文章编号:1001-506X(2013)08-1627-04 **网址:**www.sys-ele.com

离散时间探测随机恒速目标的最优搜索算法

陈建勇,王 健,单志超
(海军航空工程学院电子信息工程系,山东 烟台 264001)

摘 要:针对随机恒速运动目标条件下已知的目标初始位置分布密度和速度分布密度,建立了时变的运动目标分布密度模型和在离散时间点上实施有限区域探测后的目标分布密度模型。以此为基础,提出了依次探测的单次探测发现概率最大的最优搜索准则,计算在该准则下的离散时间点上有限探测域的最优探测位置。最后,给出了一个二维空间搜索算例。

关键词:最优搜索;运动目标;后验分布;探测域

中图分类号:O 229 **文献标志码:**A **DOI:**10.3969/j.issn.1001-506X.2013.08.07

Optimal search algorithm for constant velocity random moving target detecting in discrete time

CHEN Jian-yong, WANG Jian, SHAN Zhi-chao
(*Department of Electronics and Information Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China*)

Abstract: Based on the probability density functions of initial location and moving velocity of a constant velocity target, the probability density function of the target at any time and after the limited area detection in discrete time are presented. The optimal detection areas in discrete time are obtained through the calculation with the given criterion of maximum detection probability of every detection round. A 2-dimension calculation sample is given.

Keywords: optimal search; moving target; posterior distribution; detect area

0 引 言

关于运动目标最优搜索问题中的单向搜索问题,文献[1]将其分为两类。一类称为最优搜索密度问题,在这类问题中,无论在连续空间还是离散空间、连续时间还是离散时间,都要求搜索资源能够任意细分,并且在一定的时间和空间中,搜索资源的应用不会对其他时间和空间中的搜索资源的应用带来限制[1-3]。另一类称为最优搜索路径问题,在这类问题中,某一时间的搜索资源的配置对后续时间的搜索资源的配置产生了某种约束。对最优搜索问题的研究进展,或者针对离散空间和时间[4-5],寻求在时刻 T 搜索到目标的概率最大的搜索策略,或者针对连续空间和时间[6-8],其目标运动模型和探测函数均进行了特定的假设。

有一类运动目标搜索问题,如用直升机吊放声纳对潜艇进行搜索[9-10],与上述运动目标搜索问题相比[11-16],有3方面的特点:第一,目标运动在空间和时间上均是连续的;第二,对目标的搜索只能在离散的时间上进行有效探测;第三,各离散时间上的探测空间为未进行预先划分的有限封闭空间,并且允许重叠。这类问题的最优搜索可以归结为某种最优准则下的一系列最优探测点,即有限探测空间所处的位置。本文针对这一类问题提出了基于已知目标初始位置分布和速度分布的随机恒速目标的最优搜索算法,并给出了一个二维空间的算例。

1 恒速运动目标分布模型

设 $\mathbf{X}=[x,y]\in\mathbf{R}^2$ 为目标运动和搜索空间,时间域 $t\geqslant 0$。单点目标速度空间 $\mathbf{V}=[v_x,v_y]\in\mathbf{R}^2$,$t_0\geqslant 0$ 为初始时刻。

已知目标位置初始分布密度函数为 $f_0(\mathbf{X}_0;t_0)$,与初始时刻空间分布相独立的目标运动速度分布密度函数 $w_0(\mathbf{V})$。另假设,在 $t\geqslant t_0$ 的时间域内,目标速度保持不变,即

收稿日期:2012-07-10; **修回日期:**2013-01-18; **网络优先出版日期:**2013-04-08。
网络优先出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2422.TN.20130408.1031.005.html
基金项目:国家自然科学基金(61271444)资助课题

$$\boldsymbol{V}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_0}{\mathrm{d}t_0}=\frac{\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0}{t-t_0} \tag{1}$$

对任意 $t>t_0$,目标位置分布密度函数为

$$f(\boldsymbol{X};t)=\iint_{\mathbf{R}^2}f_0(\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{V})\mathrm{d}\boldsymbol{V}=\iint_{\mathbf{R}^2}f_0(\boldsymbol{X}_0;t_0)w_0(\boldsymbol{V})\mathrm{d}\boldsymbol{V} \tag{2}$$

