

doi:10.3969/j.issn.1001-2400.2013.03.028

## 奇异系统的无源性补偿算法

闫旭<sup>1</sup>, 李玉山<sup>1</sup>, 丁同浩<sup>1</sup>,  
曲咏哲<sup>1</sup>, 蒋冬初<sup>1,2</sup>, 路建民<sup>1</sup>

- (1. 西安电子科技大学 电路CAD研究所, 陕西 西安 710071;  
2. 湖南城市学院 通信与电子工程学院, 湖南 益阳 413000)

**摘要:** 针对现有的奇异系统无源性补偿算法都需要系统分解, 仿真时间较长的问题, 提出了一种快速的无源性补偿方法. 通过扰动状态方程的参数值构建目标函数和约束函数以形成二次规划问题, 利用拉格朗日乘法, 将复杂的数值优化求解问题转变为简单的线性方程组求解问题, 提高了仿真效率. 数值例子表明, 该方法在有限的仿真时间内精确补偿了宏模型的无源性.

**关键词:** 奇异系统; 无源性; 二次规划

**中图分类号:** TN801   **文献标识码:** A   **文章编号:** 1001-2400(2013)03-0188-06

## Passivity enforcement scheme for descriptor systems

YAN Xu<sup>1</sup>, LI Yushan<sup>1</sup>, DING Tonghao<sup>1</sup>,  
QU Yongzhe<sup>1</sup>, JIANG Dongchu<sup>1,2</sup>, LU Jianmin<sup>1</sup>

- (1. Research Inst. of Electronic CAD, Xidian Univ., Xi'an 710071, China;  
2. School of Comm. and Electronic Eng., Hunan City Univ., Yiyang 413000, China)

**Abstract:** For the macromodel in descriptor systems, the existing methods require system decomposition, which greatly increase the computational time. A fast and efficient perturbation method is proposed for the passivity enforcement of S-parameter descriptor systems. The method generalizes quadratic programming with equality constraint introduced for regular systems which makes full use of matrix sparsity. It is implemented by perturbing some parameters of the DS to construct the objective function and constraint function of the quadratic programming problem. By using Lagrange multipliers, the complex optimization problem is transformed to a linear system solution, which greatly increases simulation efficiency. Numerical examples are presented to demonstrate the validity and efficiency of the proposed algorithm.

**Key Words:** descriptor system; passivity; quadratic programming

奇异系统, 又称为广义系统或描述系统, 在经济学、统计学、大规模系统、网络、电子、动力和神经系统中有着广泛的应用<sup>[1]</sup>. 许多电路建模方法, 如修正节点分析, 生成的模型就是奇异系统<sup>[2]</sup>. 奇异系统比常规系统更适合描述物理系统. 奇异系统的可控性、可观测性、稳定性在过去几十年里成为很多学者研究的课题. 然而确保奇异系统的无源性也是至关重要的. 因为一个稳定的非无源的模型连接到一个无源的元件, 可能会产生一个不稳定的输出. 奇异系统的无源性问题已经越来越受关注.

对于常规系统, 无源性问题应该受到很多学者的关注. 现有的无源性补偿方法也很多, 如凸优化方法<sup>[3]</sup>、二次规划方法(QP)<sup>[4-6]</sup>、基于哈密顿矩阵的方法<sup>[7]</sup>. 但是奇异系统的无源性补偿方法却相对较少. 正实引理<sup>[8]</sup>或边界实引理<sup>[2]</sup>是判定系统无源性的准则. 但是通过扰动不等式中的参数来补偿无源性是不实际的. 因

收稿日期: 2012-02-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60871072, 60672027); 国家教育部博士点基金资助项目(20050701002); 湖南省自然科学基金资助项目(10JJ6091); 湖南省科技厅科技计划资助项目(2010FJ6015)

作者简介: 闫旭(1984-), 女, 西安电子科技大学博士研究生, E-mail: yanxu@mail.xidian.edu.cn.

