、半角及两角和的正弦公式最为基本,此外还有三倍角的正弦公式,它们是与立表需要相适应的。三角形的边角关系有正弦定理、余弦定理及正切定理,三边与半角的关系有正切公式,其证多有合于梅氏证法。梅文鼎系统地总结了传入的球面三角知识,给出正弦定理和余弦定理,他没有注意到“加减法”引起的

符号变化。关于球面三角形的解法,梅氏引进次形和垂弧的概念,为公式证明作出很大贡献。在此基础上,汪莱正确地运用三角函数符号法则,完善了次形法与垂弧法。他规定出球面三角形有解的条件,并讨论解的个数及其范围,使球面三角知识得以严谨而系统化<sup>[10]</sup>。

杜氏三术于 18 世纪初传入中国,其中“求周径密率捷法”相当于圆周率的幂级数,“求弦矢捷法”则为割圆八线的两个关键展开式。采用杜氏三术于算术经济非常有利,以之立表既能大大减轻计算工作量,又能随度确定弦矢而不依赖六宗三要二简法。然而,这些结果长期得不到应用,由于缺乏证明,中算家还不清楚它们是否可靠。为此,明安图割圆连比例法和级数回求法,证明了杜氏三术并导出若干等价结果。割圆连比例实为几何的二简法,用于确定全弧弦矢与分弧弦矢的关系,由此通过极限方法得到弦矢与弧背的关系。级数回求则为代数方法,用于确立弦矢求弧背术,由此得到求周径密率捷法。在此基础上,董祐诚为割圆连比例法提供垛积的解释,从而简化了明安图的证明。明安图的工作涉及反三角函数,但他并未从中抽出这样的概念,反三角函数及其恒等关系未能成为专门的研究对象。

截至近代为止,尽管知识价值的结构没有改变,但知识存量的结构已有较大变化。论证的发展是会通的结果,由此导致中算概念的发展,数学知识因而更加系统化。然而,代数问题受到实在现象的支配,三角知识受到几何概念的制约,一般关系未能成为主要的目标。

### 3 存量扩张

晚清数学的扩张主要表现在符号代数、解析几何及微积分的引进上,引进是由两种不同需求决定的,其中之一相对独立于新技术的开发。此外,早期数学会通的自然延伸引起清代级数论的进步,并导致垛积术的进一步发展。

晚清级数论至少在两个方面获得成功:其一是基本初等函数均已展开;其二是展开方法最终得以完善。项名达取消了割圆连比例的条件限制,并由特殊的级数回求法发展出一般的明安图变换,为初等函数的幂级数展开提供了适当的基础。经过改进的割圆术既说明了大小弦矢的一般关系又给出割圆八线的基本关系,据此,大小

八线以及弧背与八线均可互求, 所需仅为四则运算、极限方法和明安图变换。项名达发现弦矢, 可对应于递加数而递加数可对应于二项式, 至于弦矢可对应于二项式其意义究竟何在他没有说清楚, 因为这种对应关系取决于纯形式的定义。有理二项式是改进割圆术的另一个结果, 戴煦将它总结为形式化的运算, 并成功应用于对数函数的展开。指数函数的展开是“对数还原”的结果, 还原方法包括二项式定理与明安图变换, 戴煦等人运用前者, 而李善兰则采用后者。基本初等函数既已展开, 明安图变换又能级数反演及复合, 则初等函数一般均可展开。例如, “八线对数”的展开, 只须复合三角函数与对数函数的展开式, 其代表作有戴煦的《假数测圆》。此外, 中算家尚有个别非初等函数展开式, 如“椭圆求周”, 展开方法仍为二项式定理而关键步骤是归纳的<sup>[11]</sup>。

清代级数论的关键方法大多可以归因于朱世杰的垛积招差术<sup>[8][4255]</sup>, 于是, 人们多以为幂级数展开式的系数与垛积有关, 垛积术由此获得动力开始独立发展。李善兰的《垛积比类》总结前人的结果, “于九章外别树一帜”, 给出一些垛积公式。这些公式表达了二项式系数的若干组合特性, 包括二项式系数的线性组合与自然数幂和的关系、线性组合与平方和的关系以及不同线性组合的几个恒等关系, 它们均以二项式系数的乘法特性及累加关系为基础。尖锥术可由垛积术导出, 李善兰据此将某些特定展开式相互联系起来。但它虽能推出新的展开式, 却无法确定其和函数, 所以, “级数有合于尖锥而尖锥不可以释级数, 盖已有级数强可以尖锥解之, 未有级数则终难以尖锥得之”<sup>[12]</sup>。

《垛积比类》虽然较为系统却沿袭了古代的传统, 李善兰没有提供必要的证明, 他没有将自己所了解的符号代数方法引入其中。变化是从刘彝程开始的, 刘氏推动垛积术的进一步发展, 将李氏三角自乘垛推广为一般的三角相乘垛。在他的工作中传统方法仍占主导地位, 但他开始引用代数表达式, 尝试证明垛积术基本公式。这种代数化与理论化的思想倾向是由西学东渐引起的, 作为自强运动期间西方数学译著的校算者, 刘彝程了解其中的代数内容及其方法。他的工作对后来的学者产生很大影响, 清末垛积术基

本上实现代数化, 并在理论化方面继续努力探索<sup>[13]</sup>。晚清算家在数论方面还有另一些成果, 刘彝程关于整数勾股问题的研究取得进展, 由此导致二元不定方程的整数解。秦九韶曾经以“两两连环求等”解决当时没有素数概念的困难, 晚清算家不仅提出若干“考数根法”, 还通过素因子分解简化了大衍求一术的操作手续。

为了扩大新教的影响, 1859年, 墨海书馆出版《代数学》和《代微积拾级》。为自强图存, 江南制造局从 1872 年开始陆续刊行《代数术》、《微积溯源》、《三角数理》及《决疑数学》。这些译著的内容及其表达形式跟过去的中西两家之法都不一样, 数学对象主要是一般关系, 新方法、新概念和大量符号被用来建立这样的关系。传统数学无法解释这些结果, 而中算的结果却能由此得到说明, 因此, 以之取代中算是合理的。然而, 这一进程并不顺利, 思想观念的冲突固然是原因之一, 数学语言的障碍也是不容低估的。中算家在表达形式上尽量保持中国特色, 例如, 分数记法往往“上法下实”, 这是中西体用之间的一种选择。

《代数学》和《代数术》主要讲函数论、多项式、方程论、连分数与幂级数, 其中, 有些内容完全是陌生的, 另一些内容虽不陌生却涉及新的概念和方法。函数关系不是传统数学的研究对象, 晚清学者以多项式方程解释函数关系, 然而, 方程的“元”对应于常量而非变量。由于忽视其中极限与无限的讨论, 中算家未能充分理解连续变量的概念, 函数概念尚未真正建立起来。多项式与方程论是中算家比较熟悉的, 然而代数基本定理、根式可解的范围等等理论成果却是传统中算所未及的。根据解的结构扩张数系也是超出中算范围的, 棣美弗利用纯形式的定义说明了弦矢与二项式的关系。中算家的级数论也曾注意到收敛性问题, 但他们并未因此规定出任何收敛条件, 棣莫甘在此给出两个收敛性判别法。他还定义并引用了数学归纳法, 晚清算家似乎没有发现, 这对建立他们热衷的递归关系会有很大帮助。19世纪末, 《算式解法》由线性方程组导入行列式, 初等代数知识至此大备<sup>[14]</sup>。符号代数的传入改变了中算知识的结构, 人们据此重新解释古代的结果, 引起中算概念的显著变化。

《代微积拾级》和《微积溯源》的内容包括平

面解析几何、初等微积分以及少量简单的微分方程。解析几何引进直角坐标系,讨论平面曲线的方程及其解法。然后,根据方程的性质做出曲线分类。在中算史上几何问题常用代数解法,中算家不难接受解析几何的指导思想,其实横直两轴就像天地二元。不过二元术未能预见到解析几何的全部内容,中算不曾将平面上的点对应于实数序偶,因而,无法在曲线与方程之间建立一一对应关系。解析方法本身没有引起太多关注,晚清学者对其结果更感兴趣,并完成了圆锥曲线的综合研究。微积分的内容主要是微分和积分的概念、性质、求法及用法,包括高阶导数、级数展开、函数极值与曲线性质。微积分的基本概念不是导数而是微分,微分与“函数及自变数两变比例相与之比例”有关,它的实质在于“一刹那中所增之积”。微分公式依赖于级数展开式,而级数的收敛性却没有涉及,也未涉及函数连续或者可导的条件。积分法同样有赖于无穷级数,引起中算家兴趣的是,它能确定曲线弧长、曲面面积、旋转体的面积和体积等。李善兰强调了积分作为和式的特征,指出它是“合无数微分”所得,但在书中它基本上表现为微分之逆。微分方程有“二次微分式”,还有“里迦提式”,其解均为“双变数微分之积分”。