在$[t_0,t]$内设置任意 n 个时间点 $t_0<t_1<\cdots<t_i<\cdots<t_n<t$,对应的空间及变量 $\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{X}_1,\cdots\boldsymbol{X}_i,\cdots\boldsymbol{X}_n,\boldsymbol{X}$,有相应的目标位置分布密度函数 $f_0(\boldsymbol{X}_0;t_0),\cdots,f_i(\boldsymbol{X}_i;t_i),\cdots,f_n(\boldsymbol{X}_n;t_n),f(\boldsymbol{X};t)$。其中任一分布密度函数均可通过式(2)获得,或通过任一前时间点的目标位置和速度的联合分布获得,即

$$f(\boldsymbol{X};t)=\iint_{\mathbf{R}^2}f_0(\boldsymbol{X}_0;t_0)w_0(\boldsymbol{V})\mathrm{d}\boldsymbol{V}=\iint_{\mathbf{R}^2}f_i(\boldsymbol{X}_i;t_i)w_i(\boldsymbol{V}/\boldsymbol{X}_i)\mathrm{d}\boldsymbol{V},\ i=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

式中,$w_i(\boldsymbol{V}/\boldsymbol{X}_i)$为 t_i 时刻,以空间变量 $\boldsymbol{X}_i$ 为条件的速度分布密度函数。被积函数部分为

$$\begin{aligned}f_i(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{V})&=(t_i-t_0)^2f_i(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{V}\cdot(t_i-t_0))=\\(t_i-t_0)^2f_i(\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{V}\cdot(t_i-t_0),\boldsymbol{V}\cdot(t_i-t_0))&=\\(t_i-t_0)^2f_0(\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{V}\cdot(t_i-t_0))&=\\\frac{(t_i-t_0)^2}{(t_i-t_0)^2}f_0(\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{V})&=f_0(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{V}\cdot(t_i-t_0),\boldsymbol{V})\end{aligned}$$

所以,有下列关系成立:

$$f_i(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{V})=f_0(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{V}\cdot(t_i-t_0),\boldsymbol{V})$$

$$f_i(\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{V}\cdot(t_i-t_0),\boldsymbol{V})=f_0(\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{V})。$$

只应用第一式,得

$$w_i(\boldsymbol{V}/\boldsymbol{X}_i)=\frac{f_0(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{V}\cdot(t_i-t_0))w_0(\boldsymbol{V})}{f_i(\boldsymbol{X}_i)} \tag{4}$$

令 $w_i(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}_i;t,t_i)=w_i(\frac{\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_i}{t-t_i}/\boldsymbol{X}_i)=w_i(\boldsymbol{V}/\boldsymbol{X}_i)$

用逐时间点迭代,当 $t>t_i$ 时,式(4)可表示为

$$w_i(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}_i;t,t_i)=\frac{f_{i-1}(\boldsymbol{X}_{i-1};t_{i-1})w_{i-1}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}_{i-1};t,t_{i-1})}{f_i(\boldsymbol{X}_i;t_i)} \tag{5}$$

其中

$$\boldsymbol{X}_{i-1}=\boldsymbol{X}_i\cdot\frac{t-t_{i-1}}{t-t_i}-\boldsymbol{X}\cdot\frac{t_i-t_{i-1}}{t-t_i},\ i=1,2,\cdots,n$$

2 施加有限区域探测的目标后验概率分布

定义在 $\mathbf{R}^2$ 上的二元实值函数 $b(\boldsymbol{U})\in[0,1]$,不计探测的时间过程效应,如果在 $t=t_i\geqslant 0$ 有 $P_i(\boldsymbol{a}_i)=\iint_{\mathbf{R}^2}b(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{a}_i)\cdot f(\boldsymbol{X};t_i)\mathrm{d}\boldsymbol{X}$,则称 $b(\boldsymbol{U})$为搜索的探测函数,$b(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{a}_i)$为此次探测的探测函数,$\boldsymbol{a}_i=[a_i,b_i]$为此次探测的探测点,$P_i(\boldsymbol{a}_i)$为 t_i 时刻在 $\boldsymbol{a}_i$ 进行一次探测发现目标的概率,称为“探测概率”。

