

# 超效率 DEA 模型的模糊扩展

王美强<sup>1,2</sup>, 梁 樑<sup>1</sup>, 李勇军<sup>1</sup>

(1. 中国科学技术大学管理学院, 安徽 合肥 230026; 2. 贵州大学管理学院, 贵州 贵阳 550025)

**摘 要:**在输入、输出数据为模糊数而效率值为准确值的模糊 DEA 模型中,会出现有两个以上有效单元,从而无法对所有决策单元进行全排序的情形。本文利用模糊数的基于  $\alpha$ -截集的比较规则,建立了模糊条件下的超效率 DEA 模型,有效地解决了模糊决策单元的全排序问题。文末给出了一个实例。

**关键词:**模糊 DEA;超效率;排序

**中图分类号:**C934 **文献标识码:**A

## 1 引言

数据包络分析( DEA )是一种测算具有相同类型投入和产出的若干部门(称决策单元 decision - making units, DMUs)相对效率,并估计由这组决策单元所确定的生产前沿面的非参数方法。而超效率方法( super - efficiency DEA )<sup>[1]</sup>,则是改进了的 DEA 方法,其模型与传统 DEA 模型( CCR、BCC 模型)的主要区别在于参考集的不同。传统 DEA 模型的参考集是所有决策单元的线性组合,而超效率模型的参考集则是除待评价的决策单元之外的所有其他决策单元的线性组合。在功能上的区别在于前者当出现两个以上的有效单元时(效率值均为 1)所有 DMUs 无法全排序,而后者则统一了有效和非有效单元的评价,能对所有 DMUs 进行全排序。

传统 DEA 模型( CCR、BCC 模型)及超效率 DEA 模型要求其输入和输出数据都是准确数据。但在现实的生产和管理活动中,决策单元的投入产出常常不能精确确定;而且,有的投入产出指标还只能得到语言类数据,如“好”、“一般”、“老”等,此时传统 DEA 模型就无能为力了。因而,借助模糊集理论数量化非精确数据和模糊的语言类数据,研究 DEA 模型的模糊扩展很有必要。当输入和输出全部或部分为模糊数时,评价其相对有效性的 DEA 方法被

称为模糊 DEA。已有不少学者对模糊 DEA 进行了研究。Guo 和 Tanaka<sup>[2]</sup>提出了一个模糊 CCR 模型,它是通过事先定义可能性水平,并利用模糊数的比较规则,将包括模糊等式和不等式在内的约束转换为确定性约束而实现的。基于相同的思想,Leon 等<sup>[3]</sup>提出了一个模糊 BCC 模型,但与[2]不同的是,Leon 等提出的模型是基于包络模型,而不是乘子模型。Kao 和 Liu<sup>[4]</sup>提出了利用  $\alpha$ -截集将模糊数转换为区间数,从而利用传统 DEA 模型求解的方法。Lertworasirikul<sup>[5,6]</sup>将模糊约束看成随机事件,利用随机 DEA 方法求解模糊 DEA。M. Soleimani - damaneh<sup>[7]</sup>基于模糊数的距离函数比较方法建立了模糊 DEA 模型,方法需要事先知道隶属函数的解析形式。在国内的学者中,吴文江和陈颖<sup>[8]</sup>、曾祥云和吴育华<sup>[9]</sup>、吴海平等<sup>[10]</sup>建立了数据为 L - R 型模糊数的 DEA 模型;张茂勤等<sup>[11]</sup>建立了基于 Campos 指数的模糊 DEA 模型。他们的模型都是基于模糊数的比较法则建立的。李志亮等<sup>[12]</sup>、黄朝峰和廖良才<sup>[13]</sup>采用取截集的方法研究了模糊条件下的决策单元有效性问题。梁樑和吴杰<sup>[14]</sup>、郭均鹏和吴育华<sup>[15]</sup>对超效率模型进行了区间(区间数是模糊数最特殊的情形)扩展。

所有这些模糊 DEA 的解法,主要可归为三类,其一是基于模糊数比较规则而建立的模型,其二是取截集的方法,其三是可能性方法,即随机 DEA 方法。决策单元效率值也有三种:准确值,区间值,模糊值。三种方法及三种决策单元效率值形式各有利弊,没有哪一种方法哪一种形式具有压倒性的优势。单就实用与便利而言,效率值为点值要好一些,决策单元之间孰优孰劣一目了然。但此时会产生传统

收稿日期:2008 - 07 - 14; 修订日期:2009 - 03 - 15

基金项目:国家自然科学基金资助项目(70525001)