三角学的代数化始于《代数术》,前此中算家的三角学知识建基于几何概念,《代数术》引进纯粹的算术关系,如棣美弗公式等等。在此基础上,《三角数理》使三角学独立于几何学,完成平面和球面三角的代数化工作。《决疑数学》讲概率论及其应用,包括古典概率、大数定理、正态分布及最小二乘法,其中,两卷专门讨论人寿和诉讼的“决疑率”。由于一些重要结果借助于分析学,《决疑数学》艰涩难读,因而“通其术者绝少”<sup>[14]488</sup>。

直到清末,中算家还没有真正掌握数学分析方法,引进的数学分析也不完善。相比之下符号代数更受欢迎,因为它能说明传统知识,而且还能说明其他现象。李善兰尝试以四元术表达曲线方程,然而存在四元术无法表达的曲线,这使他意识到符号代数的优越性。中算家虽然忽视分析方法却很重视它的结果,李善兰认为,微积分是“算学中上乘功夫”,几乎可以取代此前的一切中西数学知识。微积分既有实用价值,又有

超余内容,中算家很快展开研究,并做出《西算新法直解》。泰勒公式能够广泛应用,于幂级数展开,因而引起晚清学者的重视,清末中算家的微积分知识多与泰勒级数有关<sup>[13]189</sup>。夏鸾翔对某些积分的结果特别感兴趣,认为是几何学中上乘功夫,能把“无法之形”化为“有法之形”。他“细寻微积分奥窍”并“疏而演之”撰成《万象一原》给出曲线形和曲面形的度量“凡一百余术”。书中被积函数往往展成泰勒级数,然后逐项积分,以便使用传统术语保存结果。这样的保存形式也许便于应用却掩盖了展开式系数与和函数的关系,不利于分析学知识的增长。逐项积分要求和函数具备一定的分析性质,泰勒展开要求余项满足一定的条件,夏氏对此没太在意。

总之,符号代数引起研究对象的变化,解析几何导致一般关系的探讨,微积分用于多种图形的度量。半个多世纪里,中算家一直在中西体用之间寻求高效安全的数学知识,这样的努力直到清末民初也未达到令人满意的效果,最终不得不全盘西化。

## 二、知识增长的速度

晚清数学的发展虽然受到技术需求的引导,但未受到有结构的制度所规范。西方数学的第二次传入改变了中算知识的结构,却并未改变知识价值的结构。数学活动的组织效率受到考核技术的制约,由于考核不可能完全,数学会通陷入效益递减的境地。

### 1 社会条件

知识存量的扩张可以不受任何成文法的约束,但人权和产权的效率足以影响知识增长的速度,而国家要对人权和产权的效率负责。因此,国家的存在既是保障知识生产持续发展的关键,也是造成人为衰退的根源。

大清帝国继承了足够丰富的宗法遗存,政府起用大批汉臣进一步强化了宗法意识,由此可以说说明晚清社会的初始条件。直到近代以前,中国并未真正感受到域外文化的竞争压力。统治者的竞争对手或者来自相同的文化背景,或者被同化于该背景中。既然不受外部竞争约束,统治者只须争取垄断租金最大化,而无须操心社会产出

最大化,人权和产权的结构不会因为效率不高而危及帝国的生存。由于技术变化率不大,虽然历经朝代更替,帝国依然能够延续。保持较小的技术变化率可以节省制度创新的费用,有利于维持传统的等级秩序和产权结构,从而可使垄断租金最大化。由于存在交易费用,提高产权的效率未必就能增加税收。不同的产权设计有其不同的考核成本,考核成本越高租金消耗越大。加大这方面的投入力度也许有利于社会产出最大化,却未必有利于垄断租金最大化。

虽然不受外部竞争约束,统治者仍受内部竞争约束,人权和产权的结构与稳定由此得到说明。传统社会的和谐有赖于相对价格的稳定,人有大小之分,大人与小人的尊严不同而且不变。掌握这种和谐理论可以优化生存状态,破坏这样的和谐秩序将会受到严惩,包括肉体消灭。竞争与合作的基本形式由宗法关系决定,纳税人的机会成本由其上下尊卑决定,他的谈判实力由其暴力潜能决定。宗法集团在暴力方面具有比较优势,君子集团在代理方面拥有特殊地位,农民纳税基本上没有讨价还价的能力。君子志在“治国平天下”,帮助国家控制天下资源,因而成为统治者的理想代理。代理集团由正人君子与伪君子构成,他们通过科举及捐纳等途径获得功名,正式或者非正式地行使代理权力。由于效用函数不尽一致,统治者在其代理身上总要耗费一些垄断租金,为此,出台相应法规仍要耗费部分租金。一旦成本超过预期收益,统治者就会允许竞争激化的产权状况出现。

宗法集团和代理集团是内部竞争的两个主要来源,它们都能破坏帝国的资源配置。维护宗法关系存在规模效益,可使统治者的垄断租金最大化,但它是内在不稳定的。宗法势力的扩张常常破坏要素市场上的所有权结构,致使大批纳税人破产流亡从而影响国库收入。作为垄断性转让支付,帝国保护统治者的代理人对部分土地资源的控制权。官僚地主的产生可能是因为这样的组织形式具有较低的考核费用,代理人于是成为统治者的潜在竞争对手。这种竞争对于土地所有权的行使构成很大压力,逐渐造成有利于代理集团的资源配置,通常是以牺牲效率为代价。在维护宗法利益和代理利益的产权结构与限制宗法势力和代理权力的有效机制之间存在着持

久的冲突,这种矛盾是低水平重复自然经济的基本原因之一。帝国之所以改朝换代,社会之所以简单再生产,往往根源于此。

中国古代的农业规划是用最小成本解决问题的方案,统治者只要维持社会安定,经济增长往往会自动实现。因此直到近代,地方官员的首要任务仍是保持安定团结,这对稳定的税收至关重要。官员升迁的机会很少来自改革创新,锐意改革者也许会断送自己的前程,因为他有可能冒犯地方绅士而破坏安定团结。权力的高度集中常常导致效率的丧失,下层裹足不前而上层僵化失灵,这是人治造成腐败的结果。帝国税收并未形成预算与审核制度,征收额度往往要根据有关各方利益关系而定,制度化的腐败现象缘于外敬远大于法定收入。实施这种农业规划必须限制商业竞争,对于高额利润的行业,随时准备加以垄断或者课以重税。国际贸易可有可无,货物进口与出口征收同样的税款,统治者并不指望出口创汇。扩大出口虽然可以增加财富,但是,商业竞争的加剧也许会引起相对价格的变化,从而使维持社会秩序的成本上升。商人除非买通官吏,否则得不到保护。投资环境没有保障,资本积累难以完成。出口商品均为劳动密集型产品,虽然节约资源却不利于技术革新。技术革新为君子所不屑,君子倡导意识形态并垄断知识,不玩奇技淫巧。农民没有能力开发新技术,他们缺乏必要的知识和资源,私人收益与社会收益的偏差也使他们缺乏更新技术的动力<sup>[15]</sup>。

近代中国开始受到西方技术的强烈冲击,社会矛盾空前加剧,最终导致传统社会解体。由于摊丁入亩及其他因素,鸦片战争前的一个多世纪里人口增长两倍,并且仍在增长。然而,耕地却没有增加多少,基本上保持乾隆时期的规模,于是人均面积呈现递减趋势。由于缺少技术变化,资源的基数无从扩张,过剩人口成为日益严重的社会问题。外部竞争的激化导致千古未有之变局,鸦片战争的结果造成众多手工业破产,过剩人口问题变得更加严重。太平天国运动爆发时人均耕地不足 1.8 亩,据专家估计,当时人均 3 亩方可维持生计<sup>[11]56</sup>。鸦片战争赔款使得中央财政吃紧,一部分费用被转嫁到农民头上。地方代理趁机横征暴敛、中饱私囊,使农民原已苦难深重的生存状态更加恶化,终于引发新一轮周期