定义集合 $\boldsymbol{\Omega}_i=\{\boldsymbol{X}:b(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{a}_i)>\boldsymbol{0}\}$为 $t=t_i$ 时一次探测的探测域,则

$$P_i(\boldsymbol{a}_i)=\iint_{\boldsymbol{\Omega}_i}b(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{a}_i)f(\boldsymbol{X};t_i)\mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

在 t_i 时刻探测未发现目标条件下,目标位置的后验概率分布密度函数为

$$g_i(\boldsymbol{X}_i;t_i)=\frac{1-b(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{a}_i)}{1-P_i(\boldsymbol{a}_i)}f_i(\boldsymbol{X}_i;t_i)$$

在 $t>t_{i+1}$,式(5)修正为

$$w_{i+1}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}_{i+1};t,t_{i+1})=\frac{g_i(\boldsymbol{X}_i;t_i)w_i(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}_i;t,t_i)}{f_{i+1}(\boldsymbol{X}_{i+1};t_{i+1})}$$

其中

$$\boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{X}_{i+1}\cdot\frac{t-t_i}{t-t_{i+1}}-\boldsymbol{X}\cdot\frac{t_{i+1}-t_i}{t-t_{i+1}}$$

3 最优搜索准则

离散时间有限区域探测在总搜索时间或总探测次数受限下的总搜索概率最大的全局最优搜索策略的计算,其计算量极大,且随着实际搜索进程与最优策略计算条件的偏差,随后的搜索策略将丧失最优性。本文给出最优搜索的最优准则,不考虑搜索资源限制,以下一次探测为本次探测后的最大后验概率探测为最优搜索准则。

设经过时间点 t_i 探测后,未发现目标,在能确定 t_{i+1} 的条件下,最优探测域应使 t_{i+1}时刻探测概率最大,即

$$P_{i+1}(\boldsymbol{a}_{i+1}^*)=\max\{\iint_{\boldsymbol{\Omega}_{i+1}}b(\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{a}_{i+1})f_{i+1}(\boldsymbol{X}_{i+1};t_{i+1})\mathrm{d}\boldsymbol{X}_{i+1},\boldsymbol{\Omega}_{i+1}\subset\mathbf{R}^2\}$$

$\boldsymbol{a}_{i+1}=\boldsymbol{a}_{i+1}^*$为表征最优探测域 $\boldsymbol{\Omega}_{i+1}=\boldsymbol{\Omega}_{i+1}^*$的空间位置的最优探测点。

当最优探测点 $\boldsymbol{a}_{i+1}^*$不唯一时,以距离最小原则取最优探测点,即

$$\boldsymbol{a}_{i+1}^{**}=\{\boldsymbol{a}_{i+1}^*:\min|\boldsymbol{a}_{i+1}^*-\boldsymbol{a}_i^*|\}。$$

4 最优探测点的计算

假设凸集 $\boldsymbol{\Omega}_i$ 的边界可以用连续曲线 $y=\varphi_1(x),y=\varphi_2(x),x\in[m_x,M_x]$表示。令 $\varphi_1(x)>\varphi_2(x),x\in(m_x,M_x);\varphi_1(m_x)=\varphi_2(m_x),\varphi_1(M_x)=\varphi_2(M_x)$。在 $x=m_x,M_x$ 处,有$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=0$。

连续曲线 $x=h_1(y),x=h_2(y),y\in[m_y,M_y]$,亦为凸集 $\boldsymbol{\Omega}_i$ 的边界曲线。假设 $h_1(y)>h_2(y),y\in(m_y,M_y);h_1(m_y)=h_2(m_y),h_1(M_y)=h_2(M_y)$。在 $y=m_y,M_y$ 处,有$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$。

若在 $\boldsymbol{a}_i$ 的某个邻域内,$P(\boldsymbol{a}_i)$对 $\boldsymbol{a}_i$ 有一阶连续偏导数,则有

$$P_i(\boldsymbol{a}_i)=\iint_{\mathbf{R}^2} b(x-a_i,y-b_i)f(x,y;t_i)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\iint_{\boldsymbol{\Omega}_i} b(x-a_i,y-b_i)f(x,y;t_i)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_{m_x}^{M_x}\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} b(x-a_i,y-b_i)f(x,y;t_i)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \frac{\partial P_i(a_i)}{\partial \boldsymbol{a}_i}=$$