作者简介:王美强(1972 - )男(汉族),贵州人,中国科学技术大学管理学院博士研究生,研究方向:数据包络分析( DEA )。

DEA 模型使用中产生的同样问题——当出现两个以上的有效单元时(效率值均为 1)决策单元之间无法排序,如文献[3][7]的算例都出现了这样的问题。该问题在 DMU 的输入和输出个数相对于 DMU 个数较多时尤为突出。在输入和输出数据都是准确数据时,超效率 DEA 模型很好地解决了这个问题;而在输入和输出数据为模糊数时,本文将利用模糊数的基于  $\alpha$ -截集的排序方法,建立模糊条件下的超效率模型来解决模糊决策单元的全排序问题。本文的工作与梁樑<sup>[14]</sup>、郭均鹏<sup>[15]</sup>的工作有些类似之处,他们都是基于区间数的比较而建立区间 DEA 模型,都服务于当 DMU 的输入输出为区间数时所有决策单元的全排序,是超效率模型的区间扩展;而本文的模糊 DEA 模型是基于模糊数的比较而建立的,服务于模糊决策单元的全排序,是超效率模型的模糊扩展;他们的模型能处理区间数,而本文的方法理论上能处理 L-R 型模糊数,应用中处理三角模糊数更为有效。因此,本文的工作可看作是他们工作的延续与发展。

本文将建立的模型应用到弹性制造系统 (flexible manufacturing system, FMS) 的选择中。一个弹性制造系统 (FMS) 被设计来将大型生产线的效率与用一组机器来生产零部件的工作车间的弹性结合起来。使用 FMS 的主要好处有增加产品类型、提高产品质量、减少产品生产时间、减少安装成本等。在本应用实例中,语言变量和三角模糊数被用来数量化存在于决策参数中的模糊性,非准确的或不确定性的数量性的数据被三角模糊数有效表示,从而使选择过程中,有形的、无形的因素都可被考虑进去。文章的第 4 部分将验证本文的方法是一个可行的工具,利用它能作出最佳选择。

## 2 超效率模型

Andersen 和 Petersen(1993)于[1]中提出了超效率排序方法,该方法通过将 CCR 乘子模型中的第  $j_0$  个约束去除,从而使得有效的单元  $j_0$  (如果有有效的话)获得大于或等于 1 的效率值,而非有效的单元效率值不变,模型如下:

$$\begin{aligned}
 h_0 &= \max_{r=1}^s u_r y_{rj_0} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \text{ 且 } j \neq j_0 \\
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$u_r = 0 \quad r = 1, \dots, s$$

$$v_i = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

(1)的对偶模型为如下(2)

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \theta \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \theta y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2}$$

该超效率模型与传统 DEA 模型的不同之处在于定义被评价单元的参考集有所不同,在评价某决策单元时,传统 DEA 模型的参考集是所有决策单元的线性组合,即把待评价的决策单元和所有决策单元的线性组合相比较,而超效率模型则是将待评价的决策单元和所有其他决策单元的线性组合相比较;该模型在评价时,有效的被评价对象有可能按比例增加其投入而仍然保持其相对有效性。它将某个有效评价对象能增加其投入而仍保持其相对有效性的最大比例值作为该评价对象的新的效率值。显然,这样前沿面上的极点(extreme points)的效率指数将增大,不再是 1,而是大于 1;而前沿面上可用前沿面上的极点线性表示的有效点的效率指数不变;非有效的决策单元的效率指数不变。这样就统一了有效和非有效单元的评价。

## 3 模糊条件下的超效率模型及其求解

### 3.1 模糊超效率模型

当(1)(2)中的输入、输出数据不再是精确值而是模糊数时,则有以下模糊超效率模型。与(1)相应的是:

$$\begin{aligned}
 h_0 &= \max_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj_0} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj} \leq \theta, \quad j = 1, \dots, n \text{ 且 } j \neq j_0 \\
 & \sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{i0} = 1 \\
 & u_r = 0 \quad r = 1, \dots, s \\
 & v_i = 0 \quad i = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{3}$$

与(2)相应的是:

$$\text{Min } \theta$$

$$\begin{aligned}
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \tilde{x}_{ij} < \tilde{x}_{i0}, i = 1, \dots, m \quad (4) \\
 & \sum_{j=1}^n \tilde{y}_{rj} > \tilde{y}_{r0}, r = 1, \dots, s \\
 & x_j \geq 0, j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

### 3.2 模糊超效率模型的求解

模糊超效率模型的求解既可基于(3)亦可基于(4),但如果基于乘子模型(3),由于此时的目标是模糊数的线性函数,因而需要引入模糊变量的最大化标准,而且其约束  $\sum_{k=1}^n v \tilde{x}_k = 1$  中的 1 (1, e) 还必须加以解释;此外如[2]中一样,最终得到的模糊超效率模型的求解模型将是一个二级规划模型,这不利于计算。反之基于(4)则简便得多。因此,后面将基于(4)建立其求解规划。而对于模型(4)中的“大于”定义为可能性水平下的“大于”,即对任意两模糊数  $\tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{M} \tilde{>} \tilde{N}$  是在给定可能性水平  $h \in [0, 1]$  下的。

在模型(4)中,同一 DMU 在不同可能性水平  $h$  下的超效率值有如下关系:

