

# 降维 CKF 算法及其在 SINS 初始对准中的应用

钱华明, 葛磊, 黄蔚, 彭宇

(哈尔滨工程大学自动化学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘要:** 针对常规容积卡尔曼滤波(cubature Kalman filter, CKF)算法在捷联惯导系统(strapdown inertial navigation system, SINS)大方位失准角初始对准中采样点个数与状态向量维数成正比、计算量较大的问题,提出了降维 CKF 算法。与常规 CKF 算法相比,该算法只对离散化后的 SINS 非线性误差模型中的大方位失准角进行采样,再利用三阶球面-相径容积规则计算后验均值和协方差,从而将采样向量从 10 维降低到 1 维,采样点数量从 20 个下降到 2 个,减小了计算量。仿真实验结果表明,该算法与常规 CKF 算法具有相同的对准精度,计算时间仅为常规 CKF 算法的 1/3,是一种较为实用的方法。

**关键词:** 捷联惯导系统; 初始对准; 常规容积卡尔曼滤波算法; 降维容积卡尔曼滤波算法; 三阶球面-相径容积规则

中图分类号: U 666.1

文献标志码: A

DOI:10.3969/j.issn.1001-506X.2013.07.23

## Reduced dimension CKF algorithm and its application in SINS initial alignment

QIAN Hua-ming, GE Lei, HUANG Wei, PENG Yu

(College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

**Abstract:** According to the fact that when a conventional cubature Kalman filter (CKF) is adopted for strapdown inertial navigation system (SINS) initial alignment with large azimuth misalignment, the sampling points are directly proportional to the dimension of state vector, and the calculation amount is large, a reduced dimension CKF algorithm is proposed. Comparing with the conventional CKF algorithm, only the large azimuth misalignment angle is sampled in the discretized SINS nonlinear error model, and the third-degree spherical-radial cubature rule is used to calculate the posterior mean and covariance. The new approach reduces the sampling vector from 10 dimension to 1 dimension, and reduces the sampling points from 20 to 2, which reduces the calculation amount. The simulation shows that new approach has the same alignment accuracy as the conventional CKF algorithm, while the computational time is reduced to 1/3 of the conventional CKF algorithm, which proves the practicality of the new approach.

**Keywords:** strapdown inertial navigation system (SINS); initial alignment; conventional cubature Kalman filter (CKF) algorithm; reduced dimension CKF algorithm; third-degree spherical-radial cubature rule

## 0 引言

容积卡尔曼滤波(cubature Kalman filter, CKF)算法是由加拿大学者 Arasaratnam 于 2009 年提出的一种新的非线性滤波算法<sup>[1-2]</sup>,其基本思想是基于三阶球面-相径容积规则,通过对状态向量进行采样,并赋予相同权值,经非线性函数的传递后,计算状态的后验均值和协方差,并且能以三阶多项式精度逼近任何非线性高斯系统的状态估计。该算法一经提出,便得到国内外学者广泛关注<sup>[3-6]</sup>。

目前,CKF 算法已经被用于捷联惯导系统(strapdown inertial navigation system, SINS)大方位失准角初始对准,并且取得了不错的效果<sup>[7]</sup>。但是 CKF 算法采样点的个数是非线性系统状态向量维数的 2 倍,在应用该算法进行初始对准时,需要对 10 维的状态向量采样 20 个采样点,从而导致其计算量较大。由于 SINS 大方位失准角误差模型的非线性项只与大方位失准角  $\phi_U$  有关,针对这种情况,本文提出了降维 CKF 滤波算法,该算法在滤波时只对离散化后的状态方程中的  $\phi_{U,k}$  采样,在不损失滤波精度的情况下,将

采样点的个数从 20 个降低到 2 个，大大减小计算量，缩短了计算时间。仿真结果表明，降维 CKF 算法对准精度与常规 CKF 算法相当，计算时间为常规 CKF 算法的 1/3。

### 1 SINS 大方位失准角误差模型

SINS 静基座大方位失准角误差模型可以写为<sup>[7-9]</sup>

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\phi_U)\mathbf{X} + \mathbf{b}(\phi_U) + \mathbf{W} \quad (1)$$

$$\mathbf{X} = [\phi_U \ \phi_E \ \phi_N \ \delta V_E \ \delta V_N \ \nabla_E \ \nabla_N \ \epsilon_E \ \epsilon_N \ \epsilon_U]^T$$

式中， $\phi_U$ 、 $\phi_E$ 、 $\phi_N$  分别为方位、东向、北向失准角； $\delta V_E$ 、 $\delta V_N$  分别为速度误差沿东、北方向的分量； $\nabla_E$ 、 $\nabla_N$  为水平加速度计的常值零偏； $\epsilon_E$ 、 $\epsilon_N$ 、 $\epsilon_U$  为陀螺常值漂移； $\mathbf{W} = [W_{gx} \ W_{gy} \ W_{gz} \ W_{ax} \ W_{ay} \ \mathbf{0}_{1 \times 5}]^T$  为系统的随机白噪声向量，其协方差为  $\mathbf{q}$ 。