振荡。

军事技术的变化引起国内暴力潜能的重新分配,通过镇压太平天国,暴力上的比较优势由宗法集团转移到代理集团方面。随着代理权力的扩张,原来非正式的基层代理被合法化,这是仅次于控制的最好选择<sup>[16]</sup>。地方代理不仅掌握了生杀大权,而且掌握了本地财税大权,形成尾大不掉之势。战乱未能有效地缓解人口对土地的压力,战后,人均土地虽曾一度达到 2.7 亩,不久又恢复到 1 亩多。由于产权的界定不够清晰、明确,资源的配置仍向代理集团倾斜,全国大部分地区的农业生产效益递减。腐败造成了晚清帝国的衰落,主张经世致用的学者以维护帝国制度为己任,开始关注帝国政策及其执行状况。农业税既不足以维持帝国的财政平衡,清廷不得不转而依赖商业税,为此必须设法振兴工商。传统的管理模式对此不再适用,然而制度创新有待于足够的技术变化,有待于技术潜力足以压迫组织形式。

19 世纪 70 年代开始,进出口贸易迅速增长,促进了国内商品流通。进出口贸易的增长带动航运业的发展,扩大了商品流通的范围,国内市场由此扩大。航运业推动船舶修造业的发展,船舶修造业带动冶金、铸造和机器制造业的发展,由此引起的一系列变化加速了传统经济结构的瓦解。另一方面,除了个别例外情形,新式工业的效益一直不理想。规模较大的企业由官方控制,由于受到组织形式的制约,它们没有经济效益可言。民营企业规模较小,由于资本及技术条件的限制,它们缺乏与外资企业竞争的实力。无论如何,新兴行业至清末已带来可观的社会变化,传统的“士农工商”结构逐渐解体。许多商人成为买办,官僚办厂成为企业家,绅士经商成为资本家。不少君子办学堂当教师,做报刊记者或编辑,清末状元张謇甚至办起近代实业集团。

代理集团的主要成员历来都是君子,社会变动导致君子分化,动摇了帝国统治的根基。激进的君子意识到,除非制度上作出相应的调整,不然经济改革注定不能成功。稳健的君子感到改革开放必须“中学为体”,否则“纪纲不行,大乱四起”<sup>[17]</sup>。保守的君子坚持仍以圣学治国平天下,反对一切社会变革。直到面临亡国之祸,政府才开始尝试改革,但却为时已晚。外贸、关税

及内河航运此时已被列强控制,许多地区已被列强开发而沦为半殖民地,改革的机遇已同主权一道丧失了。由于地方财政不受中央控制,政府无力支付高额的改革费用,而强大的保守势力使任何改革措施都难以真正执行。帝国已是积重难返,甚至“腐朽到不可能在立宪体制下生存下去的状态”<sup>[17]372</sup>,这表明真正的变革还须借助暴力手段。政府领导的改革没有成功,却孕育出革命力量,最终导致帝国覆灭。

总之,西方技术的冲击加重了过剩人口压力,同时也提示了解决问题的途径。技术更新引起经济结构的变化,进而引起社会变迁,最终导致制度创新。晚清数学并未受到有结构的制度所规范,虽然受到技术需求的引导,但它尚未得到人权和产权的激励。

## 2 数学活动

晚清数学活动包括引进西法、会通中西以及发展教育几个方面。西方数学的第二次传入改变了中算家会通工作的方式,各种实业及军事需要引起数学教育的变化,一批专攻数学的留学生预示着中国历史上真正的数学变化。

项名达(1789—1850),浙江仁和人,道光六年(1826)进士。他不做县官做学问,“于象数历算诸术冥心深造”,著《下学庵算学》3种。其中,《象数一原》继续会通三角函数幂级数,不但改进了割圆连比例,而且完善了明安图变换,为清代级数论奠定了最后的基础。

戴煦(1805—1860),浙江钱塘人,以商籍第一入杭州府学。他毕生研究数学,著有《对数简法》2卷、《续对数简法》1卷、《外切密率》4卷、《假数测圆》2卷,总为《求表捷术》。他以形式化的运算导入有理二项式,将其成功地应用于对数函数的展开进而展开八线对数,由此简化了对数表的造法并提高了精度。

徐有壬(1800—1860),浙江乌程人,道光九年(1829)进士。授户部主事,后在四川、云南、湖南等地为官,最后官至江苏巡抚。自幼喜好天算并保持一生,学术交往很多,著有《务民义斋算学》9种 16卷。其中,《割圆八线缀术》系统地整理了八线的互求关系及大小八线的互求关系,中算家关于割圆八线的知识由此得以系统化,虽然方法上并无创新。

李善兰(1811—1882),浙江海宁人,诸生。

自幼好算,三十以后所学渐深,与“并世明算之士皆相善,时有问难”。做过徐有壬幕僚,到过南京、安庆等地,1868年始任北京同文馆算学教习。著有《则古昔斋算学》13种 24卷。其中,《方圆阐幽》、《瓠矢启密》、《对数探源》及《垛积比类》讨论尖锥术与垛积术,前者可由后者导出并可解释清代级数论,后者为传统垛积术的进一步深化与系统化。

上述均为 19 世纪 60 年代之前数学会通的典型代表,他们的目标是以传统方法会通西法。随着西方数学的第二次传入,中算家发现传统方法难以会通“西算新法”。一些中算家于是转而整理和保存早期会通的结果,并开始以西算的概念与方法解释中算的结果。

丁取忠(1810—1877),长沙人,书香门第出身。自幼喜好数学,与人共同钻研,终身未仕。19 世纪六七十年代联系一批中算家,以长沙为活动中心,形成一个松散的数学组织。其主要成员有吴嘉善、左潜、曾纪鸿、黄宗宪、时曰醇、李锡蕃及邹汉勋等人,他们共同研讨数学并出版著作,出版费用来自家产及捐赠。几乎全部工作都被收入丁取忠主编的《白芙堂算学丛书》其中,既有中国古代的成果,也有中西会通的结果。李善兰和邹伯奇也曾参与部分工作,这里吴嘉善起到重要作用。他是南丰人,咸丰十一年(1861)进士,曾任中国留美学童监督。虽然钟情西学,却受朝廷左右,显得有些保守。黄宗宪是新化人,曾受命出国考察,在欧洲工作五年。著有《古琴古砚斋算学》5种 8卷,其中《求一术通解》引进素数概念,通过素因子分解简化了秦九韶的大衍求一术<sup>[14]465 474</sup>。

19 世纪 50 年代,中算家与传教士再度联手,开始引进西方数学。传教士感到这对传播耶稣之道有利,而中算家觉得算学明可以制器精,这对国防有利。1852年,李善兰在上海结识艾约瑟与伟烈亚历,合作译书由此开始。他们先后译出《重学》《几何原本》后 9 卷、《代数学》《代微积拾级》和《谈天》,此外又译《数理格致》63页,还与韦廉臣合作译出《植物学》。《重学》系由艾约瑟推荐,他称格物制器不可不知力学。《几何原本》后 9 卷由私人出资刊刻,但其体例不合中国特色,未能引起足够的重视。《代微积拾级》较《代数学》更受中算家的欢迎,因为它较

为直观而结果更为实用,不久便有会通之作。

夏鸾翔(1823—1864),浙江钱塘人,道光十九年(1839)补博士弟子。项名达的入室弟子、戴煦的世好,精通算学,著有《夏氏算书》4种 5卷。他另有《万象一原》9卷,力求会通定积分的某些结果,特别是曲线形与曲面形的度量结果。“连比例术”说明了他的会通方法,中算家视幂级数为连比例,系数被认为与垛积或尖锥有关。定积分用于关联特定的展开式,结果整理成传统形式,作用相当于尖锥术。尖锥术不曾考虑幂级数的系数与和函数的关系,完全类似,夏鸾翔的会通工作也未涉及和函数与原函数的关系。

1868年,江南制造局设立翻译馆,不久华蘅芳等人应聘与在馆传教士合译西方数学著作。华蘅芳(1833—1902),江苏常州人,不善举业独好算学。1859年他见到李善兰,乃知算学中上乘功夫,从此便究心于“代数”。江南制造局出版的数学著作多半由华蘅芳与傅兰雅合译,譬如,《代数术》《微积溯源》《三角数理》与《决疑数学》等等,这比墨海书馆的数学译著所涉及的范围要广。《代数术》与《微积溯源》不纠缠理论细节,比《代数学》和《代微积拾级》更容易理解,因而,出版后成为主要教材。此后出版机构渐多,随着数学教育的发展,数学出版物也越来越多,但在内容不及墨海书馆和江南制造局出品。