$$\int_{m_y}^{M_y} b(h_2(y)-a_i,y-b_i)f(h_2(y),y;t_i)\mathrm{d}y-$$

$$\int_{m_y}^{M_y} b(h_1(y)-a_i,y-b_i)f(h_1(y),y;t_i)\mathrm{d}y$$

若 $\boldsymbol{a}_i^*=[a_i^*,b_i^*]$ 为 t_i 时刻探测概率的局部最大点，根据无约束最优化问题的一阶必要条件，$\frac{\partial P_i(\boldsymbol{a}_i^*)}{\partial a_i}=0$，$\frac{\partial P_i(\boldsymbol{a}_i^*)}{\partial b_i}=0$，推理可得

$$\int_{m_x}^{M_x} b(x-a_i^*,\varphi_2(x)-b_i^*)f(x,\varphi_2(x);t_i)\mathrm{d}x=$$

$$\int_{m_x}^{M_x} b(x-a_i^*,\varphi_1(x)-b_i^*)f(x,\varphi_1(x);t_i)\mathrm{d}x$$

$$\int_{m_y}^{M_y} b(h_2(y)-a_i^*,y-b_i^*)f(h_2(y),y;t_i)\mathrm{d}y=$$

$$\int_{m_y}^{M_y} b(h_1(y)-a_i^*,y-b_i^*)f(h_1(y),y;t_i)\mathrm{d}y$$

上式是局部最大探测概率的一阶必要条件，然而满足该式的探测点，也可能是局部最小点，在应用中，可以从多个局部最优点的比较中将局部最小点排除。根据上式，能够将二维空间上概率寻优计算，转换为两个一维空间积分寻优。

5　算例分析

在最优搜索策略的应用中，可以从初始时间到本次探测的实际时间进程和对下一次探测的时间预估，计算下一个最优探测点。本文给出一个等时间间隔的算例。

时间、空间均取无量纲的量，$t_0=0$，目标初始位置分布密度函数为 $f_0(\boldsymbol{X}_0)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{X}_0-\bar{\boldsymbol{X}}_0)(\boldsymbol{X}_0-\bar{\boldsymbol{X}}_0)^{\mathrm{T}}}$，取 $\sigma=4$，$\bar{\boldsymbol{X}}_0=(20,20)$；目标速度分布密度函数为 $w_0(\boldsymbol{V})=\frac{1}{2\pi\mu^2}\mathrm{e}^{-\frac{\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}}{2\mu^2}}$，取 $\mu=2$；探测时间间隔 $\tau=10$；取半径为 4 的圆盘形探测函数为

$$b(\boldsymbol{U})=\begin{cases}1, & |\boldsymbol{U}|<4\\ 0, & |\boldsymbol{U}|\geqslant 4\end{cases}$$

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{a}_i^*$$

设置计算停止条件为累积发现概率 $P^{(n)}=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P_i(\boldsymbol{a}_i^*))\geqslant 0.99$。

图 1 从点(20，20)起，由折线连接，依次给出计算的各次探测的最优探测点。这些探测点局部近似，但并不完全符合螺旋线规律[17]。图 2 为相应的各次探测的探测概率。

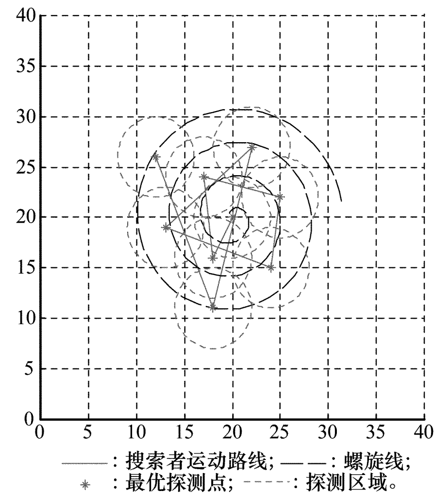

图 1　各次探测的最优探测点

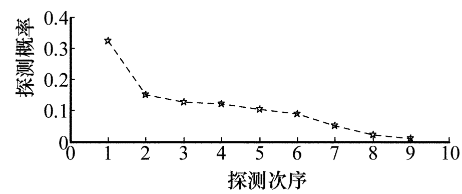

图 2　最优探测点发现概率

6　结束语

本文针对随机恒速运动目标的离散时间有限区域搜索问题，提出了基于已知目标初始位置分布密度和速度分布密度的最优搜索算法。数值计算将不限于算例中正态分布的初始位置和速度以及圆盘形探测函数模型。经过应用性修正，即考虑到探测时间、探测点转移时间、探测函数等因素，该算法可为直升机吊放声纳搜潜等一类的离散时间有限区域探测的搜索行为提供实时最优探测点指示。

