

欠驱动航天器实时最优控制算法设计

庄宇飞, 黄海滨

(哈尔滨工业大学(威海)信息与电气工程学院, 山东 威海 264200)

摘要: 针对欠驱动刚性航天器, 提出了时间最优的闭环状态反馈控制算法。首先, 利用直接 Legendre 伪谱法规划出航天器开环的姿态机动轨迹, 并验证了所得最优控制输入的可行性。然后, 以航天器实际运行轨迹与开环轨迹间的偏差为变量构造偏差方程, 并提出了基于间接 Legendre 伪谱法的最优姿态稳定控制算法。最后, 采用实时重规划策略实现了稳定控制器状态的反馈, 从而完成了对参考轨迹的闭环跟踪。仿真结果表明所提算法运算量小, 计算速度快, 可以实时获取解析形式的控制输入修正量, 而且对初始姿态存在扰动的情况具有一定的鲁棒性, 运算精度较高。

关键词: 最优控制; 轨迹规划; 轨迹跟踪; 伪谱法; 欠驱动航天器

中图分类号: V 448.2

文献标志码: A

DOI: 10.3969/j.issn.1001-506X.2013.07.21

Real-time optimal control for underactuated spacecraft

ZHUANG Yu-fei, HUANG Hai-bin

(School of Information and Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology at Weihai, Weihai 264200, China)

Abstract: A novel time-optimal feedback control algorithm for the closed-loop control of an underactuated rigid spacecraft is presented. Firstly, the constrained trajectory is generated by the direct Legendre pseudospectral method, and the feasibility of the control solution is validated. Secondly, regarding the errors between the actual trajectory and the reference trajectory as variables, an error equation is constructed, which can be solved by the indirect Legendre pseudospectral method. Finally, the closed-loop trajectory tracking control law is obtained by the on-line replanning strategy. Simulation results demonstrate that the proposed control scheme can obtain a closed-loop state feedback control law in real-time and can lead to a high precision even in the presence of initial state perturbations.

Keywords: optimal control; trajectory planning; trajectory tracking; pseudospectral method; underactuated spacecraft

0 引言

随着航天科技的不断发展, 现代航天器的飞行任务经常要求姿态控制系统在具备姿态机动、姿态跟踪等能力的同时, 能够最优化某些期望的性能指标, 例如机动时间、机动过程中所消耗的燃料等。因此, 近年来航天器的姿态最优控制问题得到了国内外众多学者的广泛关注^[1-6]。

由于数学模型存在非线性及耦合性, 航天器的最优反馈控制器设计具有一定的难度, 尤其是在执行机构控制输出饱和的情况下。针对这种情况, 文献[7]提出了极小值原理, 通过求解一个两点边值问题得到最优解。尽管如此, 两

点边值问题通常要求解一组偏微分方程, 由于航天器系统模型的复杂性, 这一过程很难得到解析解。近年来, 随着计算机技术的发展与普及, 最优控制问题的求解方法正逐步向数值方法转变。数值优化方法主要可分为: 间接法和直接法^[8]。间接法以古典变分法为基础, 遵循极小值原理, 因此解的精度较高, 但并不适用于求解模型复杂且约束条件较多的优化问题。而且算法对于优化初值较为敏感, 收敛域较小; 直接法的基本原则是采用参数化方法将原连续的最优控制问题转化为非线性规划问题, 并采用现有的非线性规划算法求解。由于不要求解一阶最优性必要条件, 其对于不同的优化初始值具有更强的鲁棒性, 因此在实

收稿日期: 2012-05-16; 修回日期: 2013-01-21; 网络优先出版日期: 2013-04-09。

网络优先出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2422.TN.20130409.1627.007.html>

基金项目: 国家自然科学基金(61004072, 61174200); 高等学校博士学科点专项科研基金(20102302110031); 中央高校基本科研业务费专项资金(HIT KLOF 2013135); 哈尔滨工业大学科研创新基金(HIT NSRF 2014139)资助课题

际最优问题求解过程中,直接法相对于间接法应用更为广泛。伪谱法是直接配点法的一个分支,其优势在于较快的收敛速度及较高的计算精度,可以满足最优控制器实时求解的需求^[9-13]。

目前,在航天器姿态控制领域常见的研究对象是三轴稳定航天器。但是,当航天器的部分执行机构出现故障,导致其控制力矩不再完整配置时,航天器即形成了欠驱动的情况。

本文即针对仅有两轴独立控制输入力矩的欠驱动刚性航天器,基于伪谱法设计实时最优控制器。由于欠驱动航天器具有二阶非完整的运动约束,使得其广义坐标的二阶变分非独立,因此对于欠驱动航天器而言某些形式的运动是不可行的,这也是针对欠驱动航天器设计姿态控制器的主要难点之所在。

本文针对这一问题提出了一种具有“二阶段”控制结构的算法,首先在理想条件下,根据控制目标的变化规划出满足相应约束条件的开环参考轨迹,同时优化期望的性能指标,并通过算法的设计保证所得参考轨迹能够达到航天器实际运行所需的精度要求。第 2 阶段,考虑航天器实际姿态控制过程中必然存在初始扰动等不利因素的情况,应用间接伪谱法并结合实时重规划策略,设计状态闭环的轨迹跟踪控制器。

综上,通过上述 2 个阶段控制算法的设计最终可以获得具有闭环形式的航天器实时最优姿态控制器。且该控制器不仅能够优化期望的性能指标,同时对航天器所受到的初始扰动等不利因素的影响具有良好的抑制作用。