结论 1:模型(4)中的超效率值  $\theta(h)$  是可能性水平  $h$  的递减函数。

结论是显然的,因为如一个可行解是  $h = h_0$  时的模型(4)的最优解,则它必是  $\forall h \leq h_0$  下的模型(4)的可行解,所以  $\theta(h) \geq \theta(h_0)$ ,其中  $h, h_0 \in [0, 1]$ 。

事实上,只要模糊数之间的比较是基于可能性水平的,该结论对模糊 CCR、模糊 BCC 模型也成立。该结论与直觉相吻合。

#### 3.2.1 基于 $\alpha$ -截集的模糊数比较

定义 1:设  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  为一映射,如果它满足以下条件:

- (1) 在模糊数  $\tilde{M}$  的支撑集  $\text{supp}(\tilde{M}) = \{r: \mu_{\tilde{M}}(r) > 0\}$  内单调递减
- (2) 上半连续
- (3)  $f(0) = 1$

则称  $f$  是模糊数  $\tilde{M}$  的参考函数。

定义 2:一个模糊数  $\tilde{M}$  被称为 L - R 模糊数,如果其隶属函数有以下形式:

$$\mu_{\tilde{M}}(r) = \begin{cases} L(\frac{m^L - r}{L - m^L}), & r \in [m^L, m^R] \\ 1, & r = m^L \\ R(\frac{r - m^R}{R - m^R}), & r \in [m^R, m^L] \end{cases} \text{ 记为 } \tilde{M} = (m^L, m^R)$$

$m^R, m^L, m^R)_{L,R}$ ,其中 L 和 R 为参考函数

据 L - R 模糊数定义,可知两个 L - R 模糊数的和与差以及 L - R 模糊数与普通实数(不等于零)的积仍然为 L - R 模糊数。设  $\tilde{M}_j = (a_j^L, a_j^R, l_j^L, l_j^R)_{L,R}, x_j \in \mathbf{R}$  且  $x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$ , 则有

$$\sum_{j=1}^n \tilde{M}_j x_j = (\sum_{j=1}^n a_j^L x_j, \sum_{j=1}^n a_j^R x_j, \sum_{j=1}^n l_j^L x_j, \sum_{j=1}^n l_j^R x_j)_{L,R} \quad (5)$$

由文献[16][17],有以下结论:

定理 1:设  $\tilde{M}, \tilde{N}$  为两个模糊数而  $h$  为一实数,

$$h \in [0, 1], \text{ 则 } \tilde{M} \tilde{>} \tilde{N} \text{ 当且仅当对 } \forall k \in [h, 1] \text{ 有 } \inf \left\{ s: \mu_{\tilde{M}}(s) \geq k \right\} > \inf \left\{ t: \mu_{\tilde{N}}(t) \geq k \right\}, \text{ 且 } \sup \left\{ s: \mu_{\tilde{M}}(s) \leq k \right\} < \sup \left\{ t: \mu_{\tilde{N}}(t) \leq k \right\}.$$

推论 1:如  $\tilde{M}, \tilde{N}$  为 L - R 模糊数,  $\tilde{M} = (m^L, m^R, l^L, l^R)_{L,R}, \tilde{N} = (n^L, n^R, l^L, l^R)_{L,R}$  则有  $\tilde{M} \tilde{>} \tilde{N}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^L - L^*(k) > n^L - L^*(k) \\ m^R + R^*(k) < n^R + R^*(k) \end{cases} \quad \forall k \in [h, 1]$$

其中  $L^*(k) = \sup \{z: L(z) \geq k\}, L^*(k) = \sup \{z: L(z) \geq k\}, R^*(k) = \sup \{z: R(z) \geq k\}.$

推论 2:如  $\tilde{M}, \tilde{N}$  为 L - R 模糊数,  $\tilde{M} = (m^L, m^R, l^L, l^R)_{L,R}, \tilde{N} = (n^L, n^R, l^L, l^R)_{L,R}$  具有有界的支撑集且  $L = L, R = R$  则有  $\tilde{M} \tilde{>} \tilde{N}$  当且仅当

$$\begin{cases} m^L > n^L \\ m^R < n^R \\ m^L - L^*(h) > n^L - L^*(h) \\ m^R + R^*(h) < n^R + R^*(h) \end{cases} \quad (6)$$

#### 3.2.2 模糊超效率模型的求解规划

设将要评估  $n$  个具有  $m$  种输入、 $s$  种输出的  $n$  个 DMUs 的相对效率,所有数据均不能精确测量但能表示为具有有界支撑的 L - R 模糊数

$$\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^L, x_{ij}^R, l_{ij}^L, l_{ij}^R)_{L,R}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

$$y_{rj} = (y_{rj}^L, y_{rj}^R, l_{rj}^L, l_{rj}^R)_{L,R}, r = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