$$\mathbf{A}(\phi_U) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(\phi_U) & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{0}_{5 \times 10} & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1(\phi_U) = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_N \cos \phi_U & -\Omega_N \sin \phi_U & \frac{\tan \varphi}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_U & 0 & -\frac{1}{R} \\ 0 & \Omega_U & 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -f_z \sin \phi_U & -f_z \cos \phi_U & 0 & 2\Omega_U \\ 0 & f_z \cos \phi_U & -f_z \sin \phi_U & -2\Omega_U & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -C_{31} & -C_{32} & -C_{33} \\ 0 & 0 & -C_{11} & -C_{12} & -C_{13} \\ 0 & 0 & -C_{21} & -C_{22} & -C_{23} \\ C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}(\phi_U) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Omega_N \sin \phi_U \\ \Omega_N (1 - \cos \phi_U) \\ f_x (1 - \cos \phi_U) + f_y \sin \phi_U \\ -f_x \sin \phi_U + f_y (1 - \cos \phi_U) \\ \mathbf{0}_{5 \times 1} \end{bmatrix}$$

$$\Omega_N = \omega_w \cos \varphi$$

$$\Omega_U = \omega_w \sin \varphi$$

观测量为水平速度误差，故

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{V}$$

式中

$$\mathbf{H} = [\mathbf{0}_{2 \times 3} \ \mathbf{I}_{2 \times 2} \ \mathbf{0}_{2 \times 5}] \quad (2)$$

$\mathbf{V}$  为观测的随机白噪声向量，其协方差为  $\mathbf{r}$ 。

对于系统状态方程式(1)，其状态的排列与常用排列顺序稍有不同，这是为了应用本文所提出的降维 CKF 算法提供方便。

将系统方程和状态方程离散化可得

$$\mathbf{X}_k = [\mathbf{I}_{10 \times 10} + \Delta t \mathbf{A}_{k-1}(\phi_{U,k-1})] \mathbf{X}_{k-1} + \Delta t \mathbf{b}_{k-1}(\phi_{U,k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (3)$$

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{H}\mathbf{X}_k + \mathbf{v}_k \quad (4)$$

式中， $\phi_{U,k-1}$  为  $k-1$  时刻方位失准角； $\Delta t$  为离散化的时间间隔； $\mathbf{w}_{k-1}$ 、 $\mathbf{v}_k$  为离散化后的白噪声向量，其协方差分别为  $\mathbf{Q}_{k-1} = \mathbf{q}/\Delta t$ 、 $\mathbf{R}_k = \mathbf{r}/\Delta t$ 。

离散化后的系统方程可以写为

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{F}_{k-1}(\phi_{U,k-1}) \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{g}_{k-1}(\phi_{U,k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (5)$$

从式(5)可以看出，离散化后的系统方程的非线性项只与方位失准角  $\phi_{U,k-1}$  有关，与状态向量的其他分量无关，这便为降维 CKF 算法的推导提供了方便。

### 2 降维 CKF 算法

#### 2.1 三阶球面-相径容积规则

已知  $n$  维随机向量  $\mathbf{x}$  服从均值为  $\hat{\mathbf{x}}$ ，协方差为  $\mathbf{P}_x$  的高斯分布， $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  为关于随机向量  $\mathbf{x}$  的  $m$  维非线性函数向量，根据随机过程相关知识可知，其后验均值  $\hat{\mathbf{y}}$  和协方差  $\mathbf{P}_y$ ，可从关于随机向量  $\mathbf{x}$  高斯积分求得<sup>[10-12]</sup>，即

$$\hat{\mathbf{y}} = \int \mathbf{f}(\mathbf{x}) N(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_x) d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{P}_y = \int (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{y}})(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{y}})^T N(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_x) d\mathbf{x} =$$

$$\int \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x})^T N(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_x) d\mathbf{x} - \hat{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{y}}^T$$

式中， $N(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_x)$  表示随机向量  $\mathbf{x}$  的概率分布密度函数，即

$$N(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{P}_x|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{P}_x^{-1} (\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}})}{2}}$$

在实际情况下，上述两个多元高斯积分通常没有解析解，故难以求得精确值，所以需要对其进行数值近似计算<sup>[13-15]</sup>。

而对于形如

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{g}(\mathbf{x}) N(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_x) d\mathbf{x}$$

的多元高斯积分，三阶球面-相径容积规则能以三阶多项式逼近其积分值。其基本思想是根据  $\mathbf{x}$  的先验统计特性  $N(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_x)$ ，寻找一系列的权重相同的容积点，对容积点计算其经过非线性函数  $\mathbf{f}(\cdot)$  传递所得的新容积点，然后基于新容积点计算近似的积分值。

利用三阶球面-相径容积规则对  $\hat{\mathbf{y}}$ 、 $\mathbf{P}_y$  进行近似计算的过程如下<sup>[1-2]</sup>。

步骤 1 对  $\mathbf{P}_x$  做 Cholesky 分解

$$\mathbf{P}_x = \mathbf{S}\mathbf{S}^T$$

步骤 2 求取容积点

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{S}\boldsymbol{\xi}_i + \hat{\mathbf{x}}, \quad i = 1, 2, \dots, L$$

式中， $L = 2n$ ； $\boldsymbol{\xi}_i = \sqrt{L/2} [1_i, [1]$  表示对  $n$  维单位向量  $[1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$  中的元素进行全排列和改变符号产生的点集，称为完整全对称点集， $[1]_i$  表示  $[1]$  的第  $i$  个点。例如，当  $n=2$  时， $[1]$  表示集合  $\{[1 \ 0]^T, [0 \ 1]^T, [-1 \ 0]^T, [0 \ -1]^T\}$ 。

步骤 3 通过容积点  $\boldsymbol{\alpha}_i$  计算经过非线性函数  $\mathbf{f}(\cdot)$  传递后的新容积点表示如下：

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}_i)$$

**步骤 4** 计算随机向量  $\boldsymbol{x}$  经非线性函数  $\boldsymbol{f}(\cdot)$  传递之后的后验均值  $\hat{\boldsymbol{y}}$ , 协方差  $\boldsymbol{P}_y$  为