在中国古代,官方只有算学教育没有数学教育,民间虽有数学教育但是未能发展起来。随着西学东渐,数学教育渐渐受到重视,至清末获得显著的发展。1863年,上海同文馆开课,必修课除了外语还有代数、几何与力学等,成绩优秀者可以专攻数学。1864年,广东同文馆开馆,吴嘉善被聘为首任汉文总教习,因为他对中西两数学方法都很熟悉。1866年,京师同文馆增设天文、算学二馆,1868年李善兰任算学教习,1876年,正式规定馆中学生要兼习数学<sup>[18]</sup>。京师同文馆成为当时中国的最高学府,数学课程既有九章算法以及四元术等传统数学内容,也有代数、几何、三角及微积分等西方数学内容。在同文馆的《算学课艺》中,往往设题保留传统形式而解题则以西法为主,表现出晚清数学的西化倾向<sup>[13]209</sup>。

各类新式学堂随后陆续出现,以应各种实业及军事需要,学员也要学习初等数学知识。19

世纪末甚至还出现一些专门的数学教育机构,如瑞安学计馆(1896)、浏阳算学馆(1897)及上虞算学堂(1898)等<sup>[14]511</sup>。此外,一些教会学校也有数学教育,有些私塾也开数学课程。中国古代书院没有数学教育传统,清末出现了一批重视数学教育的书院,其中,求志书院表现突出。该院建在上海,分设六斋,算学为六斋之一。算学斋长刘彝程,江苏兴化人,太学生。1873年任上海广方言馆算学教习,1876年起在求志书院主讲数学直到1898年。其学“融贯中西而别有神悟”,著有《简易庵算稿》4卷,在整勾股和垛积术方面取得进步。19世纪末到20世纪初数学教育发生很大变化,各省纷纷建立大学并规定出教学内容,数学课程包括几何、代数、方程论、整数论、微积分与力学等等。

容闳曾随传教士出国留学,1854年毕业于耶鲁大学,成为第一位毕业于美国一流大学的中国人。但他“素视算术为畏途,于微积分尤甚。所习学科中,仅此一门,总觉有所杆格。虽日日习之,亦无丝毫裨益,每试常不及格”<sup>[19]</sup>。在容闳的倡议下,经过一些洋务派官僚的努力,1872年中国开始选送聪颖子弟前往美国寻求舆图、算法、步天、测海、造船及制器等“身心性命之学”。由于保守势力从中作梗,这项计划半途而废,1881年,清朝政府撤回留学生,遂使他们未能完成学业。早期留美学生中鲜有专攻数学者,20世纪初则有郑之蕃、胡敦复及秦汾等人主修数学。

留学欧洲始于1875年,首批留学生来自福州船政局,他们的数学才能令外国同学非常吃惊。严复于1877年留学英国,就读于格林威治海军学校,专攻数学和自然科学。1881年,保守势力故伎重演,试图搞垮船政局的留学教育,但未得逞。1887年两名留学生自费旁听巴黎高等师范学校科学课程,翌年通过数学和物理学学位考试,但在当时却未能引起足够的重视<sup>[20]</sup>。1896年朝廷选派13名青年留学日本,以后留日学生逐年增加,1906年竟达上万人。1904年冯祖荀留学日本,就读于京都帝国大学,是最早专攻数学的留学生之一。

留学生对晚清数学的影响有限,他们并非为数学教育和研究工作所准备。清末数学教育仍以初等数学为主,即使大学堂也未超出初等微积分之外,并且依然保留着传统形式。会通中西的

结果改变了中算知识的结构,却并未改变知识价值的结构。

### 3 组织结果

晚清数学的引进与会通均有两种组织形式,始则缺乏制度保障,继而试图中体西用。受考核技术水平所限,会通规则只能取决于意识形态,结果导致效益递减。由于威胁到士大夫在权力结构中的即得利益,直到帝国覆灭,数学教育改革的效果并不理想。

早期会通纯属自发行为,自选课题、自筹经费、自行解决出版问题。国家可以无偿取得会通结果而不承担任何成本,这是会通工作效益递减的原因之一。会通工作的动力几乎全部来自偶然的好奇,会通工作的保障几乎全靠数学家之间的相互支持。项名达著《象数一原》缘于好奇,未及完工便辞世,幸有好友戴煦为之补全并有徐有壬帮助出版。徐有壬的《割圆八线缀术》也是出自个人兴趣,未及定稿身先死,后经吴嘉善述草、左潜补草刊于《白芙堂算学丛书》。为出版该丛书,丁取忠耗尽全部心血和财产,黄宗宪除了家产外还搭上胡林翼所赠购书款<sup>[14]467</sup>。李善兰的数学活动虽以“制器日精,以威海外”为目标,但他的《测古昔斋算学》由曾国藩“邮致三百金”汇刻出版,仍属私人行为。夏鸾翔的数学会通只为“人生之快事”,因避战乱他客死广州,《夏氏算书》由吴嘉善和邹伯奇编辑整理而成。夏氏之后会通工作呈现效益递减趋势,由于缺乏制度保障,自发会通难以为继。

19世纪70年代以后,真正懂得数学的人大抵都意识到数学会通其实没有必要,因为西方数学既能说明传统数学之所能,也能说明传统数学所不能。不过全盘西化很危险,所以会通工作还要继续,传统形式仍须保留,以便“中学为体,西学为用”。另一方面,随着自强运动的发展,数学成为可以谋生的学问,而且搞数学变得越来越体面。于是清末算书汗牛充栋,会通之作比比皆是,它们均以传统数学问题及其表现形式为体而以西方初等数学为用。变化主要表现在数学概念和方法上,至于数学内容则不如早期工作的水平。例如,解析几何、微积分及概率论,它们难以中学为体,因此,几乎无人问津。这种资源的范围当时还无法精确测定,会通规则只好取决于意识形态,结果导致会通工作效益递减。考核技术

的水平在半个世纪里没有得到明显提高,直到专业留学生回国为止,人们不得不在中西体用之间继续徘徊,虽然他们并不确信数学需要中体西用。

19世纪60年代以前引进项目由教会主持,伟烈亚历称西士东来“与中国敦和好之谊……必须书籍以通其理,假文字以达其辞,俾远方之民与西士人士之性情,不至于隔阂”。墨海书馆出版宗教、科学和数学书刊一百多种以售公正,但效果并不理想。咸年间,西学传播范围不出通商口岸百里之外,影响所及不过天下生员百分之一<sup>[18] 282</sup>。由于入不敷出,伟烈亚历主编的西学期刊《六合丛谈》于1858年停刊。至60年代,墨海书馆已是风光不再。微积分虽属算学中上乘功夫,但它既不足以糊口又无助于前程。时人都在钻研经书忙于科举,墨海书馆所译数学著作的影响范围极其有限。

自强运动期间引进的数学项目主要是官办的,曾国藩称“洋人制器出于算学,其中奥妙皆有图说可寻。……先从图说入手切实研究,庶几物理融贯,不必假手洋人”。1871年,江南制造局翻译馆正式开始出书,至世纪末已出书一百多种。选题立项时优先考虑技术知识;其次自然科学;然后社会科学。数学方面,除前述四种外,还有《算式集要》《数学理》《代数难题》及《算式解法》等。由于内容浅近,适合当时受众条件,它们比高等数学更受欢迎。京师同文馆也有译著20多种,包括《弧三角阐微》和《格物测算》。由于选题及译笔方面稍逊一筹,馆译著作的影响不及同期局译作品。

19世纪末20世纪初,民办出版机构的引进力度超过了教会与官办机构,并表现出不同特点。甲午战争表明,日本改革成功,成功的关键是制度创新。于是,日文书籍的翻译数量很快超出西文书籍,社会科学项目大大超出自然科学项目。数学项目仅限于初等数学教科书及初等微积分参考书,内容不出原有范围,唯《四原原理》例外。在新学大潮中涌现出若干中西数学期刊,但是影响不大,旋即自生自灭。短命的原因在于它们“主要是个人之力单凭热情搞起来,得不到有力支持,资金无着,无法长期维持”<sup>[14] 544</sup>。

