文章编号：1001-506X(2013)09-1821-04　　**网址**：www.sys-ele.com

基于 CS-MUSIC 算法的 DOA 估计

吴小川，邓维波，杨　强

（哈尔滨工业大学电子与信息工程学院，黑龙江 哈尔滨 150001）

摘　要：多重信号分类（multiple signal classification，MUSIC）方法在少快拍数或者存在相干信源的情况下不能准确估计信号的波达方向，而压缩感知（compressive sensing，CS）方法在多快拍数或低信噪比情况下分辨性能不稳定，估计准确率受限。提出了一种基于 CS 的 MUSIC 方法，简称 CS-MUSIC，该方法针对不同的快拍数，建立二者之间的联系，构造出新的正交空间，获得尖锐的谱峰。理论分析和仿真结果表明，所提方法在不同快拍数条件下，具有较高的估计精度，克服了传统方法存在的缺陷，并且对噪声具有鲁棒性。

关键词：压缩感知；波达方向估计；基于压缩感知的多重信号分类；同时正交匹配追踪

中图分类号：TN 911.72　　**文献标志码**：A　　**DOI**：10.3969/j.issn.1001-506X.2013.09.03

DOA estimation method based on CS-MUSIC algorithm

WU Xiao-chuan，DENG Wei-bo，YANG Qiang

(*School of Electronics and Information Engineering*，*Harbin Institute of Technology*，*Harbin 150001*，*China*)

Abstract：Direction of arrival (DOA) cannot be estimated accurately by multiple signal classification (MUSIC) algorithm under the condition of less snapshot numbers or the presence of coherent sources，while with the increase of snapshot numbers or the decrease of signal-to-noise ratio，the resolution performance of the compressive sensing (CS) method is not stable enough and the rate of accuracy is limited. A method based on CS and MUSIC is proposed and the abbreviation is called CS-MUSIC. The link between CS and MUSIC for different snapshot numbers is established in the proposed method which constructs a new orthogonal space and achieves sharp peaks. Theoretical analysis and simulation results show that the proposed method has estimation accuracy to overcome the defects of the traditional methods under the condition of different snapshots and it is robust to noise.

Keywords：compressive sensing (CS)；direction-of-arrival (DOA) estimation；CS-multiple signal classification (CS-MUSIC)；simultaneous orthogonal matching pursuit (SOMP)

0　引　言

波达方向（direction of arrival，DOA）估计一直是雷达、通信等相关领域研究的重点问题。传统的估计方法主要包括 3 类：Capon 的最小方差法（minimum variance method，MVM）；基于子空间理论的多重信号分类（multiple signal classification，MUSIC）算法[1]和信号参数旋转不变技术（estimation signal parameter via a rotational invariant technique，ESPRIT）；最大似然估计（maximum likelihood，ML）算法。其中，MUSIC 算法应用最为广泛，该方法通过分解阵列接收信号协方差矩阵，得到信号和噪声两个正交的子空间构造谱峰，在信噪比满足的情况下，随着快拍数的增加，估计精度接近克拉美罗限[2]。但当空间存在相干源或者快拍数较少时，不能够分辨信号。尽管针对相干源问题可以进行平滑处理，但会导致阵列孔径的损失，降低分辨性能。

近年来，针对 DOA 估计问题的独特性也出现了一些新方法。对波达方向进行估计可等效为将感兴趣的空间进行网格划分，来波信号只占据划分空间的某几个单元，相对于整个离散空间来说信源数量很少，这样就形成了一种空域稀疏信号。针对稀疏信号的恢复问题先后出现了稀疏信号表示类算法和压缩感知（compressive sensing，CS）方法。应用于 DOA 估计的稀疏表示类代表性方法是文献[3]提出的 ℓ_1-SVD（ℓ_1-norm singular value decomposition）算法，该算法结合空域信号稀疏特性利用凸优化理论中的 ℓ_1 范数重构方法将信号 DOA 重构出来，并利用奇异值分解方法来降低计算量，能够在快拍数很少的情况下给出满意的结果，