为求解线性矩阵不等式的计算复杂度太高,为  $O(n^5)$  到  $O(n^6)$ . 最近,基于扰动哈密顿矩阵的方法被引入到奇异系统中<sup>[9]</sup>,但是每次迭代中虚数特征值的扰动量难以确定,若取值偏大,会影响模型的精度;若取值偏小,则会增加迭代次数和仿真时间. 而且若哈密顿矩阵接近病态,该算法可能难以收敛. 此外,该算法需要进行系统分解,增加了仿真时间. 为了更有效地补偿奇异系统的无源性,笔者提出了一种基于二次规划的补偿算法. 该方法扩展了现有的适用于常规系统的二次规划算法<sup>[5-6]</sup>. 通过扰动奇异系统的留数矩阵来迭代补偿无源性违背. 这是一种利用纯代数实现宏模型无源性的方法,在快速补偿模型无源性的同时,确保了模型的精度.

## 1 奇异系统的模型

许多电路和元件可以由奇异系统表示,即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}, \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ , 是状态变量;  $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^p$ , 是系统输出;  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^p$ , 是外部输入;  $\mathbf{E}, \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times p}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{p \times n}$ ,  $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{p \times p}$ , 为状态矩阵,  $\mathbf{E}$  一般是奇异的, 且  $\text{rank}(\mathbf{E}) = r \leq n$ . 如果  $\mathbf{E}$  是不可逆的, 则式(1)就描述了一个常规系统. 以上系统的转移函数为

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (2)$$

这里, 假设矩阵束  $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$  是非奇异的, 即存在  $s_0 \in \mathbf{C}$ , 使得  $|s_0\mathbf{E} - \mathbf{A}| \neq 0$ .

## 2 无源性分析

系统的无源性是指系统内部消耗的能量小于或等于外部供给的能量, 即系统不会产生能量. 无源性条件等效为系统的转移函数是正实的, 需要满足以下条件:

- (1)  $\mathbf{H}(s)$  是解析的,  $\mathbf{C}_+ := \{s \in \mathbf{C} \mid \text{Re}(s) > 0\}$ ;
- (2)  $\mathbf{H}(\bar{s}) = \overline{\mathbf{H}(s)}$ , 对于所有的  $s \in \mathbf{C}$ ;
- (3)  $\mathbf{G}(j\omega) \geq 0$ , 对于所有的  $\omega \in \mathbf{R}$ , 其中,  $\mathbf{G}(j\omega) = \begin{cases} \mathbf{H}^H(j\omega) + \mathbf{H}(j\omega) & , \quad \text{混合,} \\ \mathbf{I} - \mathbf{H}(j\omega)^H \mathbf{H}(j\omega) & , \quad \text{散射.} \end{cases}$

目前有几种方法可以检查以上的无源性条件, 如频率扫描方法<sup>[10]</sup>, 扩展的线性矩阵不等式方法<sup>[2,8]</sup>, 广义哈密顿矩阵方法<sup>[11-14]</sup>等. 这里采用广义哈密顿矩阵方法来检查无源性违背. 由于需要计算广义哈密顿的特征值, 其计算复杂度为  $O(n^3)$ . 为了快速求解, 可以采用 Krylov 子空间方法, 只计算虚轴附近的特征值<sup>[14]</sup>. 文献[14]中给出了快速计算混合(阻抗或导纳)矩阵的广义特征方法. 因此这里仅对散射情况进行简单的讨论. 首先, 回顾散射系统的哈密顿矩阵, 即

$$(\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{N}}) = \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{C} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{C}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{A}^T + \mathbf{C}^T\mathbf{D}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{E}^T \end{bmatrix} \right], \quad (3)$$

引入复数位移量  $\theta$ , 设矩阵束  $(\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{N}})$  的特征对为  $(\lambda, \mathbf{x})$ , 即  $\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{x} = \lambda\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{x}$ , 且  $\theta \neq \lambda$ , 那么它的移位求逆特征值问题为

$$(\tilde{\mathbf{M}} - \theta\tilde{\mathbf{N}})^{-1}\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{x} = \nu\mathbf{x}, \quad \nu = 1/(\lambda - \theta), \quad (4)$$