1 问题描述

1.1 欠驱动航天器的数学模型

假设航天器本体坐标系 b 的 3 个坐标与其惯量主轴同向,在不考虑外加扰动的情况下,航天器的姿态动力学模型可以描述为

$$I \dot{\omega} = -[\omega^\times] I \omega + u \quad (1)$$

式中, $\omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ 是本体坐标系 b 相对于地心惯性坐标系 i 的旋转角速度在 b 中的分量; $u = [u_1, u_2, u_3]^T$ 是执行机构产生的独立控制输入力矩; $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ 为航天器的转动惯量矩阵,且 $I_i (i=1,2,3)$ 为主轴惯量; ω^\times 表示反对称斜方阵。不失一般性,令 b_3 轴为欠驱动轴,即 $u_3 = 0$,则欠驱动航天器的动力学模型为

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + u_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 + u_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \end{cases} \quad (2)$$

采用 3-2-1 旋转顺序的欧拉角姿态描述参数,则航天器的姿态运动学模型可写为

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \omega_1 + (\omega_2 \sin \phi + \omega_3 \cos \phi) \tan \theta \\ \dot{\theta} = \omega_2 \cos \phi - \omega_3 \sin \phi \\ \dot{\psi} = (\omega_2 \sin \phi + \omega_3 \cos \phi) \sec \theta \end{cases} \quad (3)$$

式中, ϕ, θ, ψ 分别为滚动角、俯仰角及偏航角。

由此,欠驱动航天器的状态变量可写为 $x = [\omega_1, \omega_2, \omega_3, \phi, \theta, \psi]^T \in \mathbf{R}^6$, $\phi, \psi \in [-\pi, \pi], \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 控制输入变量 $u = [u_1, u_2]^T \in \mathbf{R}^2$ 。

1.2 性能指标和约束条件

近年来,针对航天器快速机动问题的研究引起了国内外学者的广泛关注。这主要是由于在某些实际航天任务中,如军事侦察、星间通信、空间探测等,航天器机动所需的时间是一个重要的参考指标^[8]。因此,本文针对欠驱动刚性航天器设计了以 rest-to-rest 机动所需时间为目标函数的最优控制器。其目的是通过求取一组状态及控制输入变量 $\tau \rightarrow (x, u) \in X \times U$, 令欠驱动航天器从初始姿态

$$x(\tau_0) = x_0 \quad (4)$$

机动到期望的末端姿态

$$x(\tau_f) = x_f \quad (5)$$

并使得性能指标

$$J = \varphi[x(\tau_f), \tau_f] = \tau_f - \tau_0 \quad (6)$$

最小化。

2 开环姿态机动规划算法

2.1 初值估计

伪谱法作为一种直接数值优化算法具有较大的收敛域,而且对于不同的初始估计值具有一定的鲁棒性。尽管如此,在实际应用中为了提高算法的收敛速度,获得更好的搜索结果,仍然需要事先找到一组较好的初始估计值。本文采用如下的方法估计初值:首先,用较少节点的 Legendre 伪谱法求解原优化问题,其目的在于控制优化算法的初始化过程能够在较短的时间内完成。然后通过对所得最优解的插值计算可以获得更多期望节点对应的待优化变量的初值。由于伪谱法对连续函数逼近的精度较高,因此上述方法得到的估计初值可以满足相应的约束条件,是一个可行且次优的解。

2.2 算法应用

本节中 Legendre 伪谱法的主要作用是将连续的时间最优控制问题在 Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) 点处离散化,从而将该问题转化为一个非线性规划问题,并采用 Matlab 中的 fmincon 函数求解。关于 Legendre 伪谱法的基础理论以及开环姿态机动规划算法的详细信息请参考文献[12]。

在数值仿真过程中,假设航天器的初末端姿态为

$$x_0 = [0, 0, 0, 0, -\frac{\pi}{4}, 0]^T, x_f = [0, 0, 0, 0, 0, \frac{\pi}{6}]^T \quad (7)$$

转动惯量矩阵为

$$I = \text{diag}[55.3, 51.5, 41.8] \text{kg} \cdot \text{m}^2 \quad (8)$$

执行机构控制输出上限 $u_m = 1$, 选取 21 个 LGL 点,则全部优化过程耗时 24.696 s,性能指标最小值为 22.606 s。图 1(a)

和图 1(b)中分别绘制了 2 组曲线,其中虚线是直接优化轨迹,实线则是欠驱动航天器在时间最优控制输入 u_i^* ($i=1,2$) 作用下的实际运行轨迹。可以看出 2 组曲线几乎完全重合。