并假设所有的输入、输出变量其相应的  $n$  个数据都能表示为同种类型 L - R 模糊数,即

$$\begin{aligned}
 L_{i1} &= \dots = L_{im} = L_i, i = 1, \dots, m \\
 L_{r1} &= \dots = L_{rm} = L_r, r = 1, \dots, s \\
 R_{i1} &= \dots = R_{im} = R_i, i = 1, \dots, m \\
 R_{r1} &= \dots = R_{rm} = R_r, r = 1, \dots, s
 \end{aligned}$$

则由(5)(6),在给定可能性水平下,模型(4)可

转换为模型(7):

$$\begin{aligned}
& \text{Min } 0 \\
& \text{s. t. } \sum_{j=1}^n x_{ij}^L - \sum_{j_0} x_{i0}^L, i = 1, \dots, m \\
& \sum_{j=1}^n x_{ij}^R - \sum_{j_0} x_{i0}^R, i = 1, \dots, m \\
& \sum_{j=1}^n x_{ij}^L - L_i^*(h) \sum_{j_0} x_{ij_0}^L - \sum_{j_0} x_{i0}^L, i = 1, \dots, m \\
& \sum_{j=1}^n x_{ij}^R + R_i^*(h) \sum_{j_0} x_{ij_0}^R - \sum_{j_0} x_{i0}^R + R_i^*(h) \sum_{j_0} x_{i0}^R, i = 1, \dots, m \\
& \sum_{j=1}^n y_{rj}^L - \sum_{j_0} y_{rj_0}^L, r = 1, \dots, s \\
& \sum_{j=1}^n y_{rj}^R - \sum_{j_0} y_{rj_0}^R, r = 1, \dots, s \\
& \sum_{j=1}^n y_{rj}^L - L_r^*(h) \sum_{j_0} y_{rj_0}^L - \sum_{j_0} y_{r0}^L, r = 1, \dots, s \\
& \sum_{j=1}^n y_{rj}^R + R_r^*(h) \sum_{j_0} y_{rj_0}^R - \sum_{j_0} y_{r0}^R + R_r^*(h) \sum_{j_0} y_{r0}^R, r = 1, \dots, s \\
& \sum_{j=1}^n y_{rj}^L - \sum_{j_0} y_{rj_0}^L, j = 1, \dots, n \\
& \sum_{j=1}^n y_{rj}^R - \sum_{j_0} y_{rj_0}^R, j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{7}$$

假设所有的输入、输出数据均为对称三角模糊数(L - R 模糊数的特殊情形),记为  $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}, \bar{x}_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n; \tilde{y}_{rj} = (y_{rj}, \bar{y}_{rj})$ ,  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ ,则此时  $x_{ij}^L = x_{ij}^R = x_{ij}, y_{rj}^L = y_{rj}^R = y_{rj}; \frac{L}{ij} = \frac{R}{ij} = \bar{ij}, \frac{L}{rj} = \frac{R}{rj} = \bar{rj}$  且  $L_i^*(h) = L_r^*(h) = R_i^*(h) = R_r^*(h) = 1 - h, 0 \leq h \leq 1; i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s, j = 1, \dots, n$  模型(7)可简化为模型(8):

$$\begin{aligned}
& \text{Min } 0 \\
& \text{s. t. } \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j_0} x_{i0}, i = 1, \dots, m \\
& \sum_{j=1}^n x_{ij} - (1 - h) \sum_{j_0} x_{ij_0} - \sum_{j_0} x_{i0} - (1 - h) \sum_{j_0} x_{i0}, \\
& i = 1, \dots, m \tag{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n x_{ij} + (1 - h) \sum_{j_0} x_{ij_0} - \sum_{j_0} x_{i0} + (1 - h) \sum_{j_0} x_{i0}, \\
& i = 1, \dots, m \\
& \sum_{j=1}^n y_{rj} - \sum_{j_0} y_{rj_0} - \sum_{j_0} y_{r0} - (1 - h) \sum_{j_0} y_{r0} - (1 - h) \sum_{j_0} y_{r0}, \\
& r = 1, \dots, s \\
& \sum_{j=1}^n y_{rj} + (1 - h) \sum_{j_0} y_{rj_0} - \sum_{j_0} y_{r0} + (1 - h) \sum_{j_0} y_{r0}, \\
& r = 1, \dots, s \\
& \sum_{j=1}^n y_{rj} - \sum_{j_0} y_{rj_0}, j = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

注意在模型(8)中约束2、3相加就是约束1,约束5、6相加就是约束4,所以约束1,4是多余的,可以去除。这样模型8化为模型(8):

$$\begin{aligned}
& \text{Min } 0 \\
& \text{s. t. } \sum_{j=1}^n x_{ij} - (1 - h) \sum_{j_0} x_{ij_0} - \sum_{j_0} x_{i0} - \\
& (1 - h) \sum_{j_0} x_{i0}, i = 1, \dots, m \tag{8} \\
& \sum_{j=1}^n x_{ij} + (1 - h) \sum_{j_0} x_{ij_0} - \sum_{j_0} x_{i0} + (1 - h) \sum_{j_0} x_{i0}, \\
& i = 1, \dots, m \\
& \sum_{j=1}^n y_{rj} - (1 - h) \sum_{j_0} y_{rj_0} - \sum_{j_0} y_{r0} - (1 - h) \sum_{j_0} y_{r0}, \\
& r = 1, \dots, s \\
& \sum_{j=1}^n y_{rj} + (1 - h) \sum_{j_0} y_{rj_0} - \sum_{j_0} y_{r0} + (1 - h) \sum_{j_0} y_{r0}, \\
& r = 1, \dots, s \\
& \sum_{j=1}^n y_{rj} - \sum_{j_0} y_{rj_0}, j = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