其中, 
$$(\tilde{\mathbf{M}} - \theta\tilde{\mathbf{N}})^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_p + \mathbf{A}_\theta^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}_\theta^T\mathbf{C})\mathbf{A}_\theta^{-1} & -\mathbf{A}_\theta^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{A}_\theta^{-T} \\ \mathbf{A}_\theta^{-T}\mathbf{C}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}_\theta^{-1} & -(\mathbf{I}_p + \mathbf{A}^{-T}\mathbf{C}^T\mathbf{H}_\theta\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T)\mathbf{A}_\theta^{-T} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_\theta = \mathbf{A} - \theta\mathbf{E}, \quad \mathbf{H}_\theta = \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}_\theta^{-1}\mathbf{B}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{H}_\theta^T\mathbf{H}_\theta - \mathbf{I}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{H}_\theta\mathbf{H}_\theta^T - \mathbf{I}.$$

虽然  $\mathbf{A}_\theta$  可能是非对角矩阵, 但通过稀疏的 LU 分解,  $\mathbf{A}_\theta^{-1}$  可以很容易求得. 应用重定位的 Arnoldi 迭代算法来计算  $(\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{N}})$  所有的位于虚轴的广义特征值. 以上算法需要的操作与问题的大小有关, 但却总是与其呈线性关系<sup>[14]</sup>.



$$\text{其中, } \mathbf{z}_k = -2 \operatorname{Re} \left( (\mathbf{K}_k \mathbf{v}_k)^T \otimes (\mathbf{H}_k \mathbf{v}_k)^H \right), \quad (14)$$

$\epsilon$  为预定义的容限函数,实际上略大于 0.

对所选每个无源性违背频率抽样定义上述的线性约束,将其写成紧凑的矩阵形式为

$$\mathbf{Z} \operatorname{vec}(\Delta \mathbf{C}) = \mathbf{g}. \quad (15)$$

### 3.3 求解最小均方问题

约束函数式(15)和目标函数式(8)组成了一个标准的等式约束的二次规划问题.根据拉格朗日乘数法,它的最优解必须满足以下条件:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Z}^T \\ \mathbf{Z} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{vec}(\Delta \mathbf{C}) \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

其中,  $\boldsymbol{\alpha}$  为拉格朗日乘数.由于  $\mathbf{X}$  为满秩矩阵,则方程式(16)可以写成以下的解析形式<sup>[5]</sup>:

$$\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{Z}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Z}^T)^{-1}(-\mathbf{g}), \quad (17)$$

$$\operatorname{vec}(\Delta \mathbf{C}) = \mathbf{X}^{-1}(-\mathbf{Z}^T \boldsymbol{\alpha}). \quad (18)$$

需要注意的是,由于算法针对的是违背无源性的离散频率点,因此需要进行迭代.

## 4 仿真与性能分析

为了说明文中算法相对于文献[9]算法的优越性,可从目标函数、约束条件与求解方法来分析.对于目标函数,由于具有式(10)中的稀疏结构,因此构建比较简单.而文献[9]中的方法需要求解 Lyapunov 方程,大大增加了计算复杂度和时间;对于约束条件,由于文中算法和文献[9]算法均采用一阶近似,因此在精度上没有太大的差异.对于现代高速系统,无源性违背的频带一般较宽,因此采用离散频率点的特征值扰动策略要比哈密顿特征值的扰动策略算法的收敛速度明显提高.对于求解方式,文献[9]中的方法可采用凸优化或广义逆的方法来求解.虽然广义逆算法本身的求解速度与文中的解析方法速度相当,但是由于文中算法充分利用了矩阵的稀疏性质,所以总体来说,其求解速度还是要快于广义逆算法的求解速度.综上所述,相对文献[9]中的算法,文中算法在仿真速度与存储需求上更具优势.

为了验证所提方法的速度与精度,下面给出了 3 个例子.文中所有的仿真均是在处理器为 Pentium IV,主频为 2 GHz,内存为 2 GB 的主机上运行的.

### 4.1 单输入单输出奇异系统

考虑以下的 4 阶单输入单输出奇异系统<sup>[12]</sup>,它的参数如下:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & & & \\ & -120 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 10 \\ 200 \\ 10^{-5} \\ 0 \end{bmatrix}^T,$$

$\mathbf{D}$  为  $1 \times 1$  的矩阵,值为  $-1$ .