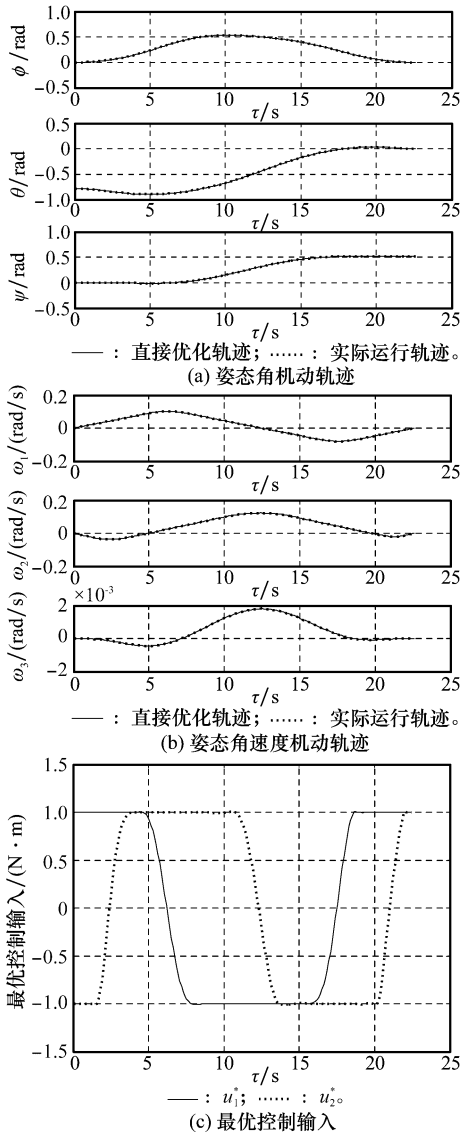


图 1 欠驱动航天器姿态机动轨迹及最优控制输入

2.3 最优解的可行性验证

对于任意的优化算法,其所得最优解的可行性是评价该算法性能的一个重要准则。可行性是指将优化所得的控制输入作用于航天器系统模型,通过数值积分方法(如 Runge-Kutta 法)应当可令航天器从已知的初始姿态运行到期望的末端姿态。对于本节提出的基于 Legendre 伪谱法的开环姿态机动规划算法,可行性的验证更为重要。因为只有当通过本节算法得出的参考轨迹可行,即满足相应的约束条件及全部任务要求时,后续闭环跟踪控制器的设计才有意义。采用 3 次样条拟合各 LGL 点间的控制输入变量,图 1 中实线所表征的是将拟合后的连续最优控制输

入代入航天器运动模型,通过 ODE45 函数积分该运动模型得到的相应的状态轨迹。图 2 则标明了该轨迹 x 和由 Legendre 伪谱法直接优化得到的状态轨迹 x^* 之间的误差绝对值轨迹,并同时标明了各 LGL 点的相应位置。

很明显,由本节算法得出的控制输入能够驱动欠驱动航天器以较小的误差(即 10^{-5} 数量级)运行到期望的末端姿态,因此算法是可行的。进一步也说明采用伪谱法近似系统的状态变量具有很高的逼近精度。

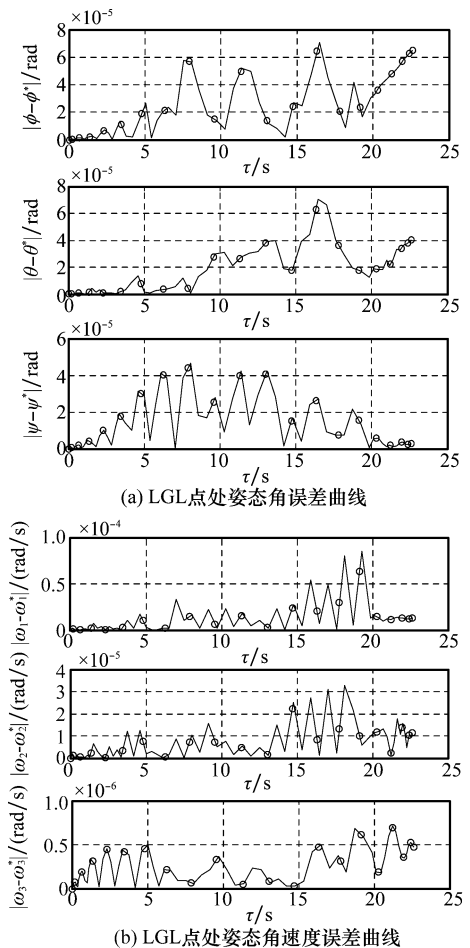


图 2 LGL 点处状态变量误差曲线

3 闭环轨迹跟踪控制算法

3.1 重规划策略

从上述仿真结果可以看出,由于伪谱法具有较高的计算精度,因此在理想条件下若航天器能够严格地按照优化所得的控制输入运行,则其实际运行轨迹将同样能够以极高的精度跟踪期望的参考轨迹。但是众所周知,航天器实际运行环境比较复杂,往往存在着大量的外界干扰及初始扰动。这些不利因素的存在必然会导致航天器在上述开环控制器作用下的实际运行轨迹偏离期望的参考轨迹,从而使得姿态控制器的性能大幅下降,同时令上述参考轨迹的优化过程失去意义。为了保证航天器能够准确地跟踪参考

轨迹,本节将基于实时重复规划的思想,针对上述参考轨迹设计闭环的轨迹跟踪控制器。

这里“实时”的含义是指,每次重规划算法的运行时间要严格地小于其所选取的采样周期,由此保证每次重规划的初始值均为上次优化所得的最终结果,从而实现状态的反馈。而本文所采用的重规划过程正是在满足上述实时条件的前提下,通过在线的重复开环规划设计具有闭环形式的轨迹跟踪控制器。首先,将系统的运动方程相对于参考轨迹线性化,从而得到以航天器实际运行轨迹与参考轨迹间的偏差量为变量的运动方程。其次,以偏差方程为对象设计时间最优姿态稳定控制器,从而将原有的相对于参考轨迹的闭环姿态跟踪问题转化为更为简单的闭环姿态稳定问题求解。由于开环参考轨迹是以时间 τ 为变量的,因而根据一阶最优性必要条件,偏差系统的最优姿态稳定控制

器设计将等价于求解一个时变的两点边值问题。本文在文献[14-16]的基础上,提出了基于间接 Legendre 伪谱法的实时重规划策略以求解上述时变两点边值问题。由此,克服了传统积分求解 Riccati 方程耗时过长且数值不稳定的缺点。同时,依赖伪谱法高精度的特点,可以保证所得解具有较高的运算精度。

欠驱动刚性航天器的运动模型,如式(2)和式(3)所示在参考轨迹 $\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*$ 上线性化,则有

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{A}(\tau)\Delta \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{B}(\tau)\Delta \mathbf{u}(\tau) \quad (9)$$