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) N(\boldsymbol{x}; \hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{P}_x) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \approx \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \boldsymbol{\gamma}_i \quad (6)$$

$$\boldsymbol{P}_y = \int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})^\top N(\boldsymbol{x}; \hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{P}_x) \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{y}} \hat{\boldsymbol{y}}^\top \approx \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \boldsymbol{\gamma}_i \boldsymbol{\gamma}_i^\top - \hat{\boldsymbol{y}} \hat{\boldsymbol{y}}^\top \quad (7)$$

### 2.2 相关定理证明

为了方便降维 CKF 算法的推导, 本小节先给出引理 1, 再证明定理 1。

**引理 1** 已知  $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_m]^\top, \boldsymbol{y} = [y_1, \dots, y_k]^\top, \boldsymbol{z} = [z_1, \dots, z_n]^\top$ , 且  $\boldsymbol{z} \sim N(\boldsymbol{z}; \mathbf{0}, \boldsymbol{I}_n)$ , 则

$$E[y_i \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] = 0 \Leftrightarrow \int y_i \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) N(\boldsymbol{z}; \mathbf{0}, \boldsymbol{I}_n) \mathrm{d}\boldsymbol{z} = 0 \quad (8)$$

$$E[y_i y_j \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] = 0 \Leftrightarrow \int y_i y_j \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) N(\boldsymbol{z}; \mathbf{0}, \boldsymbol{I}_n) \mathrm{d}\boldsymbol{z} = 0 \quad (9)$$

$$E[y_i^2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] = E[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] \Leftrightarrow$$

$$\int y_i^2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) N(\boldsymbol{z}; \mathbf{0}, \boldsymbol{I}_n) \mathrm{d}\boldsymbol{z} = \int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) N(\boldsymbol{x}; \mathbf{0}, \boldsymbol{I}_m) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad (10)$$

应用概率论的相关知识, 可以很容易证明引理 1, 这里限于篇幅, 不做证明。

**定理 1** 已知  $\boldsymbol{x} \sim N(\boldsymbol{x}; \hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{P}), \boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi})$ , 式中,  $\boldsymbol{\xi}$  为  $\boldsymbol{x}$  的前  $j$  个分量, 即  $\boldsymbol{\xi} = [x_1, x_2, \dots, x_j]^\top$ , 则  $\hat{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{P}_y$  是关于随机变量  $\boldsymbol{\xi}$  的多元高斯积分, 且其积分式为

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \int \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}) N(\boldsymbol{\xi}; \hat{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{P}^\xi) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{P}_y = \int \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) N(\boldsymbol{\xi}; \hat{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{P}^\xi) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{y}} \hat{\boldsymbol{y}}^\top \quad (12)$$

式中,  $\boldsymbol{P}^\xi$  为  $\boldsymbol{P}$  的前  $j$  行和前  $j$  列元素组成的矩阵;  $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}^\xi$  分别为  $\boldsymbol{P}$  和  $\boldsymbol{P}^\xi$  的 Cholesky 分解, 且

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) \left( \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{S} \left( \begin{bmatrix} (\boldsymbol{S}^\xi)^{-1} (\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \right) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi})$$

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\Phi}^\top(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{S} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_l \end{bmatrix} \boldsymbol{S}^\top \boldsymbol{F}^\top(\boldsymbol{\xi})$$

**证明** 首先证明式(11), 令  $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{\xi}^\top, \boldsymbol{\eta}^\top]^\top$ , 设  $\boldsymbol{x}$  的维数为  $n, \boldsymbol{\eta}$  的维数为  $l$ , 则  $n = j + l$ 。又  $\boldsymbol{x} \sim N(\boldsymbol{x}; \hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{P})$ , 故  $\boldsymbol{\xi} \sim N(\boldsymbol{\xi}; \hat{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{P}^\xi)$ , 式中,  $\boldsymbol{P}^\xi$  为  $\boldsymbol{P}$  的前  $j$  行、 $j$  列元素组成的矩阵。对于  $\hat{\boldsymbol{y}}$ , 有

$$\hat{\boldsymbol{y}} = E[\boldsymbol{y}] = E[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi})] = E[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x}] + E[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi})]$$

显然,  $E[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi})]$  是关于随机变量  $\boldsymbol{\xi}$  的多元高斯积分, 故要证明式(11)只需证明  $E[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x}]$  也是关于随机变量  $\boldsymbol{\xi}$  的多元高斯积分。由于

$$E[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x}] = \int \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x} N(\boldsymbol{x}; \hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{P}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

对  $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}^\xi$  做 Cholesky 分解:  $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^\top, \boldsymbol{P}^\xi = \boldsymbol{S}^\xi(\boldsymbol{S}^\xi)^\top$ , 由于  $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}^\xi$  为下三角矩阵, 则  $\boldsymbol{S}^\xi$  为  $\boldsymbol{S}$  的前  $j$  行、 $j$  列元素组成的矩阵。