参考文献：

[1] Zhu Q X. *Optimal search theory in discrete and continuous space*[M]. Beijing: Science Press, 2005.（朱清新. 离散和连续空间中的最优搜索理论[M]. 北京：科学出版社，2005.）

[2] Brown S S. Optimal search for moving target in discrete time and space[J]. *Operations Research*, 1980, 28(6): 1275 - 1289.

[3] Stone L D. Necessary and sufficient conditions for optimal search plans for moving targets[J]. *Mathematics of Operations Research*, 1979, 79(4): 431 - 440.

[4] Stewart T J. Search for moving target when searcher motion is restricted[J]. *Computations and Operations Research*, 1979, 6(3): 129 - 140.

[5] Eagle J N, Yee J R. An optimal branch-and-bound procedure for the constrained path moving target search problem[J]. *Operations Research*, 1990, 38(1): 110 - 114.

[6] Ohsumi A. Stochastic control with searching a randomly moving

target[C]// *Proc. of the American Control Conference*, 1984: 500 - 504.

[7] Lukka M. On the optimal searching tracks for a moving target[J]. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 1977,32(1):126 - 132.

[8] Mangel M. Search for a randomly moving object[J]. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 1981,40(2): 327 - 338.

[9] Chen J Y, Leng J, Yu C J. The detection probabilities of on-call helicopter antisubmarine search using dipping sonar[J]. *Journal of Naval Aeronautical and Astronautical University*, 2004, 19(5):559 - 561.(陈建勇,冷江,于传健. 使用吊放声纳的直升机应召搜潜发现概率[J]. 海军航空工程学院学报, 2004, 19(5):559 - 561.)

[10] Chen J Y, Xiong X, Zhang D. Modeling and computing of distribution of moving target in district area[J]. *Journal of Naval Aeronautical and Astronautical University*, 2010, 25(3):295 - 298.(陈建勇,熊雄,张丹. 一种有限区域运动目标分布模型及计算[J]. 海军航空工程学院学报, 2010, 25(3):295 - 298.)

[11] Avetisyan V V. Optimal search for a stationary object with respect to minimum guaranteed time in a rectangular domain[J]. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2002, 41(1): 57 - 64.

[12] Xu Y F, Tan Y J, Lian Z Y, et al. Information-driven search for multiple moving targets[C]// *Proc. of the International Conference on Electrical and Control Engineering*, 2010: 4702 - 4705.

[13] Chun Y H. Optimal search and stopping rules for the continuous-type dichotomous search[C]// *Proc. of the 38th Annual Meeting of the Decision Sciences Institute*, 2007: 1124 - 1129.

[14] Hong S P, Cho S J, Park M J. A pseudo-polynomial heuristic for path-constrained discrete-time Markovian-target search[J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 193(2): 351 - 364.

[15] Oshanin G, Wio H S, Lindenberg K, et al. Intermittent random walks for an optimal search strategy: one dimensional case[J]. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2007, 19(1): 1 - 16.

[16] Cho J H, Kim J S, Lim J S, et al. Optimal acoustic search path planning for sonar system based on genetic algorithm[J]. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, 2007, 17(3): 218 - 224.

[17] Wang W H. Analysis on spiral search missed area pattern for moving target[J]. *Fire Control and Command Control*, 2007, 32(6):48 - 50.(王文海. 对运动目标螺旋搜索误区分析[J]. 火力与指挥控制,2007,32(6):48 - 50.)

作者简介:

陈建勇(1962 -),男,教授,博士,主要研究方向为最优搜索理论、水声场建模与仿真。

E-mail:cjy166@126.com

王　健(1984 -),男,硕士研究生,主要研究方向为最优搜索理论。

E-mail:wangjial@eyou.com

单志超(1979 -),男,讲师,博士,主要研究方向为反潜信息处理。

E-mail:hgszchao@163.com