通过第 2 节的无源性检查程序,可知该系统有两个纯虚数特征值:  $s$  为  $j22.86$  和  $j3.044917 \times 10^5$ . 利用文中算法来实现系统的无源性.对于该实验,文中算法只需要一次迭代就能完成无源性的补偿.图 1 比较了无源性补偿之前和之后的奇异系统,两条曲线非常吻合.可以看到,所有的无源性违背均被去除.求解最小均方系统所需的时间为 12 ms,总的仿真时间为 0.057 s.

### 4.2 共模滤波器

四端口共模滤波器的 S 参数数据可通过测量得到<sup>[15]</sup>.频率范围为 300 kHz~8.5 GHz.利用 Loewner 插值方法构建奇异系统<sup>[16]</sup>.图 2 中给出了  $\mathbf{H}(j\omega)$  的 4 个奇异值  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ .从图 2 可以看到,大的无源性违背发生在 8 GHz 以上,这可能是由于建模误差引起的.在确定无源性违背的区域以后,利用所提算法对模型进行无源性补偿,结果如图 2 所示.可以看到所有的无源性违背均被去除.求解最小均方系统所需的时间为 0.085 s,总的仿真时间为 1.925 s.

为了验证模型的精度没有大的损耗,图 3 给出了无源性补偿前后  $H(j\omega)$  的幅度和相位. 最小均方误差为 0.002 6. 结果表明,所提方法达到了很好的效果.

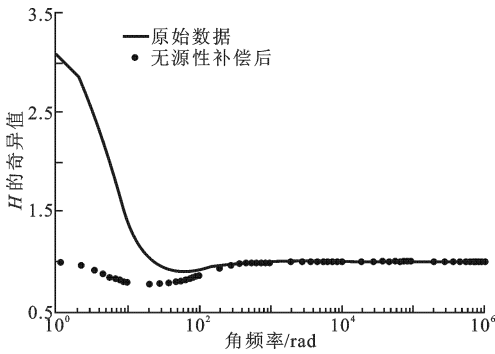


图 1  $H(j\omega)$  的奇异值(实验 1)

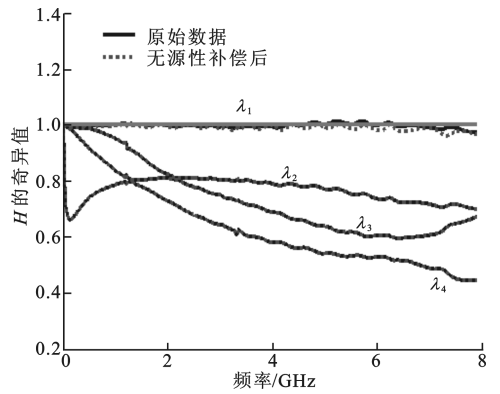
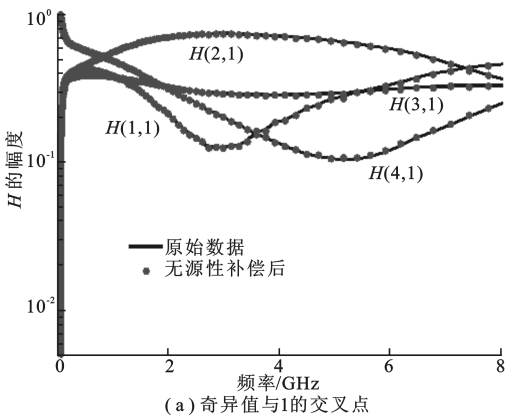
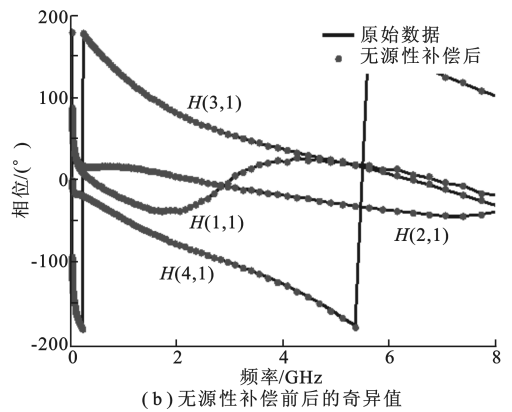


图 2  $H(j\omega)$  的奇异值(实验 2)