收稿日期：2012－07－23；**修回日期**：2013－12－03；**网络优先出版日期**：2013－06－06。
网络优先出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2422.TN.20130606.1456.015.html
基金项目：国家自然科学基金(61032011)资助课题

本身的恢复过程不会受到相干信源的影响。该方法的缺陷是凸优化重构过程复杂，难以应用在大型阵列结构中，并且算法中用于平衡稀疏度与噪声的参数只是取经验值，该值的选取对最终的估计结果影响较大。随后文献[4－5]提出的 CS 理论及后续的众多改进方法极大丰富了稀疏表示类方法。针对问题的复杂度和精度，CS 重构方法主要有几类：ℓ_1 范数法、$\ell_p(0<p<1)$ 范数法、贪婪算法等。其中，贪婪算法以其计算复杂度低，精度较好而在实际中得到广泛应用。常用方法如正交匹配追踪（orthogonal matching pursuit, OMP）[6]、正则化正交匹配追踪（regularized orthogonal matching pursuit, ROMP）[7]、压缩采样匹配追踪（compressive sampling matching pursuit, CoSaMP）[8]、同时正交匹配追踪（simultaneous orthogonal matching pursuit, SOMP）[9]等。

CS 的突出优势是在较少快拍数的情况下具有高分辨性，其特殊的重构方式使得该方法本身具有抗相干性。但随着快拍数的增多，CS 方法不能给出尖锐的谱峰估计。综合以上分析，CS 理论和 MUSIC 在具体的条件下都有各自的优势和不足，二者之间的这种分离也正是导致具体应用中遇到困难的根本所在。本文利用二者的优势互补关系，建立两种算法之间联系的纽带，形成一种具有普适性的 DOA 估计方法。

文献[10]认为 CS 是以概率性的方式重构信号，而 MUSIC 以确定性的方式构造空间谱，给出了当快拍数由少到多变化时 CS 与 MUSIC 方法之间的联系[10]。该理论与文献[11－12]提出的扩展子空间 MUSIC 方法有异曲同工之妙。本文以 CS 和 MUSIC 理论为基础，将 CS-MUSIC 理论扩展到 DOA 估计应用中。该算法充分利用了两种方法的优势，与传统方法相比，具有高分辨性，并且能够处理相干信源，对不同快拍数都能给出很好的结果。

1 空域信号的稀疏模型

假设 K 个远场窄带信号入射到空间某 M 元均匀线性阵列上。在 n 时刻，阵列接收数据可表示为

$$\boldsymbol{x}(n)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(n)+\boldsymbol{n}(n),\ n=1,2,\cdots,N \tag{1}$$

向量表示形式为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{N}_{\text{noise}} \tag{2}$$

式中，$\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^{M\times N}$ 为阵列接收数据矩阵；$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{M\times Q}$ 为阵列流型矩阵，可表示为

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1(\omega_0)\ \ \boldsymbol{a}_2(\omega_0)\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{a}_Q(\omega_0)]$$

$$\boldsymbol{a}_q(\omega_0)=[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0\tau_{1q}}\ \ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0\tau_{2q}}\ \ \cdots\ \ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0\tau_{Mq}}]^{\mathrm{T}}$$

$\tau_{mq}=\dfrac{1}{\mathrm{c}}(m-1)d\sin(\theta_q)(m=1,2,\cdots,M,q=1,2,\cdots,Q)$；$N$ 为快拍数；Q 为空间网格划分数；d 为阵元间距；c 为电磁波在自由空间中的传播速度；

$\boldsymbol{S}\in\mathbf{C}^{Q\times N}$ 为空间入射信号稀疏表示，为

$$\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{s}_1(n)\ \ \boldsymbol{s}_2(n)\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{s}_Q(n)]^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{N}_{\text{noise}}\in\mathbf{C}^{M\times N}$ 为加入的高斯白噪声。