清末以前,数学家成才的途径主要是自学或私相传授<sup>[13] 198</sup>。鲜有数学家出自官方教育,因为

官方只有算学教育没有数学教育。数学无助于功名,所以,学者没有必要学习数学,除非个人感兴趣。中学独立于数学,然而“一切西学皆从算学出”,为了采用先进技术必须掌握数学知识。1867年,总理衙门拟招正途科甲人员入同文馆学习数学,并且试图在制度上作出安排以资鼓励,遭到士大夫的激烈反对和抵制。原因不在数学本身而在社会秩序,允许普通学员与正途人员竞争同样的社会地位无疑会破坏等级秩序,士大夫在权力结构中的既得利益受到威胁。他们觉得技术与知识能以不变成本源源不断地生产出来,因而,坚持成本外部化、收益内部化。作为意识形态的倡导者,士大夫掌握着强大的宣传机器,足以使同文馆的改革目标无法实现。最终双方达成妥协,总理衙门获得七品以下官衔的授予权,更高的社会地位仍由科举考试决定。于是,同文馆得以实施数学教育,虽然效果并不理想。

19世纪80年代,总理衙门尝以科学渗透科举,但因非激励机制,未能得手。投考算学者仍试以“《四书》经文、诗、策”,同时“另出算学题目”。如果数学考试成绩合格,加试“格物测算及机器制造、水陆军法、船炮水雷或公法条约、各国史事诸题”,加试成绩合格才能参加乡试。乡试“每于二十名额外取中一名”,但取额“最多亦不得过三名”。由于成本较高而机会较少,报考算学者越来越少,后来“均以不满二十名散入大号”,算学取士并未达到预期目标。科学未能渗入科举,科举却能排挤科学,同文馆学生无心科学却属意科举<sup>[18] 332</sup>。

1898年,京师大学堂成立,1902年同文馆并入大学堂。在此期间,全国各地纷纷兴办大、中、小学堂及师范学堂,数学成为必修课。癸卯学制确定了教育活动的规则,要求各类学堂均以国学为基,忠孝为本,确保学生心术归于纯正,然后再学西学知识。1905年,科举制度终于废除,同年学部成立,数学教育走向现代。1912年,北京大学数学系成立,中国现代高等数学教育正式开始。回国留学生为此提供了必要条件,其知识结构较少受到中西体用的限制,虽然他们对晚清数学的影响有限。

由于近代技术“尽购其器不惟力有不逮”,而且其中奥妙“苟非偏览久习,则本源无由洞澈而曲折无以自明”,清廷决定派遣幼童赴美留

学。1872—1875年,曾有四批中国学童来到康奈狄克,住进哈特福德居民家中。按照留学章程,留学生不仅要掌握西学,同时要“课以孝经、小学、五经及国朝律历等书”,定期由监督“宣讲圣谕广训,示以尊君亲上之义,庶不至囿于异学”<sup>[20]91</sup>。然而不久,他们盘起辫子变得活泼好动,言行举止表现出西化倾向。容闳觉得这很正常,但是其他监督无法容忍,并将事态报告政府。留学计划需要库银一百二十万两,留学生回国后将“分别奏赏顶戴、官阶、差事”,这样的资源配置势必危害科举制度。由于保守势力坚决反对,这次留学计划半途而废,留学生未及完成学业便被撤回国内。因此,这批留学生对改革的作用主要表现在技术与管理方面,其中,仅有 3 人从事教育工作,12 人后来步入仕途,他们对晚清数学的影响甚微。

1877 年,经过一年多的考察,马建忠发现,“近今百年西人之富,不专在机器之创兴”。他指出,国家富强有赖于制度创新,产权激励可以求富,而人权激励可以求强<sup>[21]</sup>。但是,他的意见没有引起任何社会反响,直到甲午战败。无论如何,至 20 世纪初,这已成为国人的共识。教育改革迫切需要师资队伍,政府鼓励留学日本,因为“传习易,经费省,回华速”。此时留学生更为关注时事政治,主修社会科学专业多于自然科学专业。时局令他们感到,倘没有某种社会变化,恐怕找不到“可以施演所学之舞台”。政府领导的教育改革还没有收到预期效果,却孕育出革命力量,最终导致自身毁灭。清末留学日本专攻数学的人相对较少,但是,他们对中国数学教育现代化却发挥了作用,北京大学数学系成立时由冯祖荀主持。

晚清数学活动的组织效率受到考核技术的制约,通过发展数学教育可以提高考核技术的水平,然而,数学教育的发展受到科举制度的制约。考核不可能完全,数学活动的规则只能取决于意识形态,于是,陷入中西体用之间,结果导致效益递减。

### 三、知识增长的方向

中国古代制度结构的稳定性是以牺牲技术

变化率为代价的,改革的阻力来自规则取决于儒学的传统,意识形态的僵化说明了知识增长的方向。清末数学会通仍坚持中体西用原则,概念的进化因而受到很大阻碍,最终导致中算被完全取代。

#### 1 文化背景

自从汉代“罢黜百家”以后,儒学观念就顽固地粘附在国内竞争与合作的规则上。每当规则的设计与实施可有多种选择,考核成本超过预期收益或无法测定某种资源的范围时,政府便会选择儒学作为决策依据,知识增长的方向由此得到说明。

知识有时能以纯粹偶然的方式产生,并且可以引起技术的变化。因此,在帝国统治者看来,发明创新可以小本经营或者无本经营。制度上的安排虽然可以保障知识生产的稳定性,但是,持续的知识增长也许会使意识形态多样化,从而会使维持社会秩序的成本上升。统治者为此采取了一系列措施,例如,“重农抑商”以期稳定相对价格,“罢黜百家”以设高度信息费用,“独尊儒术”以便保持意识形态的一致性。儒家学说适合中华帝国的国情,儒家经典因而被认为是包含了全部真理。“天人感应”说解释了帝国的产权结构和交换条件的公正性,“修身、齐家、治国、平天下”的理论,启示了人治之道及治人之道,“伦理纲常”展现了宗法社会的结构与稳定。儒家认为,“小人”的尊严有别于“大人”的尊严,小人与大人的机会成本不同而且不变,这是因为“生死由命,富贵在天”。相对价格的任何变化都是命中注定的,不过学而优则能改变机会成本,进而可以优化生存状态。

由于它的灵活性,儒家思想在帝国的内部竞争中取得支配地位,不仅得到统治者的支持,而且得到君子的拥护。在漫长的古代所有与之对立的理论都未能取代它,这并不纯粹是暴力与压制的结果,而是相对成功地解决搭便车问题的结果。古代社会的稳定性立足于此,因而,选择儒学作为决策依据非常重要,当考核不可能完全或者完全不可能时尤其如此。科举制度便是规则取决于儒学的例证,这是因为代理集团的构成有多种选择,而以业绩考核为基础的组织效率最高。考核范围包括政治学和社会学,而不涉及科学与数学,因为此类资源的范围无法精确测定或

者考核成本高于预期收益。

人类好奇的天性也能导致新技术,然而,新技术的发展并不完全是自主的,它取决于科技组织的效率,可持续发展必须由有结构的制度所规范。中国古代的制度结构极其稳定,这是因为规则取决于儒学,从而保持技术变化率较小的缘故。新技术虽能用于收益最大化,但它也能导致交易费用上升,乃至压迫社会生产的组织形式。因此,儒学立国之道“尚礼仪不尚权谋,根本之图在人心不在技艺”,力图控制技术变化以免交易费用引起制度变迁。技术的进步只能建立在知识存量之上,知识的增长却能相对独立于技术变化。中国古代知识的产出与更新之间、技术的发明与发展之间存在很大偏差,原因之一是知识的扩张与技术需求之间存在明显偏离,发明创新过程中理论与实践并不相干。晚清学者注意到,近代技术有其西学原理,掌握近代技术需要引进西学知识。不过,西学虽然可以发挥技术潜力,但它也会冲击传统观念,乃至破坏伦常名教。因此,儒者一再强调“华夷之辨不得不严,尊卑之分不得定,名器之重不得不惜”,极力反对“师事夷人”以免西学观念引起价值变迁。外部竞争的技术条件虽然发生了变化,他们并不觉得国运与此有关,以为仍可维持传统结构。