式中, $\Delta \mathbf{x}(\tau) = [\Delta \omega_1, \Delta \omega_2, \Delta \omega_3, \Delta \phi, \Delta \theta, \Delta \psi]^T$ 为状态变量 \mathbf{x} 的实际值与参考值 \mathbf{x}^* 之间的偏差; $\Delta \mathbf{u}(\tau) = [\Delta u_1, \Delta u_2]^T$ 是控制输入变量 \mathbf{u} 的修正量; $\mathbf{A}(\tau) \in \mathbf{R}^{6 \times 6}$ 是时变的状态矩阵; $\mathbf{B}(\tau) \in \mathbf{R}^{6 \times 2}$ 是时变的控制输入矩阵,且矩阵 $\mathbf{A}(\tau), \mathbf{B}(\tau)$ 的表达式分别为

$$\mathbf{A}(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{I_2 - I_3}{I_1}\right)\omega_3 & \left(\frac{I_2 - I_3}{I_1}\right)\omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{I_3 - I_1}{I_2}\right)\omega_3 & 0 & \left(\frac{I_3 - I_1}{I_2}\right)\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{I_1 - I_2}{I_3}\right)\omega_2 & \left(\frac{I_1 - I_2}{I_3}\right)\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta & \tan \theta (\omega_2 \cos \phi - \omega_3 \sin \phi) & \sec^2 \theta (\omega_2 \sin \phi + \omega_3 \cos \phi) & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & -\omega_2 \sin \phi - \omega_3 \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta & \sec \theta (\omega_2 \cos \phi - \omega_3 \sin \phi) & \sin \theta \sec^2 \theta (\omega_2 \sin \phi + \omega_3 \cos \phi) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\tau) = \begin{bmatrix} 1/I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (10)$$

式中,矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 是由系统原方程相对于参考轨迹线性化所得到的。

针对偏差方程式(9),基于间接 Legendre 伪谱法设计姿态稳定控制器的目标就是通过求解控制输入修正量 $\Delta \mathbf{u}(\tau)$ 以及状态偏差量 $\Delta \mathbf{x}(\tau)$,使得二次型性能指标最小。

$$J = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T(\tau_f) \mathbf{S} \Delta \mathbf{x}(\tau_f) +$$

$$\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_f} [\Delta \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x}(\tau) + \Delta \mathbf{u}^T(\tau) \mathbf{P} \Delta \mathbf{u}(\tau)] d\tau \quad (11)$$

式中, $\mathbf{S}, \mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{6 \times 6}$ 均为半正定矩阵; $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ 定义为正定矩阵,则相应的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2} [\Delta \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x}(\tau) + \Delta \mathbf{u}^T(\tau) \mathbf{P} \Delta \mathbf{u}(\tau)] + \lambda^T(\tau) [\mathbf{A}(\tau) \Delta \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{B}(\tau) \Delta \mathbf{u}(\tau)] \quad (12)$$

式中, $\lambda \in \mathbf{R}^{6 \times 1}$ 为协态向量。则相应的伴随方程及横截条件为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(\tau) = -\frac{\partial H}{\partial \Delta \mathbf{x}} = -[\mathbf{Q}(\tau) \Delta \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{A}^T(\tau) \lambda(\tau)] \\ \lambda(\tau_f) = \mathbf{S} \Delta \mathbf{x}(\tau_f) \end{cases} \quad (13)$$

又由 $\Delta \mathbf{u}^*$ 为最优控制的必要条件 $\partial H / \partial \Delta \mathbf{u}^* = \mathbf{0}$,有

$$\Delta \mathbf{u}^*(\tau) = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T(\tau) \lambda(\tau) \quad (14)$$

则最终的以时间 τ 为变量的两点边值问题应写为

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\tau) & -\mathbf{B}(\tau) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T(\tau) \\ -\mathbf{Q}(\tau) & -\mathbf{A}^T(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (15)$$

边值条件为

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}(\tau = 0) = \Delta \mathbf{x}(\tau_0) = \Delta \mathbf{x}_0 \\ \lambda(\tau = \tau_f) = \mathbf{S} \Delta \mathbf{x}(\tau_f) = \mathbf{S} \Delta \mathbf{x}_f \end{cases} \quad (16)$$

3.2 时变两点边值问题求解

通过上述分析能够看出,基于重规划思想实现偏差系统最优姿态稳定控制器闭环的前提条件是两点边值问题可以实时求解。而对于欠驱动航天器而言,由于其系统模型具有强非线性,导致传统的反向数值积分 Riccati 方程求解两点边值问题的过程往往要消耗大量的运行时间,同时占用星载计算机大量的内存。为了解决这一问题,本文将采用间接 Legendre 伪谱法求解两点边值问题。实际上,伪谱法最初的应用就是求解复杂的偏微分方程,通过采用适当

的全局正交多项式将两点边值问题在若干配点处离散化，从而将微分方程组转化为一组线性代数方程组求解。

根据 Legendre 伪谱法的应用条件，首先需要应用线性变换 $\tau = (1+t)\tau_f/2$ 将时间区间 $\tau \in [0, \tau_f]$ 映射到区间 $t \in [-1, 1]$ 上，则两点边值问题，可变换为

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \frac{\tau_f - \tau_0}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T(t) \\ -\mathbf{Q}(t) - \mathbf{A}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{x}(t=-1) = \Delta \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}(1) = \mathbf{S}\Delta \mathbf{x}(1) \quad (17)$$

在 LGL 点 $\tau_l (l=0, 1, 2, \dots, N)$ 上离散状态变量 $\Delta \mathbf{x}$ 及协态向量 $\boldsymbol{\lambda}$ ，则有

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x} \approx \Delta \mathbf{x}^N(t) := \sum_{l=0}^N \Delta \mathbf{x}(t_l) \phi_l(t) \\ \boldsymbol{\lambda} \approx \boldsymbol{\lambda}^N(t) := \sum_{l=0}^N \boldsymbol{\lambda}(t_l) \phi_l(t), t \in [-1, 1] \end{cases} \quad (18)$$

式中， $\phi_l(t)$ 为 N 阶拉格朗日插值基函数

$$\phi_l(t) = \frac{1}{N(N+1)L_N(t_l)} \cdot \frac{(t^2-1)L_N(t)}{t-t_l}, l = 0, 1, \dots, N \quad (19)$$