再令  $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{x}}$ , 由于  $\boldsymbol{S}$  为下三角矩阵, 故  $\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{S}^\xi \bar{\boldsymbol{\xi}}$ , 再令  $\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{S}^\xi \bar{\boldsymbol{\xi}}) = \boldsymbol{F}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}})$ , 则有

$$E[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x}] = \int \boldsymbol{F}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \hat{\boldsymbol{x}} N(\bar{\boldsymbol{\xi}}; \mathbf{0}, \boldsymbol{I}_l) \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\xi}} + \int \boldsymbol{F}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{x}} N(\bar{\boldsymbol{x}}; \mathbf{0}, \boldsymbol{I}_n) \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}}$$

$$\int \boldsymbol{F}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{x}} N(\bar{\boldsymbol{x}}; \mathbf{0}, \boldsymbol{I}_n) \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}} = \int \boldsymbol{F}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{S} \left( \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\xi}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} \right) \times N(\bar{\boldsymbol{\xi}}; \mathbf{0}, \boldsymbol{I}_j) \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\xi}}$$

$$\boldsymbol{F}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{S} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} \right) = \left( \sum_{i=1}^j f_{1i}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \bar{\eta}_i \quad \dots \quad \sum_{i=1}^j f_{mi}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \bar{\eta}_i \right)^\top$$

由引理 1 中的式(8), 可知

$$E[f_{ki}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \bar{\eta}_i] = 0, k = 1, 2, \dots, n$$

故

$$\int \boldsymbol{F}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{S} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} \right) N(\bar{\boldsymbol{x}}; \mathbf{0}, \boldsymbol{I}_n) \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}} = 0$$

从而有

$$E[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x}] = \int \boldsymbol{F}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \left( \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{S} \left( \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\xi}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \right) N(\bar{\boldsymbol{\xi}}; \mathbf{0}, \boldsymbol{I}_j) \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\xi}} =$$

$$\int \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) \left( \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{S} \left( \begin{bmatrix} (\boldsymbol{S}^\xi)^{-1} (\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \right) N(\boldsymbol{\xi}; \hat{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{P}^\xi) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

故  $E[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x}]$  式关于随机变量  $\boldsymbol{\xi}$  的多元函数高斯积分。又由于

$$\hat{\boldsymbol{y}} = E[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x}] + E[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi})]$$

从而证明了  $\hat{\boldsymbol{y}}$  是关于随机变量  $\boldsymbol{\xi}$  的多元函数高斯积分。令

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) \left( \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{S} \left( \begin{bmatrix} (\boldsymbol{S}^\xi)^{-1} (\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \right) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi})$$

则

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \int \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}) N(\boldsymbol{\xi}; \hat{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{P}^\xi) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \quad (13)$$

再证明式(12)

$$\boldsymbol{P}_y = E[\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^\top] - \hat{\boldsymbol{y}} \hat{\boldsymbol{y}}^\top$$

$$E[\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^\top] = \int \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^\top N(\boldsymbol{x}; \hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{P}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad (14)$$

令  $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{x}}$ , 由于  $\boldsymbol{S}$  为下三角矩阵, 所以  $\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{S}^\xi \bar{\boldsymbol{\xi}}$ , 为了方便表示, 令

$$\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{S}^\xi \bar{\boldsymbol{\xi}}) = \boldsymbol{F}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}}), \boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{S}^\xi \bar{\boldsymbol{\xi}}) = \boldsymbol{g}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}})$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{F}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{g}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}}) = \boldsymbol{\Gamma}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}})$$

$$\boldsymbol{F}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{g}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}}) + \boldsymbol{F}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}})\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\Lambda}_1(\bar{\boldsymbol{x}})$$

则

$$E[\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^\top] = \int \boldsymbol{\Lambda}_1(\bar{\boldsymbol{x}}) \boldsymbol{\Lambda}_1^\top(\bar{\boldsymbol{x}}) N(\bar{\boldsymbol{x}}; \mathbf{0}, \boldsymbol{I}_n) \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}} =$$

$$f_1(\bar{\boldsymbol{x}}) + f_2(\bar{\boldsymbol{x}}) + f_2^\top(\bar{\boldsymbol{x}}) + f_3(\bar{\boldsymbol{x}})$$

式中

$$f_1(\bar{\boldsymbol{x}}) = \int \boldsymbol{\Gamma}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{\Gamma}_1^\top(\bar{\boldsymbol{\xi}}) N(\bar{\boldsymbol{x}}; \mathbf{0}, \boldsymbol{I}_n) \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}} \quad (15)$$

$$f_2(\bar{\boldsymbol{x}}) = \int \boldsymbol{\Gamma}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \bar{\boldsymbol{x}}^\top \boldsymbol{S}^\top \boldsymbol{F}_1^\top(\bar{\boldsymbol{\xi}}) N(\bar{\boldsymbol{x}}; \mathbf{0}, \boldsymbol{I}_n) \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}} \quad (16)$$

$$f_3(\bar{\boldsymbol{x}}) = \int \boldsymbol{F}_1(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{x}} \bar{\boldsymbol{x}}^\top \boldsymbol{S}^\top \boldsymbol{F}_1^\top(\bar{\boldsymbol{\xi}}) N(\bar{\boldsymbol{x}}; \mathbf{0}, \boldsymbol{I}_n) \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}} \quad (17)$$

由于  $\hat{x}$  是常值向量, 很容易得到式(15)为关于  $\tilde{\xi}$  的多元函数高斯积分且积分为

$$f_1(\tilde{x}) = \int \Gamma_1(\tilde{\xi}) \Gamma_1^T(\tilde{\xi}) N(\tilde{\xi}; 0, \mathbf{I}_l) d\tilde{\xi} = \int \Gamma(\xi) \Gamma^T(\xi) N(\xi; \hat{\xi}, \mathbf{P}^s) d\xi$$