古代的经验表明,发挥技术优势可以用夏变夷,坚持儒学传统可防夷变夏。晚清君子据此作出不同的判断,导致君子分化。热心洋务的君子感到夷夏大防取决于技术条件,西学可补儒学,有利于维护传统。其他君子觉得夷夏大防取决于意识形态,西学离经叛道,危害君国社稷。无论如何,在坚持儒学传统方面君子保持一致。尽管洋务派掌握暴力优势,他们无意破坏传统秩序,因为等级结构有利可图。至于西方技术,既然无法禁其东来,只有引进别无选择。而且,由于传统知识无法解释近代技术,也不可能“节取其技能而禁传其学术”,只能“以中国之伦常名教为原本,辅以诸国富强之术”。于是,在洋务运动期间,“中学为体西学为用”成为他们的基本论式。

熟谙“诸国富强之术”的洋务派逐渐认识到,谋强必先求富,求富莫如发展技术。由技术引导的西学知识于是超出格致范围之外,1875年,郭嵩焘指出,西方技术的发展有其制度化规

范。根据中国国情,他提出先通“商贾之气”,为“循用西法”创造社会条件。他的见解和主张超越了那个时代,不但顽固君子无法接受,即使洋务君子也难以接受。君子坚持儒学传统,不求社会产出最大化,但求多捞一份垄断租金。儒学立国是以生产关系为本,生产力为末,组织形式压迫技术变化,而非相反。郭嵩焘建议循用西法,使人权与产权状况适应于技术发展的要求,这有利于社会产出最大化,却与儒学传统背道而驰。在随后的20年里学者试图为之谋取合法地位,他们的努力虽然未能达到预期效果,却使中体西用论的内容发生了很大的变化。“中体”被抽去制度因素以后只剩下儒学信条,“西用”则被扩充到足以包含人类活动的规则在内。这表明他们确信能使规则独立于意识形态而无损于传统价值,虽然不确定传统价值是否可以根据经验来调整。

实践表明,儒学立国难以洋务自强,困难不在儒学本身,而在规则取决于儒学的传统。为此,必须以某种新学替换儒学,还须借助暴力手段,二者缺一不可。康梁“新学”突破中体西用模式,试图调整传统价值,遭到猛烈围攻。新学与旧学之争主要表现在人权方面,要点在于对政府决策的影响力。新学认为发展是硬道理,降低交易费用是发展的要求,因而觉得规则应当与时俱进。旧学认为这是本末倒置,因为发展的前提是稳定,稳定的条件是保持传统的组织形式。维新派引进的人权与民权观念引起保守派的激烈反应,因为“倡平等,堕纲常也;伸民权,无君上也”,而且“吾人舍名教纲常别无立足之地,除忠孝节义亦岂有教人之方”<sup>[17]227 237</sup>。新旧之争的结果取决于洋务派的态度,以其暴力潜能最大。洋务派同样抵制民权,民权扩张势必激化内部竞争,不利于官僚垄断“西学为用”。保守派与洋务派之间不存在类似的关系,前者无损于后者的垄断利益,于是,“中学为体”成为他们的共同语言。激进的学者认为体用不可分离,体弱无法用强,天在变道亦在变,“治道人道”不能不变。维新失败之后保守派得以全力巩固中体,不料一切努力在八国联军炮口下不堪一击,民权思想未能除尽反而激起民主主义。革命派不受儒学思想的约束,为实现民主他们不惜使用暴力。

1901年,海外爱国学者指出“今日固竞争之

世界”,竞争不可避免,国家不进则退。认为中国陷入存亡不能自主的境地纯属咎由自取,不能怨天尤人。至于“自取之由”,远因在于缺乏自由,近因在于缺乏民主。缺乏自由使人不敢“一言及于民权”,缺乏民主使人“违心易说,巧营利禄”,组织效率因而递减<sup>[17]288 289</sup>。爱国志士极力倡导自由,力图消除国民奴性,以便重新分配暴力潜能。清末“新政”未能实现学术自由,办学原则仍为中体西用,张之洞甚至还要禁传西方哲学。严复觉得中体西用有如牛体马用,无法实行。他认为近代西方技术及其制度规范均以科学为本,而非“西政为本西艺为末”,于是,主张“统新故而观其通,苞中外而计其全”,唯科学是重。王国维指出,学术自由是知识增长所必需的,学问只有真伪之别,而无中西之分。他认为中学可因西学研究而益明,恰如儒学可因国学研究而益明,因而,主张学问“必博稽众说”,唯真理是从。20世纪初,爱国学者强调创新观念,提出“淬厉所固有而新之”,同时“采补所本无而新之”。他们的想法得到知识进化论的支持,做学问“必求合天演界之公理”,为此“不惜与古人挑战”<sup>[17]314</sup>。

儒学规划了中国古代最小成本解决问题的方案,传统结构以生产关系为本生产力为末,代价是知识变化率递减。西学东渐打破了它的平衡,中体西用是不得已的选择。西学可用于收益最大化,前提是生产力为本生产关系为末,结果西用破坏了中体。

## 2 数学会通

在中算史上,发展数学论证与维护知识传统之间存在着持久的冲突,这种矛盾是低水平重复建设基本概念根源之一。随着西学东渐,矛盾进一步加剧,人们尝试会通中西数学以便中体西用,他们的工作表现了试图调和这种矛盾的努力。

数学论证是新概念得以形成和发展的主要途径,知识的更新依赖于论证水平,因而,数学论证的发展是知识增长的关键。中算具有经验特性,主要表现在对象社会化、推理直观化和理论技术化方面。它的问题大多来自现实世界的感性经验,推理通常是基于直观证据,成果一般要经过技术化处理。极力主张普遍性是理论数学区别于经验数学的重要特征,由于没有概念抽象

化、命题一般化以及推理形式化的思想倾向,中国古代未能发展出理论数学。

明末,《几何原本》传入中国,徐光启对其中数学关系的逻辑力量大为折服,认为“能令学者祛其浮气、练其精心”,能令“学事者资其定法、发其巧思”,因而觉得“举世无一人不当学”。明末清初历法改革的实践表明,西学果然有经世致用的价值,《原本》的作用不容低估。不过,《原本》虽有定法可资利用,但其可靠性有待证实,《原本》的步骤是否足以确立它的结果还不清楚。中算家面临两种选择,要么证实定法所由立的手续的合理性,要么证实定法本身的可靠性。前者取决于中算的结果是否能由西算导出,后者取决于西算的结果是否能由中算导出,会通工作的两种不同取向由此得到说明。

早期的数学会通遇到两个方面的困难,一个来自《原本》的体例,一个来自中算的传统。由于掩盖了发现定理的经过及其概念形成的过程,《原本》不适合作为发现的逻辑,徐光启只好满足于将它作为叙述的典范。另一方面中算家坚持古代的传统,否认任何超越于现象的存在,拒绝将演绎先于归纳的结论纳入数学的实体。有鉴于此,梅文鼎转而尝试由中算导出西算的结果,他对数学论证的发展及其范围由此限定。由于中西文化冲突的存在,梅氏论证有其独特结构,它不同于古代的演绎方式,并有区别于西算的推理形式。

西学隐含天人对立的思想,这对儒者来说完全是异己的。他们感到西学破坏了儒学关于天的定义,不禁怀疑西算也有类似的破坏作用,因为西算与西学均以能使存在独立于现象的概念为基础。梅文鼎感到有必要将数学独立于哲学,他认为数学的天是自然的天,自然的天并无中西之别<sup>[22]</sup>。通过传统的解释,他表明西算具有区别于西学的特性,它的结果符合现象。传统的解释无疑丧失了《几何原本》的实质,但他别无选择,公理化的演绎系统以自然与其造化力的分离为前提,这与天人合一的传统观念根本不相容。

梅文鼎认为算术与几何不同,几何依赖于直观证据而算术依赖于自然之理,纯粹的算术关系可归之于量的生成原理,而不必征之于图形的证明力。这有利于算术与几何各自的发展,虽然无助于代数与三角各自的独立。后来的中算家接

受了梅文鼎的思想方法, 引进更多西法并提供传统解释, 概念进化的机制却没有改变。直到晚清, 一般中算家都不觉得有必要区分三角学与几何学的概念, 三角关系是作为几何对象来研究的。类似的, 关于代数方程的解, 清代中算家是作为算术问题来讨论的。他们已很接近代数基本定理, 却认为负根“不可开”, 让真理擦肩而去。算术虽能取决于自然之理, 却不能由此通向形式定义, 梅文鼎的影响未能超越传统的作用。