对式(18)求导，得到 $\Delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}$ 在 LGL 点 t_k 处的导数为

$$\begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{x}}(t_k) \approx \dot{\Delta \mathbf{x}}^N(t_k) := \sum_{l=0}^N \Delta \mathbf{x}(t_l) \dot{\phi}_l(t_k) = \sum_{l=0}^N D_{kl} \Delta \mathbf{x}(t_l) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t_k) \approx \dot{\boldsymbol{\lambda}}^N(t_k) := \sum_{l=0}^N \boldsymbol{\lambda}(t_l) \dot{\phi}_l(t_k) = \sum_{l=0}^N D_{kl} \boldsymbol{\lambda}(t_l) \end{cases} \quad (20)$$

$\mathbf{D} := (D_{kl})$ 为 $(N+1) \times (N+1)$ 阶矩阵，其各元素为

$$\mathbf{D} := (D_{kl}) := \begin{cases} \frac{L_N(t_k)}{L_N(t_l)} \cdot \frac{1}{t_k - t_l}, k \neq l \\ -\frac{N(N+1)}{4}, k = l = 0 \\ \frac{N(N+1)}{4}, k = l = N \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad (21)$$

进一步，两点边值问题在 LGL 点上离散化，则有

$$\begin{cases} \frac{2}{\tau_f - \tau_0} \sum_{l=0}^N D_{kl} \Delta \mathbf{x}(t_l) - [\mathbf{A}(t_k) \Delta \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{B}(t_k) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T(t_k) \boldsymbol{\lambda}(t_k)] = \mathbf{0} \\ \frac{2}{\tau_f - \tau_0} \sum_{l=0}^N D_{kl} \Delta \boldsymbol{\lambda}(t_l) + [\mathbf{Q} \Delta \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{A}^T(t_k) \Delta \boldsymbol{\lambda}(t_k)] = \mathbf{0} \\ k = 0, 1, \dots, N \end{cases} \quad (22)$$

令 $\mathbf{z} = [\Delta \mathbf{x}(t_0), \dots, \Delta \mathbf{x}(t_N), \boldsymbol{\lambda}(t_0), \dots, \boldsymbol{\lambda}(t_N)]^T$ 。进一步为了避免方程冗余，将式(22)中首尾的 $2n$ 个方程分别用边值条件 $\Delta \mathbf{x}(-1) = \Delta \mathbf{x}_0$ 和 $\boldsymbol{\lambda}(1) = \mathbf{S}\Delta \mathbf{x}(1)$ 代替。则式(22)写为紧凑的矩阵形式

$$\mathbf{Cz} = \mathbf{F} \quad (23)$$

式中

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{xx} & \mathbf{C}_{x\lambda} \\ \mathbf{C}_{\lambda x} & \mathbf{C}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{C}_{xx} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{11} - \mathbf{A}(t_1) & \mathbf{D}_{12} & \dots & \mathbf{D}_{1N} \\ \mathbf{D}_{20} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} - \mathbf{A}(t_2) & \dots & \mathbf{D}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_{N0} & \mathbf{D}_{N1} & \mathbf{D}_{N2} & \dots & \mathbf{D}_{NN} - \mathbf{A}(t_N) \end{bmatrix}_{n(N+1) \times n(N+1)} \quad (25)$$

$$\mathbf{C}_{x\lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}(t_1) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T(t_1) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}(t_2) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T(t_2) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B}(t_N) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T(t_N) \end{bmatrix}_{n(N+1) \times n(N+1)} \quad (26)$$

$$\mathbf{C}_{\lambda x} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{S} \end{bmatrix}_{n(N+1) \times n(N+1)} \quad (27)$$

$$\mathbf{C}_{\lambda\lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{00} + \mathbf{A}^T(t_0) & \mathbf{D}_{01} & \mathbf{D}_{02} & \dots & \mathbf{D}_{0N} \\ \mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{11} + \mathbf{A}^T(t_1) & \mathbf{D}_{12} & \dots & \mathbf{D}_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_{(N-1)0} & \mathbf{D}_{(N-1)1} & \dots & \mathbf{D}_{(N-1)(N-1)} + \mathbf{A}^T(t_{N-1}) & \mathbf{D}_{(N-1)N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} \end{bmatrix}_{n(N+1) \times n(N+1)} \quad (28)$$

$$F = [\Delta X_0, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]^T_{1 \times 2n(N+1)} \quad (29)$$

式中, \mathbf{I} 是 $n \times n$ 维单位矩阵; $\mathbf{0}$ 是 $n \times n$ 维零矩阵; $F_{ij} = [2D_{ij}/(t_f - t_0)]\mathbf{I}(i, j=0, 1, \dots, N)$; $\Delta X_0 = \Delta x_0 \mathbf{I}$ 。

从上述分析可以明显地看出, 在偏差系统最优姿态稳定控制器设计过程中推导出的两点边值问题, 最终可以完全转换为一组线性代数方程组求解。而且由于避免了数值积分的环节, 从而减少了每次优化过程所需的运行时间, 满足了优化过程的实时性, 并且能够保证每次优化所得的控制输入修正量具有解析的形式。

3.3 算法流程

上述基于重规划策略并采用间接 Legendre 伪谱法的欠驱动航天器轨迹跟踪控制算法的具体流程如下。

步骤 1 将欠驱动航天器系统模型沿参考轨迹 x^*, u^* 线性化, 并确定状态变量的初始偏差值 $\Delta x(\tau_0)$ 。

步骤 2 将区间 $\tau \in [\tau_i, \tau_f]$ 映射到区间 $t \in [-1, 1]$ 上, $i \in [0, M], M$ 表示重复规划总次数, 且 $\tau_0 = 0, \tau_M = \tau_f$ 。