故式(15)为关于  $\xi$  的多元高斯积分。

对于式(16), 仿照  $\hat{y}$  的推导过程可知

$$f_2(\tilde{x}) = \int \Gamma(\xi) \begin{bmatrix} (\mathbf{S}^s)^{-1}(\xi - \hat{\xi}) \\ 0 \end{bmatrix}^T \mathbf{S}^T \mathbf{F}^T(\xi) \cdot N(\xi; \hat{\xi}, \mathbf{P}^s) d\xi$$

故式(16)为关于  $\xi$  的多元函数高斯积分。

对于式(17)

$$f_3(\tilde{x}) = \int \mathbf{F}_1(\tilde{\xi}) \mathbf{S} \tilde{x} \tilde{x}^T \mathbf{S}^T \mathbf{F}_1^T(\tilde{\xi}) N(\tilde{x}; 0, \mathbf{I}_n) d\tilde{x} = \int \mathbf{F}_1(\tilde{\xi}) \mathbf{S} \begin{bmatrix} \tilde{\xi} \tilde{\xi}^T & \tilde{\xi} \tilde{\eta}^T \\ \tilde{\eta} \tilde{\xi}^T & \tilde{\eta} \tilde{\eta}^T \end{bmatrix} \mathbf{S}^T \mathbf{F}_1^T(\tilde{\xi}) N(\tilde{x}; 0, \mathbf{I}_n) d\tilde{x}$$

令

$$\varphi(\tilde{\xi}) = \mathbf{F}_1(\tilde{\xi}) \mathbf{S} \begin{bmatrix} \tilde{\xi} \tilde{\xi}^T & \tilde{\xi} \tilde{\eta}^T \\ \tilde{\eta} \tilde{\xi}^T & \tilde{\eta} \tilde{\eta}^T \end{bmatrix} \mathbf{S}^T \mathbf{F}_1^T(\tilde{\xi})$$

则

$$\varphi(\tilde{\xi}) = \left[ \left( \sum_{\alpha=1}^j \sum_{\beta=1}^j \mathbf{g}_{\alpha, \beta}(\tilde{\xi}) \tilde{\xi}_\alpha \tilde{\xi}_\beta + \sum_{\alpha=1}^j \sum_{\beta=1}^l \mathbf{g}_{\alpha, \beta+j}(\tilde{\xi}) \tilde{\xi}_\alpha \tilde{\eta}_{\beta+j} + \sum_{\alpha=1}^l \sum_{\beta=1}^j \mathbf{g}_{\alpha+j, \beta}(\tilde{\xi}) \tilde{\xi}_{\alpha+j} \tilde{\eta}_\beta + \sum_{\alpha=1}^l \sum_{\beta=1}^l \mathbf{g}_{\alpha+j, \beta+j}(\tilde{\xi}) \tilde{\eta}_{\alpha+j} \tilde{\eta}_{\beta+j} \right)_{s,t} \right]_{n \times n}$$

由引理 1 中的式(8)~式(10)可分别得到

$$E[\mathbf{g}_{\alpha, \beta+j}(\tilde{\xi}) \tilde{\xi}_\alpha \tilde{\eta}_{\beta+j}] = 0, \alpha = 1, 2, \dots, j; \beta = 1, 2, \dots, l$$

$$E[\mathbf{g}_{\alpha+j, \beta}(\tilde{\xi}) \tilde{\xi}_{\alpha+j} \tilde{\eta}_\beta] = 0, \alpha = 1, 2, \dots, l; \beta = 1, 2, \dots, j$$

$$E[\mathbf{g}_{\alpha+j, \beta+j}(\tilde{\xi}) \tilde{\eta}_{\alpha+j} \tilde{\eta}_{\beta+j}] = 0, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, l; \alpha \neq \beta$$

$$E[\mathbf{g}_{\alpha+j, \beta+j}(\tilde{\xi}) \tilde{\eta}_{\alpha+j}^2] = E[\mathbf{g}_{\alpha+j, \beta+j}(\tilde{\xi})], \alpha = \beta = 1, 2, \dots, l$$

故

$$E[\varphi(\tilde{\xi})] =$$

$$\left[ \left( \sum_{\alpha=1}^j \sum_{\beta=1}^j E[\mathbf{g}_{\alpha, \beta}(\tilde{\xi}) \tilde{\xi}_\alpha \tilde{\xi}_\beta] + \sum_{\beta=1}^l E[\mathbf{g}_{\beta+j, \beta+j}(\tilde{\xi})] \right)_{s,t} \right]_{n \times n} =$$

$$\int \mathbf{F}_1(\tilde{\xi}) \mathbf{S} \begin{bmatrix} \tilde{\xi} \tilde{\xi}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_l \end{bmatrix} \mathbf{S}^T \mathbf{F}_1^T(\tilde{\xi}) N(\tilde{\xi}; 0, \mathbf{I}_l) d\tilde{\xi} =$$

$$\int \mathbf{F}(\xi) \mathbf{S} \begin{bmatrix} (\mathbf{S}^s)^{-1}(\xi - \hat{\xi})(\xi - \hat{\xi})^T [(\mathbf{S}^s)^{-1}]^T & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_l \end{bmatrix} \cdot \mathbf{S}^T \mathbf{F}^T(\xi) N(\xi; \hat{\xi}, \mathbf{P}^s) d\xi$$

所以式(17)为关于  $\xi$  的多元高斯积分。

从而  $\mathbf{P}_y$  为关于  $\xi$  的多元高斯积分, 且积分为

$$\mathbf{P}_y = \int \Psi(\xi) N(\xi; \hat{\xi}, \mathbf{P}^s) d\xi - \hat{y} \hat{y}^T$$