清代级数论反映了数学会通的一些典型方面, 由于未能摆脱直观, 最终它被西方级数论所取代。在一个多世纪里, 中算家试图为三角函数幂级数提供可靠证据。但是, 直到清末他们也未触及到问题的实质。要点在于级数涉及无穷的概念, 其中的困难无法直观地解决, 因为直观无助于理解无穷集合的性质。中算研究的是实在现象, 而非可能关系, 不可能产生极限与连续等抽象概念, 因而, 无法清楚地解决涉及无穷的困难。清代级数论获得直观证据以后走向技术化道路, 近代级数论则经过形式化发展阶段, 最后走向算术化道路。

中算家展开  $\sin x$  的方法与 1702 年贝努利 (James Bernoulli) 的步骤大致相同: 先把  $\sin a$  按  $\sin a$  展开, 然后令  $n$  变为无穷而  $a$  趋于 0 使  $na$  与  $n\sin a$  同时趋向  $x$ 。于是, 所得结论的可靠性有赖于  $n\sin a \rightarrow x$  的合理性, 对此, 东西方都曾力图作出合理的说明, 而其依据不同使之进展有别。中算家将它诉诸几何直观: “设有弧析分至极多, 所析之分必极细, 此极细一弧通弦几与弧合, 以极多分乘之即原设通弧”<sup>[23]</sup>。他们觉得感觉可以感知

$$\frac{x}{n} - \sin a \rightarrow a \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty, a \rightarrow 0),$$

所以, 当  $n$  充分大时  $n\sin a = x$  是没有问题的。中算家没有说明  $\sin a$  是否有长度, 如果有长度似乎  $n\sin a \neq x$ , 如果没有长度则似乎  $x = 0$  但这不可能。这样的思考在他们看来与问题的解决并不相干, 他们把序列的极限等同于它的末项, 直观合理性的要求使他们无法达至精确的概念。

西方将它归之于  $\frac{\sin a}{a} \rightarrow 1 (a \rightarrow 0)$  的合理性, 很显然, 它表示函数  $\sin a$  在点  $a = 0$  的一个性质。

此类问题大量存在于自然界中, 例如, 它同运动物体的瞬时性质很相似。西算家也曾尝试在感觉的基础上就此归纳出一般的法则, 然而, 感觉无从感知它们在自然界中的变化状态, 于是, 他们转而尝试逻辑地定义无穷小并使之同数学的整体保持一致。由此引起一些新问题, 正是对这些问题的深入思考使他们摆脱直观, 得以确立新概念。分析的算术化得益于变量与函数概念的进化, 进化是由形式主义引起的, 形式化倾向是由数学区别于科学的特性所决定的。由于缺乏这种特性, 中算没有形式化要求, 它的发展因此受到很大限制。中算家试图解释经验以认识要素之间的关系, 西算家试图以要素之间的关系说明现象, 概念进化的方式因而很不一样。

随着西方数学的第二次传入, 学者发现, 传统方法难以会通西算新法, 因为, 其中包含许多超出直观之外的推断。至 70 年代人们又回到徐光启的路线, 尝试以西算的方法会通中算的结果, 但是, 所用西法仅限于符号代数方法。至于解析方法或分析方法则没有被用来会通传统数学, 中国古代缺少相似的方法, 晚清学者尚未真正理解和接受有关的基本概念。符号代数引起中算的形式化倾向, 同文馆算学生以之会通天元术及四元术获得成功, 清末学者的数学会通甚至包括《九章算术》在内。例如, 方愷关于“鸡兔同笼”问题(但知共头三十六、足一百, 问鸡兔各若干)的解:

$$\begin{aligned} \text{天} = \text{兔} \quad \text{三十六} - \text{天} = \text{鸡} \\ \text{四天} + \text{七十二} - \text{二天} = -\text{〇〇} \\ \text{二天} = \text{二八} \\ \text{天} = \text{一四} \\ \text{三六} - \text{一四} = \text{二二} = \text{鸡} \end{aligned}$$

这不同于古代的解法, 也不同于天元术, 天元术包含筹算表达式并用增乘开方法<sup>[13]272</sup>。

代数化的三角学于 70 年代传入中国, 其中, 包含纯粹的算术关系, 前此中算家的三角学知识基于几何概念。随后经过会通, 相当一部分传统几何知识已被代数化, 然而, 中算家对三角知识的代数化表现质疑。中算研究的是实在现象而非一般关系, 传统几何的代数化并未脱离它们的直观背景, 然而, 代数化三角学的有些结果却建基于纯形式的定义。由于三角学在历法研究中的作用, 变动它的基础事关重大, 中算家不得不

格外谨慎。缺少经验证据的推理能否得出符合现象的结论,人们仍然心存疑虑。直到清末,他们没有接受纯形式的三角关系,但接受了较为简单的代数化处理方法,并且用心保留着它们的直观背景。

晚清数学的形式化受到中体西用的制约,中算家对数学本质的设想没有改变,一般关系未能成为数学研究的主要目标。纯粹形式系统虽有可能作为经世类物的派生需求,也有可能基础层面与儒学发生冲突,这是中算概念发展缓慢的原因之一。

### 3 会通结果

数学会通虽然未能改变人们对数学的看法,却改变了人们对西算的看法,虽然未能改变知识价值的结构却改变了中算知识的结构。会通的结果引进不少西算的概念,为中国数学的全盘西化创造了基本条件,概念的发展表现了会通工作的意义。

晚清级数论获得割圆术的直观证据之后,中算家以极高的热情投身于系数的描述,似乎级数的全部秘密都在系数与系数的关系,而不在于系数与和函数的关系。技术化的结果固然可以满足实用的需要,但级数关系之所以成立的原因却被掩盖了,这对概念的继承与发展很不利。发展清代级数论的阻碍主要来自中算家对数学本质的看法,他们对数学的实在性能否由理性导出一直心存疑虑,为此不得不付出额外的代价。中算家发现弦矢可对应于递加数而递加数可对应于二项式,至于弦矢可对应于二项式其意义究竟何在则没有说清楚,因为这种对应关系取决于纯形式定义。令  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , 则

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n,$$

由此即得清代级数论的基本关系。“二简法”早在清初便已获得直观证据,大小弦矢的关系也可由此形式地导入,但在中算家看来它们都是非法的。

为了符合现象,中算的实体仅和常识有关,它的实在性完全由经验证据所决定。无穷的概念之所以能畅通无阻地进入中算,不是因为确认它与中算系统的一致性,而是因为接受它与感觉经验的相称性。晚清数学家关于球的度量涉及无穷的概念,徐有壬产生分割、作和的想法,并提出“横薄切之”然后“层累迭积”的设想。至于这

个过程究竟怎样进行,他没有说清楚。徐有壬没有说明,横薄切片是否有厚度。如果有厚度,似乎无法通过截面相等说明切片相等;如果没有厚度,则似乎不能经过层累迭积得到原来立体。这类问题对于理论进步具有重要意义,徐有壬未能摆脱感觉,不可能提出并解决此类问题。他全凭感觉将三倍截球对应于某“立方”,而未涉及这种变换的任何条件。研究有条件的等积变换也能引起显著的增长,例如化圆为方及倍立方等,而感觉对于解决此类问题无能为力。

第一种会通的结果表明,西算具有区别于西学的特性,它的结果符合现象。西学的实体超出常规存在之外,有些说法似乎不能自圆其说,儒者无法接受其中天人对立的思想。然而数学的天是自然的天,自然的天并无中西之别,中西数学的原理都能“征之于实”。中算家于是将数学独立于哲学,在一定程度上消除了人们对西算的误解,但同时也排除了纯粹形式推导的可能性。学者由此获得激励,开始不加证明地引进西算的结果,并把它们全都改写为传统形式。解析几何的对象被整理成综合形式,几种典型的二次曲线归之于圆锥,一些结果被表为传统的连比例形式。微积分的某些结果也被表为同样的形式,并归之于“几何之学”,因为它们研究的是形,能把无法之形化为有法之形。

第一种数学会通改变了人们对西算的看法,引进力度由此加大,导致第二种数学会通。学者发现传统方法难以会通西算新法,在两个多世纪里西算的内容已经发生巨变,于是转而尝试以西法会通中算的结果。素数概念的引进使中算家的数论取得进展,不仅简化了古代的有关结果,而且引出中算家的专题研究。传统勾股术的“立法之根”仅由少量的代数恒等式构成,但是直到清末符号代数的广泛使用才使它们逐渐摆脱“等积形说”,开始作为纯粹的算术关系。第一种会通曾使三角学独立于天文学,然而割圆八线是作为几何对象来研究的,三角学独立于几何学是第二种会通的结果。