为了后面应用中对比分析的需要,说明建立模型(8)的必要性,本文用类似的变换(过程略),建立了基于输入导向 CCR 模型的模糊 DEA 模型(所有决策单元的输入输出均假设为对称三角模糊数):

$$\begin{aligned}
& \text{Min } 0 \\
& \sum_{j=1}^n x_{ij} - (1 - h) \sum_{j_0} x_{ij_0} - \sum_{j_0} x_{i0} - \\
& (1 - h) \sum_{j_0} x_{i0}, i = 1, \dots, m \\
& \sum_{j=1}^n x_{ij} + (1 - h) \sum_{j_0} x_{ij_0} - \sum_{j_0} x_{i0} + (1 - h) \sum_{j_0} x_{i0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & i = 1, \dots, m \quad (9) \\
 & \sum_{j=1}^n y_{rj} - (1-h) \sum_{j=1}^n y_{rj} - y_{r0} - (1-h) y_{r0}, \\
 & r = 1, \dots, s \\
 & \sum_{j=1}^n y_{rj} + (1-h) \sum_{j=1}^n y_{rj} - y_{r0} + (1-h) y_{r0}, \\
 & r = 1, \dots, s \\
 & y_{rj} = 0, j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

### 4 应用实例

在这部分,本文应用前面提出的方法来对 FMS 进行选择。用于分析的数据来自 E. Ertugrul Kar-sak<sup>[18]</sup> 研究数据的适当修改。在他们的研究中,输入项目包括资本与维护成本、使用的占地面积,输出项目包括处理时间的减少、安装成本的减少、质量的提高、市场反应的提高、劳动成本的减少。每个 DMU 的输入、输出值都以三角模糊数表示。需要说明的是,“质量的提高”“市场反应的上升”是质

量性的字眼,它们首先表达为语言类数据如“弱”“一般”“好”(数值估计比语言描述需要更多的努力,如果人们被迫提供模糊的或不准确的东西的数值估计,他们更可能使评估有失偏颇),利用表示“质量的提高”“市场反应的上升”的语言类变量的隶属函数可将语言描述转换为三角模糊数,见图 1。所有用于 DEA 模型的数据见表 1。

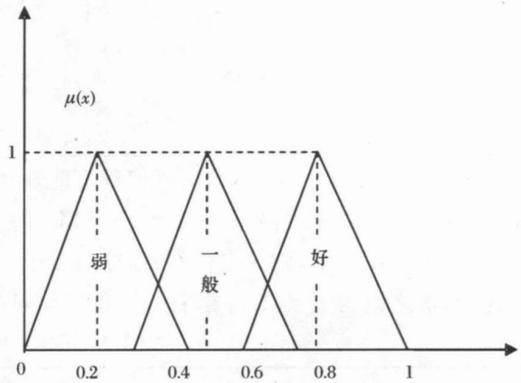


图 1 语言变量的隶属函数:

弱:(0,0.2,0.4),一般:(0.3,0.5,0.7),好:(0.6,0.8,1)