步骤 3 选取适当的重规划采样周期。

步骤 4 综合实际跟踪精度及计算时间的要求, 确定 LGL 点个数 $(N+1)$, 按照式(23)所示形式将两点边值问题离散化。

步骤 5 求解式(23), 将所得解 z 中的后 $(N+1)$ 个分量 $[\lambda(t_0), \dots, \lambda(t_N)]^T$ 代入式(14), 得到控制输入修正量 Δu^* 。

步骤 6 将 $u = u^* + \Delta u^*$ 作用于式(2)和式(3), 得到欠驱动航天器的实际运行轨迹 x 。

步骤 7 令 $\Delta x^* = x - x^*$, 且 $i = i + 1$, 重复步骤 2~步骤 6, 直至 $i = M$ 为止。

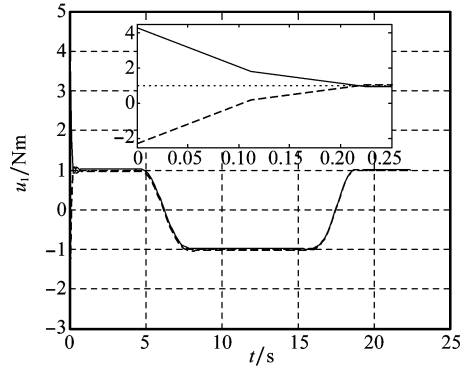
4 仿真结果及分析

保持已有仿真参数不变, 假设在 $\tau_0 = 0$ s 时刻欠驱动航天器的初始扰动范围分布为

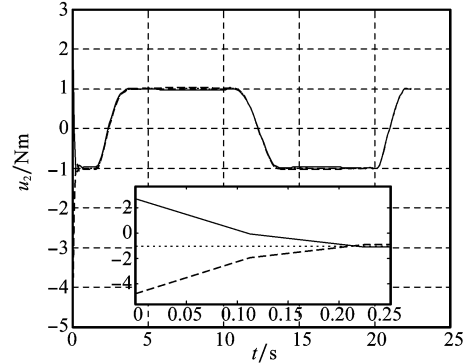
$$\begin{aligned} |\Delta \omega_1(0)| &< 0.01 \text{ rad/s}, |\Delta \omega_2(0)| < 0.01 \text{ rad/s} \\ |\Delta \omega_3(0)| &< 0.000 1 \text{ rad/s}, |\Delta \phi(0)| < 5^\circ \\ |\Delta \theta(0)| &< 5^\circ, |\Delta \psi(0)| < 5^\circ \end{aligned} \quad (30)$$

定义初始扰动在其上下限取值的情况分别为情况 1 及情况 2。同样选取 21 个 LGL 点, 并依据 Bryson 准则^[17]选取恰当的加权矩阵 $\mathbf{S}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}$, 重规划采样周期取为 0.1 s。

仿真结果如图 3 和图 4 所示。由图 3 可以看出航天器所受到的初始扰动仅在初始时刻一个较小的时间范围内对实际控制输入有影响, 而在闭环跟踪控制算法的作用下这种影响将逐步减弱, 并最终使得航天器的实际控制输入几乎与期望的参考控制输入重合。



(a) 情况1及情况2下闭环轨迹跟踪控制输入



.....: 情况1-闭环; —: 情况2-闭环; - - -: 参考值。
(b) 情况1及情况2下闭环轨迹跟踪控制输入

图 3 情况 1 及情况 2 下闭环轨迹跟踪控制输入

从式(14)可以看出, Δu^* 的大小与矩阵 \mathbf{P} 及欠驱动航天器主转动惯量的取值密切相关。因此, 尽管在上述重规划的过程中并未考虑欠驱动航天器执行机构输出饱和的约束, 但是若航天器主转动惯量的微小变化能够忽略不计, 则可通过适当地配置矩阵 \mathbf{P} 中的非零元素而实现调节 Δu^* 大小的目的, 从而始终保证 $u = u^* + \Delta u^*$ 在合理范围内取值。

图 4 描述了在情况 1 及情况 2 下, 欠驱动航天器在参考控制输入作用下的实际运行轨迹及在闭环轨迹跟踪控制器作用下的跟踪轨迹。图 5 则在图 4 的基础上进一步给出了各状态变量相对于自身参考轨迹(见图 1(a)和图 1(b))的跟踪误差。显然, 航天器在开环运行时稳定性较差, 较小的初始扰动即会令其实际运行轨迹呈现出发散的趋势。而在相同条件下, 本文所提出的跟踪控制算法由于存在状态的反馈, 因此能够有效地抑制初始扰动等不利因素的影响, 从而实现对参考轨迹的精确跟踪。

在式(30)所示范围内, 随机选取 200 组初始扰动取值 Δx 进行蒙特卡罗仿真, 以验证本节提出的闭环跟踪控制算法的性能, 结果如图 6 所示。可以看出本节提出的闭环跟踪算法对于较小的随机初始扰动具有良好的抑制作用, 且在一定范围内鲁棒性较好。