式中

$$\Psi(\xi) = \Phi(\xi) \Phi^T(\xi) + \mathbf{F}(\xi) \mathbf{S} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_l \end{bmatrix} \mathbf{S}^T \mathbf{F}^T(\xi)$$

证毕

### 2.3 降维 CKF 算法

考虑特殊非线性系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k(\xi_k) \mathbf{x}_k + \mathbf{g}_k(\xi_k) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (18)$$

式中,  $\xi_k$  为  $\mathbf{x}_k$  的前  $j$  个元素, 即  $\mathbf{x}_k = [\xi_k^T, \eta_k^T]^T$

$$E[\mathbf{w}_k] = 0, E[\mathbf{v}_k] = 0$$

$$\text{Cov}[\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j] = \mathbf{Q}_k \delta_{kj}, \text{Cov}[\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j] = \mathbf{R}_k \delta_{kj}$$

$$\text{Cov}[\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_j] = 0$$

式中,  $\mathbf{Q}_k \geq 0$  为系统噪声方差阵;  $\mathbf{R}_k > 0$  为量测噪声方差阵; 为 Kronecker 符号。

已知  $k-1$  时刻状态  $\mathbf{x}_{k-1}$  的统计特性  $N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-1})$ , 若能求出  $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$  和  $\mathbf{P}_{k/k-1}^x$ , 则该系统的滤波方程为

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \mathbf{P}_{k/k-1}^x + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (19)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (20)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \quad (21)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k/k-1} \quad (22)$$

对于  $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$  和  $\mathbf{P}_{k/k-1}^x$  的求取, 如果采用常规 CKF 算法, 则可利用三阶球面-相径容积规则, 根据状态  $\mathbf{x}_{k-1}$  的统计特性  $(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-1})$ , 求取  $2n$  个采样点  $\mathbf{x}_{k-1}^i (i=1, \dots, 2n)$ , 再按照下式求取  $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$  和  $\mathbf{P}_{k/k-1}^x$ 。

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \Theta(\mathbf{x}_{k-1}^i)$$

$$\mathbf{P}_{k/k-1}^x = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \Theta(\mathbf{x}_{k-1}^i) \Theta^T(\mathbf{x}_{k-1}^i) - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^T$$

式中

$$\Theta(\mathbf{x}_{k-1}^i) = \mathbf{F}_{k-1}(\xi_{k-1}^i) \mathbf{x}_{k-1}^i + \mathbf{g}_{k-1}(\xi_{k-1}^i)$$

但是由于该系统的特殊性, 由定理 1 可知,  $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$  和  $\mathbf{P}_{k/k-1}^x$  是关于随机变量  $\xi_{k-1}$  的多元高斯积分, 即

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \int \Phi_{k-1}(\xi_{k-1}) N(\xi_{k-1}; \hat{\xi}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-1}^s) d\xi_{k-1} \quad (23)$$

$$\mathbf{P}_{k/k-1}^x = \int \Psi_{k-1}(\xi_{k-1}) N(\xi_{k-1}; \hat{\xi}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-1}^s) d\xi_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^T \quad (24)$$

式中

$$\Phi_{k-1}(\xi_{k-1}) = \mathbf{F}_{k-1}(\xi_{k-1}) \cdot$$

$$\left[ \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{S}_{k-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{S}_{k-1}^s)^{-1}(\xi_{k-1} - \hat{\xi}_{k-1}) \\ 0 \end{bmatrix} \right] + \mathbf{g}_{k-1}(\xi_{k-1})$$

$$\Psi_{k-1}(\xi_{k-1}) = \Phi_{k-1}(\xi_{k-1}) \Phi_{k-1}^T(\xi_{k-1}) +$$

$$\mathbf{F}_{k-1}(\xi_{k-1}) \mathbf{S}_{k-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_l \end{bmatrix} \mathbf{S}_{k-1}^T \mathbf{F}_{k-1}^T(\xi_{k-1})$$

故可以对式(23)和式(24), 利用三阶球面-相径容积规则近似求解, 根据  $\xi_{k-1}$  的统计特性  $(\hat{\xi}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-1}^s)$ , 求取  $2j$  个

采样点  $\xi_{k-1}^i (i=1, \dots, 2j)$ , 可近似求得  $\hat{x}_{k/k-1}$  和  $P_{k/k-1}$  为

$$\hat{x}_{k/k-1} = \frac{1}{2j} \sum_{i=1}^{2j} \Phi(\xi_{k-1}^i) \quad (25)$$

$$P_{k/k-1} = \frac{1}{2j} \sum_{i=1}^{2j} \Psi(\xi_{k-1}^i) - \hat{x}_{k/k-1} \hat{x}_{k/k-1}^T \quad (26)$$

这样, 式(19)~式(22)、式(25)和式(26)构成了降维 CKF 算法递推公式。

相比于常规 CKF 算法, 新算法将采样向量的维数从  $n$  维降低到  $j$  维, 减少了  $2(n-j)$  个采样点, 可以大大减轻计算负担, 并且由于同样采用了三阶球面-相径容积规则近似计算高斯积分, 所以估计精度与常规 CKF 算法相当, 都可以达到三阶多项式精度。

### 3 数值仿真结果与分析

对于 SINS 误差模型所离散化后的状态方程式(5), 可以看到其状态向量  $X_k$  为 10 维, 如果采用常规 CKF 算法进行滤波, 则在  $k$  时刻对  $X_k$  采样时, 需要求取 20 个采样点。但由于该非线性状态方程的非线性只与方位失准角  $\phi_{U,k}$  有关, 相当于非线性系统式(18)中  $\xi_k = \phi_{U,k}$ , 即  $\xi_k$  为 1 维的情况, 故该系统满足应用降维 CKF 算法的条件, 且只需要对  $X_k$  中的  $\phi_{U,k}$  进行采样, 即只需求取 2 个采样点。