以上模型将要考虑的空间划分为 $\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_Q\}$，那么流行矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一列都对应了一个潜在辐射源的方位信息，通常 $Q\gg K$。

2 CS-MUSIC 理论

CS-MUSIC 基本原理与几何表示：首先定义 R 表示空间，$\|\boldsymbol{S}\|_0=|\text{supp}\,\boldsymbol{S}|=K$，式中，$\|*\|_0$ 表示稀疏信号中非零单元的数量；支撑域 $\text{supp}\,\boldsymbol{S}=\{1\leqslant q\leqslant Q:\boldsymbol{s}_q\neq 0\}$，$\boldsymbol{s}_q$ 为 $\boldsymbol{S}$ 的第 q 行。$\boldsymbol{I}_{K\text{-}N}\subset\text{supp}\,\boldsymbol{S}$ 且 $|\boldsymbol{I}_{K\text{-}N}|=K\text{-}N$。$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{I}_{K\text{-}N}}\in\mathbf{C}^{M\times(K\text{-}N)}$，表示对应列下标属于 $\boldsymbol{I}_{K\text{-}N}$ 集合的 $\boldsymbol{A}$ 的列组成的矩阵。$P_{R(\boldsymbol{Q})}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}$ 表示噪声子空间相关矩阵，可证明等同于噪声空间的正交投影，其中，H 表示共轭转置。在信号非相干的条件下，快拍数 $N\geqslant K$ 时，信号子空间 $R(\boldsymbol{X})$ 与噪声子空间 $R(\boldsymbol{Q})$ 是严格正交的，此时与 MUSIC 条件一致。MUSIC 方法是建立在二阶统计量的基础上，要求有足够数量的快拍数。当没有噪声存在的情况下，$N\geqslant K$ 时，MUSIC 方法能够精确分辨信源个数。然而，当快拍数少于信号个数时，即 $N<K$，由文献[13]可知阵元接收数据协方差矩阵的秩 $\text{rank}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}})=\text{rank}(\boldsymbol{X})=N<K$，此时 MUSIC 方法失效，这种情况相当于在阵列信号处理中遇到的相干源问题。$N<K$ 时，快拍数的减少导致阵列流型矩阵中对应的空间 $R(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{I}_{K\text{-}N}})$ 在噪声空间的投影不为零。CS-MUSIC 算法的原理是利用 CS 算法先估计出 $K-N$ 个列向量空间 $R(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{I}_{K\text{-}N}})$ 下标，得到列向量空间在噪声空间的投影 $R(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{I}_{K\text{-}N}})$，然后构造出新的噪声子空间 $R(P_{R(\boldsymbol{Q})}-P_{R(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{I}_{K\text{-}N}})})$。将由快拍数缺失导致的非正交空间 $R(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{S}})$ 与 $R(\boldsymbol{Q})$ 转换到新构造的两个正交空间 $R(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{S}})$ 与 $R(\mathrm{P}_{R(\boldsymbol{Q})}-\mathrm{P}_{R(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{I}_{K\text{-}N}})})$ 上，构造形式如图 1 中粗实线所示，然后通过空间扫描形成尖锐的谱峰。

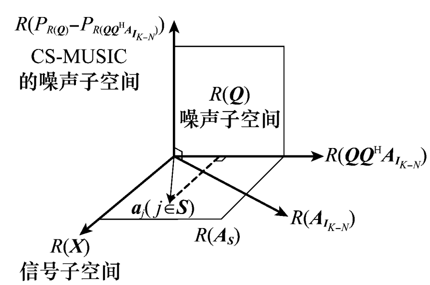

图 1 CS-MUSIC 几何意义

快拍数的不同涉及到算法的具体流程，针对不同快拍数 N，分为以下两种情况：

（1）快拍数 $N\geqslant K$ 时，在这种情况下，可以通过特征值分解的方法实现等价转化，即可以转换到快拍数取 K 的情况。

证明 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{N}_{\text{noise}}$，$\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^{M\times N}$，$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{M\times Q}$，$\boldsymbol{S}\in\mathbf{C}^{Q\times N}$ 且 $\|\boldsymbol{S}\|_0=\mathrm{K}$，对 $\boldsymbol{X}$ 进行奇异值分解有