第二种会通的结果表明,西法既能说明中算的结果,也能说明其他有用的结果。多样的古法得到理论上统一的解释,中算知识的结构由此发生变化,引起中国数学史上空前进步的问题转换。清末学者发现“天元、借根所恃以立术者,

以其有相当式也”，它们同符号代数方法的区别仅在于表达形式方面，而不在于数学原理方面。筹算表达式“其式虽简，而理甚委曲”，原理虽然简单步骤却很烦琐，而对五元以上方程组无能为力<sup>[24]</sup>。符号表达式“式虽繁而理甚明晰”，能表达五元以上方程组，并且易于恒等变形。清末数学家大多感到符号代数优于传统方法，于是以代数取代天元术，完成了中国代数的西化历程<sup>[13]277</sup>。与此同时，传统数学的几乎所有领域都被代数化，从而导致中算西化。

清代级数论并未同时西化，中算家虽然接受了符号代数方法，但是没有将它扩充到足以包含极限概念在内。然而专业留学生回国以后情况发生了变化，他们对数学的本质有不同于古代的看法，并且对知识的价值也有不同于传统的理解。清代级数论的无穷小基础在直观上虽然没有什么不合理之处，但数学的可接受性标准是逻辑上的相容性而非概念上的合理性<sup>[25]</sup>。经过算术化的西方级数论与经验证据并不相干，它在形式上严谨、逻辑上严密，清代级数论于是被取而代之。割圆连比例法终于作为不相干的而被抽象的理性概念所取代，无穷小方法也被严谨而明确的概念所取代，明安图变换则经过改造以后成为其他方面的知识。

数学会通曾在一定范围内取得显著效果，然而由此引起的增长存在一个阈值，这是因为学术无法独立于政治、数学无法独立于科技的缘故。由于引导机制不同，两种会通各有千秋，第二种会通数量占优而质量不及第一种会通。第一种会通有其专业精神，没有利益驱动而有出色成果，虽然缺乏制度保障使它难以为继。相应的安排随后出现，使数学成为可以谋利的学问，但是效果适得其反。这样的激励足以对保护知识产权构成很大压力，逐渐形成不利于专业发展的资源配置，从而导致效率的丧失。会通工作的效率依赖于考核技术的水平，由于学术无法独立于政治，直到清末为止考核技术的水平没有得到明显提高，第二种会通工作的效益由此限定。另一方面，两种会通均已达到中算所能容纳的极限，由于会通结果无法满足日益增长的实用需求，中国数学不得不全盘西化。

数学会通缘于实用的考虑，但功利目的只能说明中算被取代的非理性原因，其合理方面只和

知识的增长有关。符号代数的出现与西算的形式化要求相适应，这种形式化倾向由数学区别于科学的特性所决定，西算有其演绎传统。形式主义虽然无法克服所有困难，但却指向正确方向，由此可以发现问题使之成为进一步研究的起点，最终摆脱直观解决问题。中算家特别强调数学的经验特性，他们无法使数学独立于科技，不可能提出形式化要求。符号代数对思维经济大有裨益，没有它就难以足够灵活地处理各种各样的数学关系，所以中算家很快接受了它。由此引起的变化主要表现在普遍性方面而不在看法方面，直到清末为止，中算家虽然改变了人们对西算的看法却未能改变他们对数学的看法。

西算新法曾令学者百思不得其解，缺少经验证据的推理何以会有符合现象的结论？中算独立于由内省所得的规则，自从阴阳奇偶之说被刘徽等人证伪以后，人们都觉得数学的本质应该是经验的。宋元数学家也曾尝试为数学赋予“通神明”的意义，但在具体事物的直观与形而上学的玄想之间，他们未能找出一条安全通道。数学知识的价值于是便由“经世类物”所限定，因而中算受到科学概念的制约，虽然它不受哲学概念的制约。西算能从科学概念中分化出自己的概念，因为它有区别于科学的特性。一个点的运动速度最终是从有序性的角度而非可变性的角度定义出来的，分析概念的合法化缘于西算的独立性，结果使之获得更大的独立性。中国古代也有关于运动的定性描述，《周易》也曾尝试定量地研究变化，但是中算未能由此分化出自己的概念，并加以有序化处理。中算缺乏相对独立的自主性，概念的进化因此受到严重的阻碍，以至于最后它被彻底放弃。

综上所述，西算概念的引进与发展之间存在一定的偏差，原因之一是概念的发展与实用的需求之间存在明显偏离。由于古代的传统，实用知识与形式定义无关，在概念进化过程中理论与实践不相干。除非有关概念可持续发展，否则实用知识的增长最终会陷入收益递减的境地，西学东渐以后数学会通的历史为此提供了一个例证。

#### 参考文献:

[1] 乔志强. 中国近代社会史 [M]. 北京: 人民出版社,

1992: 41-42

- [2] 夏东元. 洋务运动史 [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1992: 4.
- [3] 严中平. 中国近代经济史统计资料选辑 [M]. 北京: 科学出版社, 1955: 13.
- [4] 何伟亚. 怀柔远人: 马嘎尔尼使华的礼仪冲突 [M]. 北京: 社会科学文献出版社, 2002: 62.
- [5] 马士. 中华帝国对外关系史: 第一卷 [M]. 北京: 商务印书馆, 1963: 296.
- [6] [美] 道格拉斯·C. 诺思. 经济史中的结构与变迁 [M]. 上海: 上海人民出版社, 1994: 16.
- [7] 李继闯. 〈九章算术〉及其刘徽注研究 [M]. 西安: 陕西人民教育出版社, 1990: 136-226.
- [8] 靖玉树. 中国历代算学集成 [M]. 济南: 山东人民出版社, 1994: 15.
- [9] 刘钝. 李锐与笛卡尔符号法则, 《谈天三友》[M]. 台北: 明文书局, 1993: 263-284.
- [10] 李兆华. 古算今论 [M]. 天津: 天津科学技术出版社, 2000: 274.
- [11] 特古斯. 清代代数论史纲 [M]. 呼和浩特: 内蒙古人民出版社, 2002: 118.
- [12] 郭书春. 李俨钱宝琮科学史全集 [M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1998: 135.
- [13] 田森. 中国数学的西化历程 [M]. 济南: 山东教育出版社, 2005: 347-369.
- [14] 李迪. 中国数学通史: 明清卷 [M]. 南京: 江苏教育出版社, 2004: 482.
- [15] 费正清. 中国: 传统与变迁 [M]. 北京: 世界知识出版社, 2002: 294-303.
- [16] 孔飞力. 中华帝国晚期的叛乱及其敌人 [M]. 北京: 中国社会科学出版社, 1990: 224.
- [17] 丁伟志. 中西体用之间 [M]. 北京: 中国社会科学出版社, 1995: 251.
- [18] 熊月之. 西学东渐与晚清社会 [M]. 上海: 上海人民出版社, 1994: 304.
- [19] 容闳. 西学东渐记 [M]. 郑州: 中州古籍出版社, 1998: 87.
- [20] 陈学恂. 中国近代教育史资料汇编: 留学教育 [M]. 上海: 上海教育出版社, 1991: 269.
- [21] 马建忠. 上李伯相言出洋工课书: 丁丑夏, 适可斋记言: 卷二 [M].
- [22] 梅文鼎. 东西共戴一天, 堑堵测量: 二, 梅氏丛书辑要: 卷四十 [M].
- [23] 项名达. 象数一原: 卷五 [M], 光绪十四年 (1888), 上海本.
- [24] 李文林. 数学史概论: 第二版 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 104.
- [25] [美] 卡尔·B. 波耶. 微积分概念史 [M]. 上海: 上海人民出版社, 1977: 13.

## Evolution of Mathematics in Late Qing Dynasty

TE Gu-s

(Institute for the History of Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China)

**Abstract** The evolution of mathematics in late Qing was largely due to the need of developing new technology and there was a conflict between the needs and the requirements of ancient traditions, which resulted in the total westernization in Chinese mathematics. Western learning changed the structure of mathematicians' knowledge in China, but it could not change the structure of its value; the effect of mathematical activities depended on the skill in examinations and the standard of the skill was restricted by ancient traditions. As a result, the progress in mathematics would not meet the practical needs so that Chinese mathematics was at last replaced in total.

**Key words** mathematics in late Qing dynasty; history of science and technology; exchanges between the east and the west

[责任编辑 袁晓霞]