分别采用常规 CKF 算法, 降维 CKF 算法对 SINS 大方位失准角误差模型进行状态估计, 其仿真的参数设置如下: 取当地纬度  $\varphi = 45.78^\circ$ , 当地经度  $\lambda = 126.67^\circ$ , 陀螺常值漂移为  $0.02^\circ/h$ , 随机误差为  $0.005^\circ/\sqrt{h}$ , 加速度计常值零偏为  $1 \times 10^{-4}g$ , 随机零偏为  $0.5 \times 10^{-4}g$ , 真实姿态角为  $(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$ , 初始水平失准角为  $1^\circ$ , 方位失准角为  $10^\circ$ , 设滤波初值的选取为  $X_0 = 0$ , 初始方差阵、系统噪声阵和量测噪声阵为

$$P_0 = \{(10^\circ)^2, (1^\circ)^2, (1^\circ)^2, (0.1 \text{ m/s})^2, (0.1 \text{ m/s})^2, (10^{-4}g)^2, (10^{-4}g)^2, (0.01^\circ/h)^2, (0.01^\circ/h)^2, (0.01^\circ/h)^2\}$$
$$Q = \text{diag}\{(0.5 \times 10^{-4}g)^2, (0.5 \times 10^{-4}g)^2, (0.005^\circ/\sqrt{h})^2, (0.005^\circ/\sqrt{h})^2, (0.005^\circ/\sqrt{h})^2, \mathbf{0}_{1 \times 5}\}$$
$$R = \text{diag}\{(0.01 \text{ m/s})^2, (0.01 \text{ m/s})^2\}$$

设仿真时间为 600 s, 2 种滤波器滤波结果如图 1~图 3 所示。

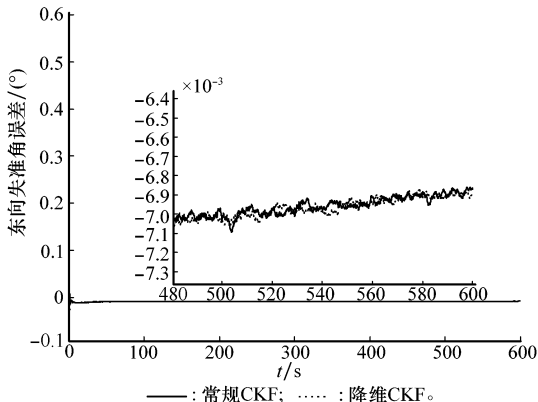


图 1 东向失准角误差曲线

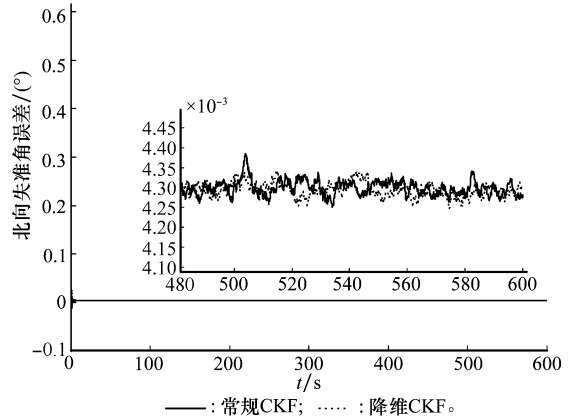


图 2 北向失准角误差曲线

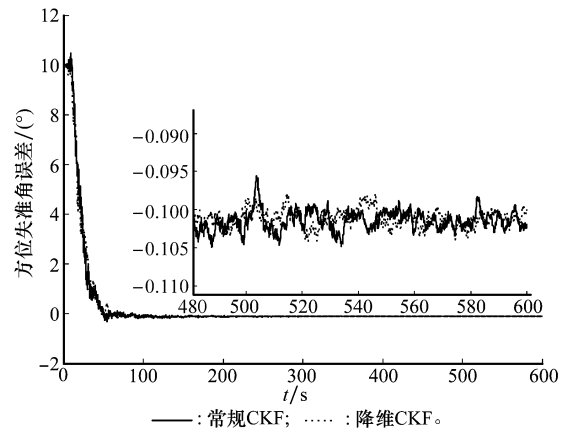


图 3 方位失准角误差曲线

2 种滤波器的对准精度与理论极限精度如表 1 所示。

表 1 初始对准精度比较 (°)

算法	东向失准角	北向失准角	方位失准角
极限精度	-0.005 7	0.005 7	-0.11
常规 CKF	-0.006 9	0.004 3	-0.1
降维 CKF	-0.006 9	0.004 3	-0.1

从图 1~图 3 和表 1 可以看出, 对于常规 CKF 算法和降维 CKF 算法, 东向失准角和北向失准角估计精度与理论极限精度相近, 且收敛速度较快。而方位失准角的收敛速度稍慢, 且对准精度都大致在左右, 与理论极限精度存在左右的误差, 这是因为系统建模时省略了高阶项, 具有模型误差的原因, 但是该结果仍在可以接受的范围内。总体说来, 由于常规 CKF 算法和降维 CKF 算法都采用了三阶球面-相径容积规则近似计算后验均值和协方差的高斯积分, 故二者的估计精度相同, 将 2 种算法应用于初始对准时, 也可以获得相同的对准精度。