表 1 所有 FMS 的输入、输出数据

| FMS  | 输入               |                   | 输出                |              |
|------|------------------|-------------------|-------------------|--------------|
| DMUs | 资本与维护成本(\$)      | 使用的占地面积(sq. ft)   | 劳动成本的减少(%)        | 处理时间的减少(%)   |
| A    | (14, 15, 18)     | (40, 50, 60)      | (25, 30, 35)      | (20, 23, 26) |
| B    | (11, 13, 15)     | (55, 60, 65)      | (16, 18, 20)      | (7, 13, 16)  |
| C    | (7.5, 9.5, 11.5) | (60, 70, 80)      | (10, 15, 20)      | (10, 12, 16) |
| D    | (8, 12, 13)      | (35, 40, 45)      | (23, 25, 27)      | (12, 20, 22) |
| E    | (8.5, 9.5, 10.5) | (15, 35, 55)      | (12, 14, 16)      | (10, 18, 25) |
| F    | (10, 12.5, 15)   | (35, 52.5, 70)    | (14, 17, 20)      | (13, 15, 20) |
| G    | (9, 11, 13)      | (25, 30, 35)      | (17, 23, 27)      | (13, 18, 23) |
| H    | (14, 15, 16)     | (20, 30, 40)      | (12, 16, 20)      | (15, 8, 12)  |
|      | 输出               |                   |                   |              |
| DMUs | 安装成本的减少(%)       | 质量的提高             | 市场反应的提高           |              |
| A    | (0.5, 10)        | 好(0.6, 0.8, 1)    | 好(0.6, 0.8, 1)    |              |
| B    | (10, 15, 25)     | 好(0.6, 0.8, 1)    | 好(0.6, 0.8, 1)    |              |
| C    | (5, 10, 20)      | 一般(0.3, 0.5, 0.7) | 一般(0.3, 0.5, 0.7) |              |
| D    | (11, 13, 15)     | 好(0.6, 0.8, 1)    | 好(0.6, 0.8, 1)    |              |
| E    | (10, 14, 20)     | 好(0.6, 0.8, 1)    | 弱(0, 0.2, 0.4)    |              |
| F    | (5, 9, 15)       | 一般(0.3, 0.5, 0.7) | 好(0.6, 0.8, 1)    |              |
| G    | (10, 20, 25)     | 好(0.6, 0.8, 1)    | 一般(0.3, 0.5, 0.7) |              |
| H    | (10, 14, 20)     | 一般(0.3, 0.5, 0.7) | 弱(0, 0.2, 0.4)    |              |

利用模型(8),可得到不同可能性水平下模糊 DMUs 的超效率值,见表 2;仔细观察表 2,会发现对每个模糊 DMU,其超效率值都随着可能性水平的提高而减小,即对每个模糊 DMU,其超效率值是 h 的单调递减函数,验证了结论 1。

由表 2 可得在不同可能性水平下模糊 DMUs 的排序,见表 3;从排序情况来看,模糊决策单元在

不同可能性水平下的排序表现出了一定的稳定性,只有 D 和 E 是例外:当 h = 0.2 时,总是 E > D,但当 h = 0.4 时,总是 E < D;在这里可以得出这样一个结论:可能性水平对模糊 DMUs 排序的影响是有限的,但还是会导致模糊决策单元在不同可能性水平下的排序发生变化。

表2 不同可能性水平下模糊 DMUs 的超效率值

| h     | DMU     |         |         |        |        |        |        |         |
|-------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|---------|
|       | A       | B       | C       | D      | E      | F      | G      | H       |
| h=0   | 1.0269  | 1.0407  | 0.89905 | 1.37   | 1.6667 | 1.0714 | 1.8305 | 0.86624 |
| h=0.1 | 1.0208  | 1.0344  | 0.89905 | 1.3608 | 1.5    | 1.0652 | 1.8264 | 0.84807 |
| h=0.2 | 1.0145  | 1.0278  | 0.89905 | 1.3479 | 1.3684 | 1.0588 | 1.813  | 0.82727 |
| h=0.3 | 1.0081  | 1.0211  | 0.89905 | 1.3346 | 1.2784 | 1.0522 | 1.7941 | 0.80652 |
| h=0.4 | 1.0015  | 1.0142  | 0.89905 | 1.3217 | 1.2708 | 1.0455 | 1.7748 | 0.7875  |
| h=0.5 | 0.9947  | 1.0071  | 0.89905 | 1.3091 | 1.2632 | 1.0385 | 1.755  | 0.77    |
| h=0.6 | 0.98777 | 0.99985 | 0.89903 | 1.2968 | 1.2553 | 1.0313 | 1.7347 | 0.75385 |
| h=0.7 | 0.98066 | 0.99234 | 0.89803 | 1.2846 | 1.2473 | 1.0238 | 1.7137 | 0.73889 |
| h=0.8 | 0.97337 | 0.9846  | 0.89698 | 1.2726 | 1.2391 | 1.0161 | 1.6917 | 0.725   |
| h=0.9 | 0.96588 | 0.97663 | 0.89588 | 1.2606 | 1.2308 | 1.0082 | 1.6686 | 0.71207 |
| h=1   | 0.95819 | 0.96842 | 0.89474 | 1.2471 | 1.2222 | 1      | 1.644  | 0.7     |

不过可以肯定的是:不管居于何种可能性水平, G表现最好而 H表现最差。因此,在 FMS 的选择中,如只能选择一个,则一定选 G;如能选几个,则最优为 G,次之则为 E 或 D。看来虽然我们面对的是

多个不确定的、具有模糊特性的弹性制造系统,但利用本文的方法,利用模型(8),却能够并不费力的对它们进行选择。

表3 不同可能性水平下模糊 DMUs 的排序

| DMU | h=0 | h=0.1 | h=0.2 | h=0.3 | h=0.4 | h=0.5 | h=0.6 | h=0.7 | h=0.8 | h=0.9 | h=1 |
|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| A   | 6   | 6     | 6     | 6     | 6     | 6     | 6     | 6     | 6     | 6     | 6   |
| B   | 5   | 5     | 5     | 5     | 5     | 5     | 5     | 5     | 5     | 5     | 5   |
| C   | 7   | 7     | 7     | 7     | 7     | 7     | 7     | 7     | 7     | 7     | 7   |
| D   | 3   | 3     | 3     | 2     | 2     | 2     | 2     | 2     | 2     | 2     | 2   |
| E   | 2   | 2     | 2     | 3     | 3     | 3     | 3     | 3     | 3     | 3     | 3   |
| F   | 4   | 4     | 4     | 4     | 4     | 4     | 4     | 4     | 4     | 4     | 4   |
| G   | 1   | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1   |
| H   | 8   | 8     | 8     | 8     | 8     | 8     | 8     | 8     | 8     | 8     | 8   |