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}_r\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$$

式中，$\boldsymbol{D}_r\in\mathbf{C}^{r\times r}$，为对角阵；$V\in\mathbf{C}^{N\times r}$；$\text{rank}(\boldsymbol{X})=r$。

对方程 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{N}_{\text{noise}}$ 进行降维处理，则 $\boldsymbol{X}_{SV}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{S}_{SV}=$

$\boldsymbol{SV}, \boldsymbol{N}_{\text{noise }SV}=\boldsymbol{N}_{\text{noise}}\boldsymbol{V}$。可得到降维后的方程为

$$\boldsymbol{X}_{SV}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}_{SV}+\boldsymbol{N}_{\text{noise }SV} \tag{3}$$

显然 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{X}_{SV})=r=K$，并且 $\|\boldsymbol{X}\|_0=\|\boldsymbol{X}_{SV}\|_0=K$。证毕

(2) 快拍数 $N<K$ 时，应用 CS-MUSIC 方法进行估计。

CS-MUSIC 实现条件：只要 $K-N$ 个列向量下标能够通过 CS 中的重构算法估计出来，就能够获取 K 个信号来波方向。当 $N=1$ 时，该算法变成单次快拍的压缩感知方法；当 $N=K$ 时，该算法与传统的 MUSIC 方法正交空间条件一致。

CS-MUSIC 算法流程：

步骤 1　利用 CS 算法中的贪婪算法 SOMP[14-15] 找到 $K-N$ 个列向量下标，令 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_{K\text{-}N}$ 表示含有 $K-N$ 个列向量下标的集合。

步骤 2　利用步骤 1 中下标集合确定对应的流型矩阵列向量集合 $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{I}_{K-N}}$，获得投影空间 $R(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\text{H}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{I}_{K\text{-}N}})$，构造新算法 CS-MUSIC 的噪声子空间 $R(P_{R(\boldsymbol{Q})}-P_{R(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\text{H}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{I}_{K\text{-}N}})})$。

步骤 3　按空间角度划分进行谱峰搜索，$S_{\text{spetral}}=\dfrac{1}{\boldsymbol{a}_q^{\text{H}}[P_{R(Q)}-P_{R(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\text{H}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{I}_{K\text{-}N}})}]\boldsymbol{a}_q}$ $(q=1,2,\cdots,Q)$，较大的谱峰值对应的角度即为目标的 DOA。

3　仿真实验

仿真实验均在以下条件下进行：观察空间按 $-90°\sim90°$，间隔 1°划分，阵列排布方式为阵元间距取半波长的标准线性阵列。分别考虑不同快拍数、相干信号以及信噪比对分辨性能的影响。

3.1　单次快拍 DOA 估计

实验 1　考虑 $M=8$，两个窄带信号分别从 22°和 32°两个方向从远场入射。在单次快拍的情况下，MUSIC 方法已经失效，此时瑞利限 $BW_{NN}=\dfrac{\lambda}{Md}\approx14.3°$，波束形成法也不能够分离这两个信号。取信噪比为 20 dB。通过 ℓ_1-SVD 和 CS-MUSIC 方法进行仿真，结果如图 2 所示，此时 ℓ_1-SVD 的平衡参数的选取接近最优，两种方法都能给出较好的分辨结果，CS-MUSIC 对谱值旁瓣抑制的更低。