为了比较 2 种算法的计算时间, 仿真软件采用 Matlab7.4, 仿真计算机处理器为奔腾 (R) E5500, 主频为 3.0 GHz, 分别对常规 CKF 算法和降维 CKF 算法对该程序仿真 30 次, 所得 2 种算法的总运行时间和平均单次运行时间如表 2 所示。

从表 2 可以看出, 平均每次仿真中, 常规 CKF 算法滤波

时间为 9.87 s,降维 CKF 算法滤波时间为 3.24 s,约为常规 CKF 算法运行时间的 1/3,这样便大大减少了计算量和计算时间,验证了该算法的有效性和实用性。

表 2 滤波时间比较

算法	总运行时间	单次运行时间
常规 CKF	296.2	9.87
降维 CKF	97.3	3.24

## 4 结 论

SINS 大方位失准角误差模型是一类较为特殊的非线性模型,它的非线性项只与大方位失准角  $\phi_U$  有关。当采用常规 CKF 算法对离散化后的系统进行滤波时,由于 CKF 采样点的个数是状态向量维数的 2 倍,而该模型状态向量的维数为 10 维,故需要 20 个采样点才能完成滤波,计算量较大,导致计算机处理速度下降。而采用本文提出的降维 CKF 算法,则只需对导致该模型非线性化的  $\phi_{U,i}$  进行采样,使采样向量维数下降到 1 维,采样点的数量下降到 2 个,同时,与常规 CKF 算法类似,该算法利用三阶球面-相径容积规则近似求得状态后验均值和协方差,这样便可以在不损失滤波精度的同时,大大减少采样点数量,有效降低计算量。通过仿真实验表明,降维 CKF 算法与常规 CKF 算法具有相同的对准精度,但滤波计算时间仅为常规 CKF 算法的 1/3,显著提高了计算机处理速度,从而体现了该算法的实用性。

## 参考文献:

- [1] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filter[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1254-1269.
- [2] Arasaratnam I, Haykin S, Hurd T R. Cubature Kalman filtering for continuous-discrete systems: theory and simulations[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2010, 58(10): 4977-4993.
- [3] Pakki K, Chandra B, Gu D W. Cubature information filter and its applications[C]// *Proc. of the American Control Conference*, 2011: 3609-3614.
- [4] Sun F, Tang L J. Cubature particle filter[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2011, 33(11): 2554-2557. (孙枫,唐李军. Cubature 粒子滤波[J]. *系统工程与电子技术*, 2011, 33(11): 2554-2557.)
- [5] Pesonen H, Piche R. Cubature-based Kalman filter for positioning[C]// *Proc. of the 7th Workshop on Positioning, Navigation and Communication*, 2010: 45-49.
- [6] Mu J, Cai Y L. Iterated cubature Kalman filter and its application[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2011, 33(7): 1454-1457. (穆静,蔡远利. 迭代容积卡尔曼滤波算法及其应用[J]. *系统工程与电子技术*, 2011, 33(7): 1454-1457.)
- [7] Sun F, Tang L J. Initial alignment of large azimuth misalignment angle in SINS based on CKF[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2011, 33(2): 327-333. (孙枫,唐李军. 基于 CKF 的 SINS 大方位失准角初始对准[J]. *仪器仪表学报*, 2012, 33(2): 327-333.)
- [8] Xie Y G, Yi G X, Wang C H, et al. Application of Gauss-Hermite filter in SINS alignment[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2011, 33(3): 554-560. (谢阳光,伊国兴,王常虹,等. 高斯-厄米特滤波器在捷联惯导系统初始对准中的应用[J]. *航空学报*, 2011, 33(3): 554-560.)
- [9] Zhou Z X, Gao Y N, Chen L B. Unscented Kalman filter for SINS alignment[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2007, 18(2): 327-333.
- [10] Jia B, Xin M, Cheng Y. Sparse Gauss-Hermite quadrature filter with application to spacecraft attitude estimation[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2011, 34(2): 367-379.
- [11] Havlicek M, Jan J. Nonlinear estimation of BOLD signal based on cubature particle filter[C]// *Proc. of the 20th European Association for Signal Processing Conference on Biosignal*, 2010: 328-332.
- [12] Macagnano D, Freitas de Abreu G T. Adaptive gating for multitarget tracking with Gaussian mixture filters[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2011, 60(3): 1533-1538.
- [13] Yardim C, Michalopoulou Z H, Gerstoft P. An overview of sequential Bayesian filtering in ocean acoustics[J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2011, 36(1): 71-89.
- [14] Bae J, Kim Y. Nonlinear estimation for spacecraft attitude using decentralized unscented information filter[C]// *Proc. of the International Conference on Control Automation and Systems*, 2010: 1562-1566.
- [15] Swati, Bhaumik S. Nonlinear estimation using cubature quadrature points[C]// *Proc. of the International Conference on Energy, Automation, and Signal*, 2011: 1-6.

## 作者简介:

钱华明(1965-),男,教授,博士,主要研究方向为传感器技术及智能系统、组合导航、智能故障诊断和容错、信息处理。

E-mail:qianhuam@sina.com

葛磊(1985-),男,博士研究生,主要研究方向为非线性滤波算法、组合导航。

E-mail:gelei2000@163.com

黄蔚(1986-),男,博士研究生,主要研究方向为非线性滤波算法、卫星姿态确定。

E-mail:huangwei2393@163.com

彭宇(1986-),男,博士研究生,主要研究方向为组合导航综合故障诊断技术。

E-mail:lyricday@sina.cn