反之,如果我们没有考虑到 DEA 模型(比如 CCR 模型或 BCC 模型)区分能力的有限,而基于 CCR 模型或 BCC 模型进行扩展(现有的有关文献基本都是这样的),则极有可能出现多个有效的模糊单元而无法区分它们的情形。事实上,如利用模型(9)(CCR 模型的模糊扩展),可得各模糊 DMU 的效率值如表 4。在表 4 中,在任何可能性水平下, D、E、G 都是有效的;而在 h=0 时,除了 D、E、G 外, A、F 也是有效的;在 h=0.1 时,除了 D、E、G 外, A 也是有效的;h=1 时,除了 D、E、G 外, F 也是有效的。

怎么区分这些模糊单元?怎么选择好的 FMS? 模型(9)不能回答,而模型(8)却给出了很好的答案。

象本案例这样出现多个有效的模糊单元而无法区分现象绝非偶然,现有模糊 DEA 文献的算例很多都出现了这样的情况;应该说比在输入和输出数据都是准确数据时问题更严重;究其原因,主要是在 DEA 进行模糊扩展时,模型的约束个数会增多,这将导致有效的模糊 DMU 增多。

因此,本文将超效率模型进行模糊扩展很有必要。

表4 不同可能性水平下利用模型(9)得到的模糊 DMUs 的效率值

| h     | DMU     |         |         |   |   |         |   |         |
|-------|---------|---------|---------|---|---|---------|---|---------|
|       | A       | B       | C       | D | E | F       | G | H       |
| h=0   | 1       | 0.81818 | 0.72321 | 1 | 1 | 1       | 1 | 0.75    |
| h=0.1 | 1       | 0.83036 | 0.73247 | 1 | 1 | 0.9673  | 1 | 0.8108  |
| h=0.2 | 0.97971 | 0.84211 | 0.74131 | 1 | 1 | 0.9375  | 1 | 0.79773 |
| h=0.3 | 0.95964 | 0.85345 | 0.74977 | 1 | 1 | 0.93396 | 1 | 0.78208 |
| h=0.4 | 0.94308 | 0.87108 | 0.76116 | 1 | 1 | 0.94444 | 1 | 0.76765 |
| h=0.5 | 0.93202 | 0.89066 | 0.7802  | 1 | 1 | 0.95455 | 1 | 0.75429 |
| h=0.6 | 0.92307 | 0.90874 | 0.8069  | 1 | 1 | 0.96429 | 1 | 0.74188 |
| h=0.7 | 0.92008 | 0.92546 | 0.83153 | 1 | 1 | 0.97368 | 1 | 0.73033 |
| h=0.8 | 0.92579 | 0.94091 | 0.85429 | 1 | 1 | 0.98276 | 1 | 0.71955 |
| h=0.9 | 0.94158 | 0.9552  | 0.87531 | 1 | 1 | 0.99153 | 1 | 0.70946 |
| h=1   | 0.95819 | 0.96842 | 0.89474 | 1 | 1 | 1       | 1 | 0.7     |

## 5 结束语

本文考虑到了生产过程的内在不确定性,利用模糊数的基于  $\alpha$ -截集的排序方法将超效率模型进行了扩展,其意义在于使 DEA 方法能更好地应用于生产实践,能对模糊决策单元的效率进行评估并能分辨出孰优孰劣。模型的计算也不复杂,特别是在所有的输入、输出数据均为对称三角模糊数的情形下,表现出了极大的简便实用性。

需要注意的是,在模糊 DEA 模型的应用中,常常会碰到“语言类”数据(比如本文的应用实例)。将“语言类”数据转化为模糊数据可参照图 1 的方式进行,文献[19][20]中将“语言类”数据转化为模糊数据也是参照类似图 1 的方式进行的,可见这种转换方式是一种常用方法。转换时构造的隶属函数都是对称三角模糊数,决策者根据问题背景确定其主值与扩散(这也带来了“语言类”数据转化为模糊数据的多样性问题);转化过程中将决策者主观因素融入了模糊决策单元的评价。