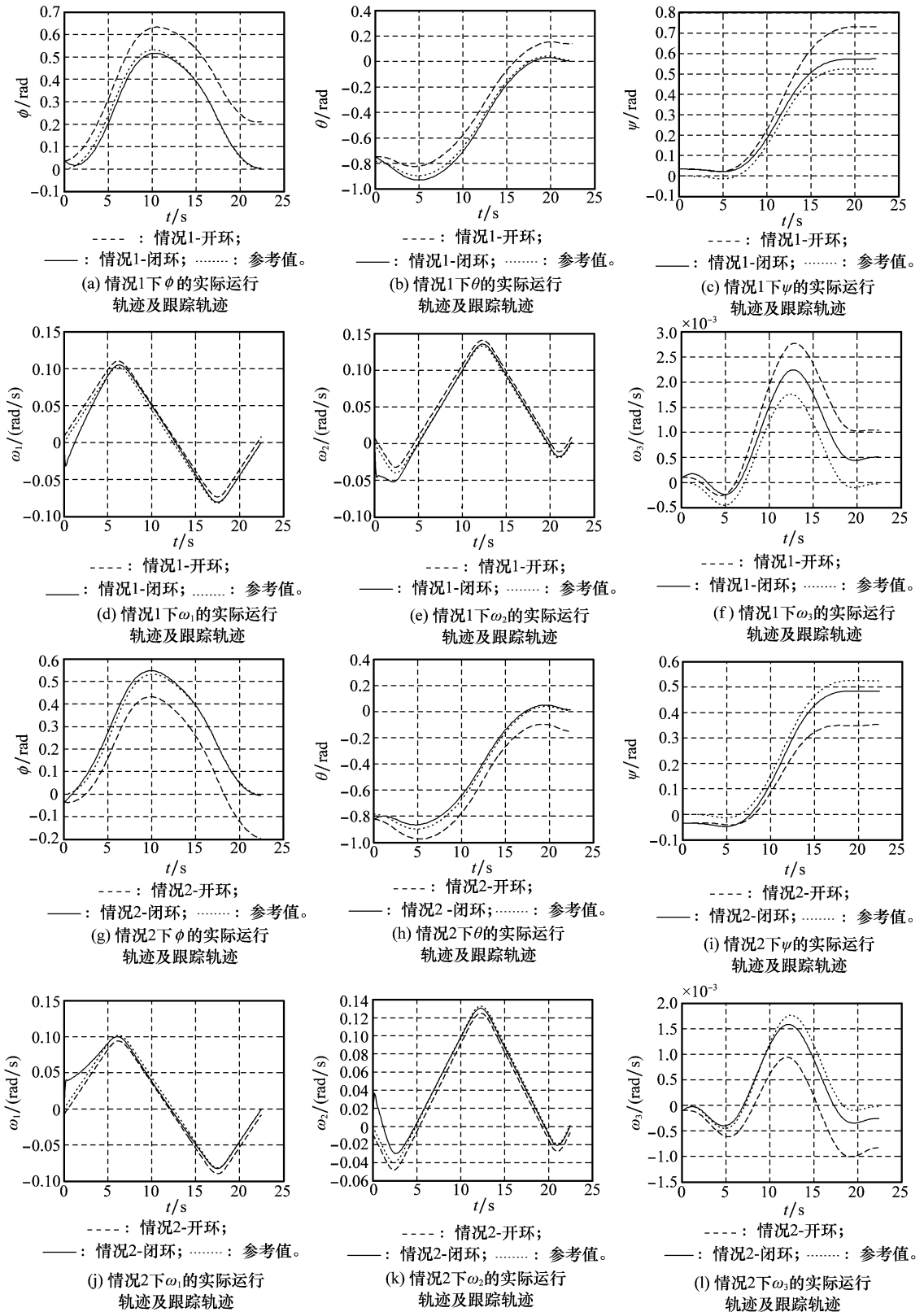


图 4 情况 1 及情况 2 下状态变量实际运行轨迹及跟踪轨迹

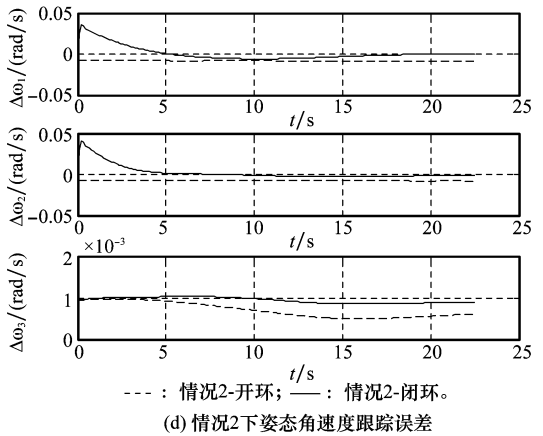
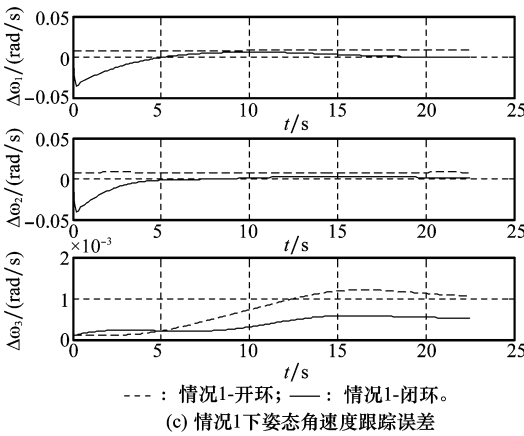
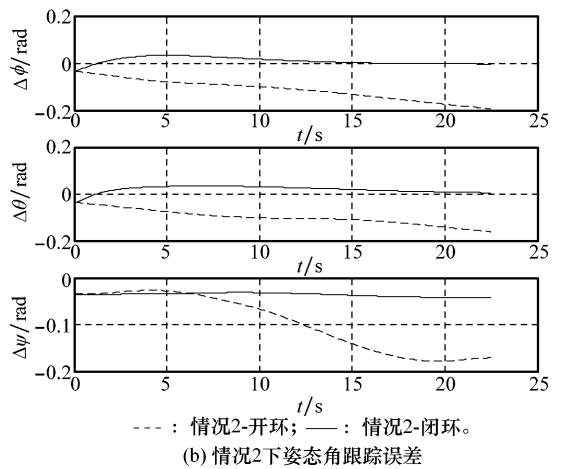
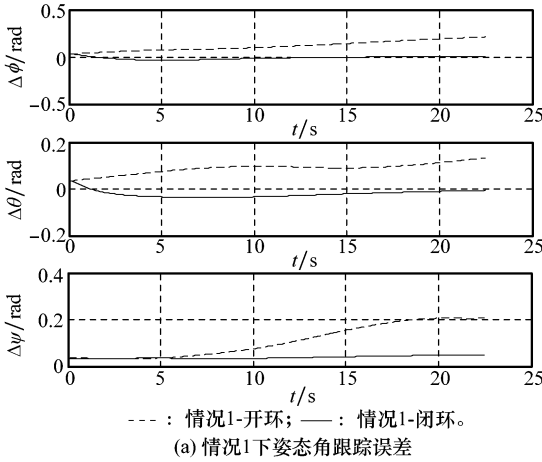