(a) 奇异值与1的交叉点

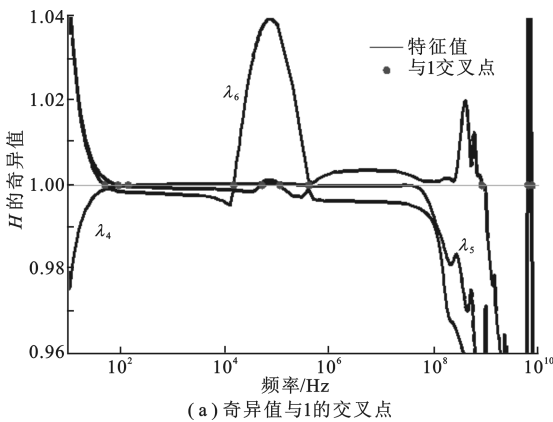


(b) 无源性补偿前后的奇异值

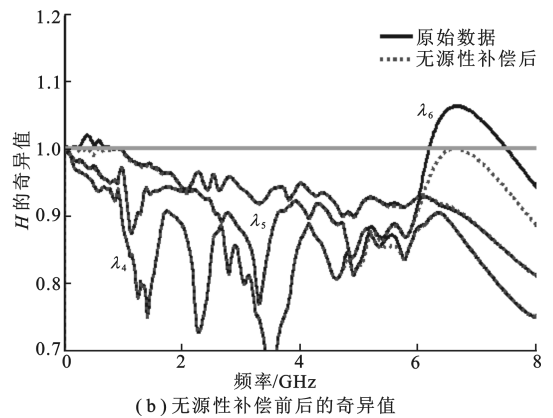
图 3  $H(j\omega)$  的幅度和相位(实验 2)

### 4.3 脉冲转换器

六端口脉冲转换器的 S 参数数据是从散射的 S 参数数据库中得到的<sup>[15]</sup>. 利用 Loewner 插值方法<sup>[16]</sup> 构建奇异系统模型, 频率范围为 0~8.5 GHz. 无源性检查表明, 奇异系统有轻微的无源性违背. 图 4 给出了  $H(j\omega)$  的奇异值  $\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ . 使用第 2 节给出的无源性检查算法, 识别出 12 个与  $\sigma=1$  相交的频率点. 无源性补偿前后的奇异值也在图 4(b)中给出. 可以看到, 所有的无源性违背均被去除. 整个无源性补偿算法只需要 3 次迭代就可收敛. 求解最小均方系统所需的时间为 0.72 s, 总的仿真时间为 8.870 5 s.



(a) 奇异值与1的交叉点



(b) 无源性补偿前后的奇异值

图 4  $H(j\omega)$  的奇异值(实验 2)

图 5 和图 6 给出了无源性补偿前后  $H(j\omega)$  的幅度和相位. 最小均方误差为 0.001 2. 结果表明, 所提方法达到了很好的效果.

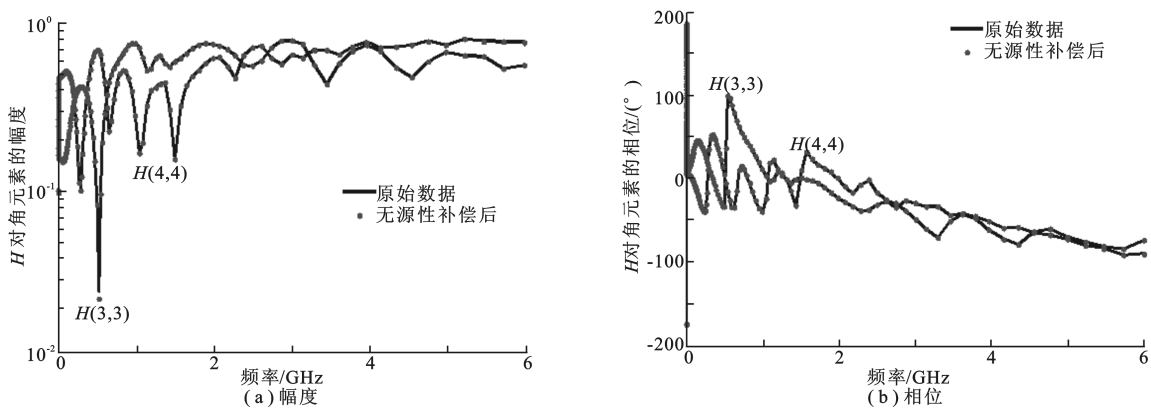


图 5  $H(i,i)$  的幅度与相位(实验 3)