本文的方法理论上可处理 L - R 模糊数(模型(7)),但现实中,L - R 模糊输入输出的隶属函数是很难得到的,所以,模型(7)只有理论意义。考虑直观与计算有效性,本文强调对称三角模糊数和模型(8)。在实用中,这样做也有其合理性:如果我们根据历史经验或对评价问题的认识等得到评价指标的某一“近似值”或“均值”,考虑它们取上述近似值时,隶属度为 1,并允许其在一定范围取值,在此范围,远离“近似值”其隶属度严格减小,超过此范围的隶属度为零,从而将不确定性指标视为三角模糊数处理并进行模糊(数)分析,可能更容易接近复杂不确定的生产实际。因此,讨论基于三角模糊数的模糊 DEA 模型的求解,于应用中有着特殊的重要性。事实上,有关模糊 DEA 的文献诸如<sup>[2,3,5]</sup>都是这样做的,尤其是它们的算例,几乎都设计为只处理对称三角模糊数。

### 参考文献:

- [1] Andersen, P., Petersen, N. C. . A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis[J]. Management science, 1993, 39(10): 1261 - 1294.
- [2] P. Guo, H. Tanaka. Fuzzy DEA : a perceptual evaluation method[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 119:149 - 160.
- [3] T. Leon, V. Liern, J. L. Ruiz, I. Sirvent. A fuzzy mathematical programming approach to the assessment of efficiency with DEA models[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 139:407 - 417.
- [4] C. Kao, S. T. Liu. Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 119:149 - 160.
- [5] Saowanee Lertworasirikul. Fuzzy data envelopment analysis (DEA) : a possibility approach[J]. Fuzzy sets and systems, 2003, 139:379 - 394.
- [6] Saowanee Lertworasirikul. Fuzzy BCC model for data envelopment analysis[J]. Fuzzy optimization and decision making, 2003, 2:337 - 358.
- [7] M. Soleimani - damaneh, G. R. Jahanshahloo. Computational and theoretical pitfalls in some current performance measurement techniques; and a new approach[J]. Applied mathematics and computation, 2006, 181: 1199 - 1207.
- [8] 吴文江,陈颖. 用 DEA 解输入或输出为模糊数的评价问题[J]. 系统工程理论方法应用, 2000, 9(4):331 - 334.
- [9] 曾祥云,吴育华. L - R 型区间 DEA 模型及其变换[J]. 系统工程, 2000, 18(2):60 - 65.
- [10] 吴海平,宣国良,帅旭. 基于 LR 模糊数的置信 DEA 模型[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 28 - 34.
- [11] 张茂勤,李光金,尚文娟. 基于 Campos 指数的模糊 DEA[J]. 系统工程理论与实践, 2004, (4):41 - 48.
- [12] 李志亮,陈世功,吴今培. 基于模糊变换的 DEA 模型与应用[J]. 模糊系统与数学, 2004, 18(4):
- [13] 黄朝峰,廖良才. 模糊条件下的决策单元相对有效性评价[J]. 模糊系统与数学, 2006, 20(5):77 - 83.
- [14] 梁樑,吴杰. 区间 DEA 的一种改进的充分排序方法[J]. 系统工程, 2006, 24(1):107 - 110.
- [15] 郭均鹏,吴育华. 超效率 DEA 模型的区间扩展[J]. 中国管理科学, 2005, 13(2):40 - 43.
- [16] Ramik, J. Rimaneek. Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization[J]. Fuzzy sets and systems, 1985, 16: 123 - 138.
- [17] Tanaka, H. Ichihasi, K. Asai. A formulation of fuzzy linear programming problem based on comparison of fuzzy numbers[J]. Control and Cybernetics, 1984, 13: 185 - 194.
- [18] E. Ertugrul Karsark, Onur Kuzgunkaya, A fuzzy multiple objective programming approach for the selection of a flexible manufacturing system[J]. International Journal of Production Economics, 2002, 79: 101 - 111.
- [19] Ying-Ming Wang, Ying Luo, Liang Liang. Fuzzy data envelopment analysis based upon fuzzy arithmetic with an application to performance assessment of manufacturing enterprises [J]. Expert systems with applica-

tions , 2008.  
[20] Cheng-Ju Chien , Hui-Hua Tsai. Using fuzzy numbers

to evaluate perceived service quality[J]. Fuzzy sets and systems , 116(2000) :289 - 300.

### Fuzzy Super-Efficiency DEA Model

WANG Mei-qiang<sup>1,2</sup> , LIANG Lang<sup>1</sup> , LI Yong-jun<sup>1</sup>

- (1. School of Management , University of Science and Technology of China , Hefei 230026 China ;
- 2. School of Management , Guizhou University , Guiyang 550025 , China)

**Abstract :** In the fuzzy DEA model whose inputs and outputs are fuzzy and efficiency score is precise , all DMUs could not be ranked when the number of efficient units is no less than two . To that end , we develop a fuzzy super-efficiency DEA model by using a ranking method based on the comparison of  $\alpha$ -cuts , our approach can be seen as an extension of the super - efficiency DEA model that can fully rank fuzzy DMUs . In the end , an empirical example is illustrated .

**Key words :** fuzzy DEA ; super-efficiency ; ranking