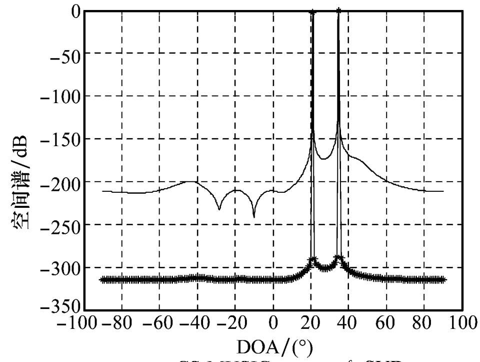

图 2　单次快拍结果对比

3.2　多次快拍 DOA 估计

实验 2　$M=10$，4 个窄带信号分别从 −40°、−10°、30°、50°方向从远场入射，信噪比为 20 dB，对 ℓ_1-SVD，MUSIC，CS-MUSIC 3 种方法在多快拍数情况下仿真对比，结果如图 3 所示。当 $N=K=4$ 时，由于噪声的存在，快拍数过少导致 MUSIC 估计的谱峰不够尖锐，无法分辨信号。ℓ_1-SVD 尽管能估计出 4 个谱峰值，但第 4 个峰值与真实信号方向稍有偏差，此时只有 CS-MUSIC 方法能够给出准确的 DOA 估计。

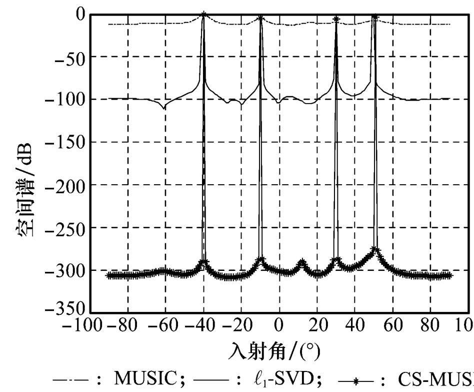

图 3　快拍数 $T=K=4$ 结果对比

3.3　相干信号 DOA 估计

实验 3　实验条件同实验 2，只是对应 −40°和 30°两个方向的信号是相干的，对 ℓ_1-SVD，MUSIC，CS-MUSIC 3 种方法在快拍数 $N=100$ 情况下仿真，结果如图 4 所示。MUSIC在相干信号存在的情况下，丢失来自 −40°和 30°方向的两个信号，ℓ_1-SVD 具有抗相干性，但由于空间划分是 1°间隔，谱峰一般会有斜坡，没有 CS-MUSIC 方法尖锐。CS-MUSIC 与实验 2 仿真结果基本一致，仍然能够准确估计信号方向，没有受到相干信号的影响。

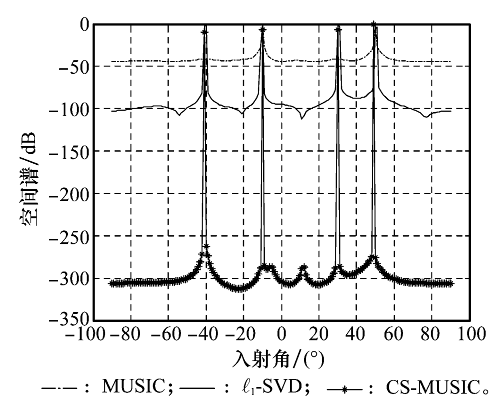

图 4　存在相干信号时 3 种方法仿真结果

3.4　信噪比对估计性能的影响

实验 4　实验条件同实验 2，由于噪声的存在，少量快拍数导致 MUSIC 估计效果不明显，因此增加快拍数 $N=20$，采用均方根误差作为衡量算法性能的指标，DOA 估计

的均方根误差定义为

$$RMSE = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\sqrt{\frac{1}{M_c}\sum_{m_c=1}^{M_c}(\hat{\theta}_{k,m_c}-\theta_k)^2} \tag{4}$$

式中,M_c 为蒙特卡罗实验次数;K 为信号源个数;$\hat{\theta}_{k,m_c}$ 为第 k 个信号源第 m_c 次蒙特卡罗实验的 DOA 估计值。取 $M_c=100$,均方根误差随信噪比变化的情况如图 5 所示。ℓ_1-SVD 在低信噪比时误差较大,在信噪比高于 2 dB 条件下,估计准确度明显变好,优于 MUSIC 方法,CS-MUSIC 在信噪比大于−6 dB 时,误差已经非常小,该结果证明了新方法对噪声具有鲁棒性,优于 ℓ_1-SVD 方法和传统的 MUSIC 方法。