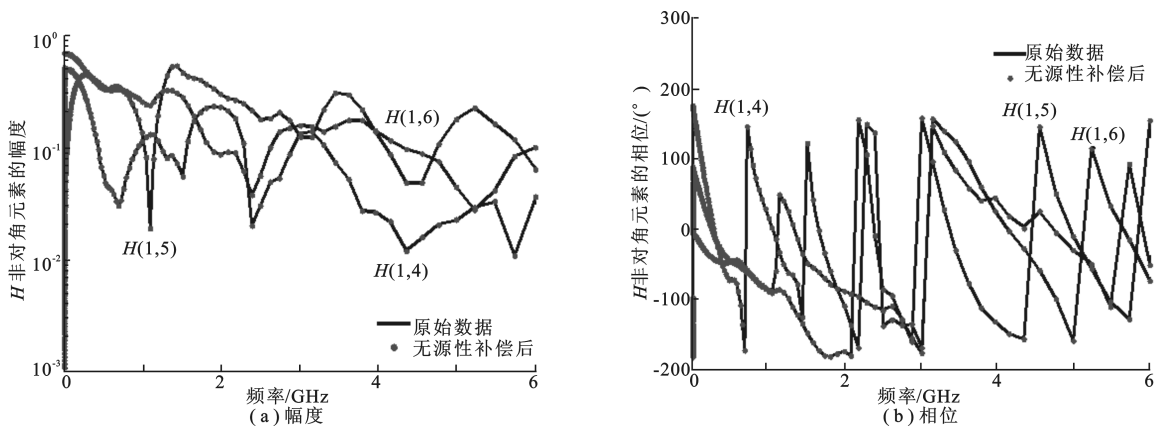


图 6  $H(1,i)$  的幅度与相位(实验 3)

## 5 结 束 语

提出了一种有效的算法来补偿奇异系统的无源性. 该算法通过一阶垂直扰动奇异值, 构建二次规划问题的目标函数和约束函数, 并将优化问题转换成解析求解线性方程组来补偿系统的无源性. 虽然奇异系统的状态矩阵没有特殊的稀疏结构, 但是可以利用稀疏分解来提高仿真速度. 此外, 还给出了快速检测 S 参数无源性的关键公式. 仿真实例表明, 该方法能够快速补偿模型的无源性违背, 同时确保了模型的精度.

### 参 考 文 献:

- [1] Lewis F L. A Survey of Linear Singular Systems[J]. Circuits System Signal Process, 1986, 5(1): 3-36.
- [2] Wang H S, Yung C F, Chang F R. Bounded Real Lemma and  $H_\infty$  Control for Descriptor Systems[C]//1997 American Control Conference. Albuquerque: IEE, 1997: 2115-2119.
- [3] Coelho C P, Phillips J, Silveira L M. A Convex Programming Approach for Generating Guaranteed Passive Approximations to Tabulated Frequency-Data[J]. IEEE Trans on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and System, 2004, 23(2): 293-301.
- [4] Gustavsen B. Computer Code for Passivity Enforcement of Rational Macromodels by Residue Perturbation[J]. IEEE Trans on Advanced Packaging, 2007, 23(4): 2278-2285.
- [5] Gao S, Li Y S, Zhang M S. An Efficient Algebraic Method for the Passivity Enforcement of Macromodels[J]. IEEE Trans on Microwave Theory and Techniques, 2010, 58(7): 1830-1839.
- [6] 闫旭, 李玉山, 高崧, 等. 一种实现导纳矩阵宏模型无源性的快速方法[J]. 西安电子科技大学学报, 2011, 38(1): 153-158.  
Yan Xu, Li Yushan, Gao Song, et al. Fast Method to Enforce the Passivity of Macromodels for the Admittance Matrix [J]. Journal of Xidian University, 2011, 38(1): 153-158.

(下转第 220 页)