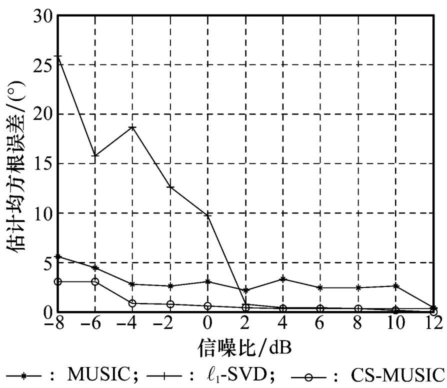

图 5 均方根误差随信噪比变化情况

4 结 论

本文实现基于 CS-MUSIC 的 DOA 估计方法,仿真实验证明新方法不仅具有 CS 在阵列信号处理中的优势,也兼具传统 MUSIC 方法的稳定性特征,如所需阵元少、快拍数自适应、分辨精度高、对噪声影响具有鲁棒性等优势,且能够处理任意的相干源问题。特别是在低信噪比时,CS 方法误差较大;而快拍数较少时,MUSIC 方法误差较大,CS-MUSIC能够兼具二者的优势在条件恶劣的情况下给出精确结果。

参考文献:

[1] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276-280.

[2] Petre S, Arye N. MUSIC, maximum likelihood and Cramer-Rao bound[J]. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1989, 37(5): 720-741.

[3] Malioutov D, Cetin M, Willsky A. A sparse signal reconstruction perspective for source location with sensor arrays[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3010-3022.

[4] Donoho D. Compressed sensing[J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306.

[5] Candes E. Compressive sampling[C]// *Proc. of the International Congress of Mathematicians*, 2006: 1433-1452.

[6] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655-4666.

[7] Needell D, Vershynin R. Signal recovery from inaccurate and incomplete measurements via regularized orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, 4(2): 310-316.

[8] Needell D, Tropp J A. CoSaMP: iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2008, 26(3): 301-321.

[9] Chen J, Huo X. Theoretical results on sparse representations of multiple measurement vectors[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2006, 54(12): 4634-4643.

[10] Lee O, Ye J C. Compressive MUSIC: revisiting the link between compressive sensing and array signal processing[J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2012, 58(1): 278-301.

[11] Lee K, Bresler Y. Subspace-augmented MUSIC for joint sparse recovery[C]// *Proc. of the Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop*, 2010: 205-208.

[12] Kim J M, Lee O, Ye J C. Compressive MUSIC with optimized partial support for joint sparse recovery[C]// *Proc. of the Information Theory Proceedings*, 2011: 658-662.

[13] Zhang X D. *Matrix analysis and applications*[M]. 4th ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 61-64.(张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 4 版. 北京:清华大学出版社, 2004: 61-64.)

[14] Tropp J A, Gilbert A C, Strauss M J. Algorithms for simultaneous sparse approximation—Part Ⅰ: greedy pursuit[J]. *Signal Processing*, 2006, 86(3): 572-588.

[15] Tropp J A. Algorithms for simultaneous sparse approximation. Part Ⅱ: convex relaxation[J]. *Signal Processing*, 2006, 86(3): 624-638.

作者简介:

吴小川(1986-),男,博士研究生,主要研究方向为阵列信号处理、压缩感知。
E-mail: wuholland@126.com

邓维波(1961-),男,教授,博士研究生导师,主要研究方向为雷达抗干扰技术及天线阵列信号处理、雷达目标散射特性。
E-mail: dengweibo@hit.edu.cn

杨 强(1970-),男,副教授,博士研究生导师,主要研究方向为弱目标检测、新体制信号处理和信息提取、实时信号处理。
E-mail: yq@hit.edu.cn