图 5 情况 1 及情况 2 下状态变量跟踪误差曲线

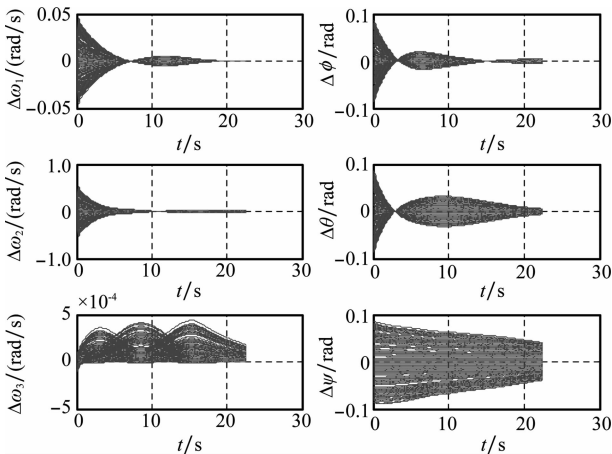


图 6 200 组蒙特卡罗仿真状态变量偏差曲线

5 结论

本文基于 Legendre 伪谱法针对欠驱动刚性航天器设计了实时最优控制器。首先应用直接 Legendre 伪谱法规划出开环的最优姿态机动轨迹,该轨迹满足各变量约束条件及相应的性能指标。其次将时变的开环轨迹作为参考轨迹,并以航天器实际运行轨迹与参考轨迹间的偏差为变量构造偏差

方程,将轨迹跟踪问题转化为最优姿态稳定问题求解,并基于实时重规划策略实现控制算法的闭环。仿真结果表明,本文提出的闭环跟踪控制算法对于抑制初值扰动具有明显的效果,而且鲁棒性较好。进一步,由于在重规划的过程中采用了间接 Legendre 伪谱法将由最小值原理得出的两点边值问题转化为线性代数方程组进行求解,避免了数值积分求解 Riccati 方程,因此大幅降低了运算量,提高了运算速度,满足实时求解的需求,并且所得解为解析形式,使得算法同时具有较高的运算精度。

参考文献:

[1] Shen H, Tsiotras P. Time-optimal control of axisymmetric rigid spacecraft using two controls[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1999, 22(5): 682 - 694.
 [2] Yang C C, Lai L C, Wu C J. Minimal energy maneuvering control of a rigid spacecraft with momentum transfer[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2007, 344(7): 991 - 1005.
 [3] Lai L C, Yang C C, Wu C J. Time-optimal maneuvering control of a rigid spacecraft[J]. *Acta Astronautica*, 2007, 60(10): 791 - 800.
 [4] Fleming A, Ross I M. Optimal control of spinning axisymmetric spacecraft: a pseudospectral approach[C]// *Proc. of the Ameri-*

- can Institute of Aeronautics and Astronautics, *Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, 2008; 1 - 10.
- [5] Sekhavat P, Fleming A, Ross I M. Time-optimal nonlinear feedback control for the NPSAT 1 spacecraft[C]// *Proc. of the IEEE/American Society of Mechanical Engineers International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, 2005; 843 - 850.
- [6] Yan H. Dynamics and real-time optimal control of satellite attitude and satellite formation systems[D]. Texas: Agricultural and Mechanical University, 2006.
- [7] Pontryagin L S, Boltyanskii V G, Gamkrelidze R V, et al. *The mathematical theory of optimal processes* [M]. New York: Gordon and Beach, 1986.
- [8] Betts J T. Survey of numerical methods for trajectory optimization[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1998, 21(2): 193 - 207.
- [9] Ross I M, Fahroo F. Issues in the real-time computation of optimal control [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2006, 43(6): 1172 - 1188.
- [10] Yan H, Ross I M, Alfriend K T. Pseudospectral feedback control for three-axis magnetic attitude stabilization in elliptic orbits[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2007, 30(4): 1107 - 1115.
- [11] Huang H B, Ma G F, Zhuang Y F. Optimal trajectory planning for reconfiguration of satellite formation with collision avoidance[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2010, 31(9): 1818 - 1823. (黄海滨, 马广富, 庄宇飞. 编队卫星队形重构防碰撞最优轨迹规划[J]. *航空学报*, 2010, 31(9): 1818 - 1823.)
- [12] Zhuang Y F, Ma G F, Huang H B. Time-optimal motion planning of an underactuated rigid spacecraft[J]. *Control and Decision*, 2010, 25(10): 1469 - 1473. (庄宇飞, 马广富, 黄海滨. 欠驱动刚性航天器时间最优轨迹规划设计[J]. *控制与决策*, 2010, 25(10): 1469 - 1473.)
- [13] Zhuang Y F, Ma G F, Huang H B, et al. Real-time trajectory optimization of an underactuated rigid spacecraft using differential flatness[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2012, 23(1): 132 - 139.
- [14] Lu P. Regulation about time-varying trajectories: precision entry guidance illustrated[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1999, 22(6): 784 - 790.
- [15] Yan H, Fahroo F, Ross I M. Optimal feedback control laws by Legendre pseudospectral approximations [C] // *Proc. of the American Control Conference*, 2001; 2388 - 2393.
- [16] Yan H, Fahroo F, Ross I M. Real-Time computation of neighboring optimal control laws[C]// *Proc. of the American Institute of Aeronautics and Astronautics, Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, 2002; 1 - 7.
- [17] Dukeman G A. Profile-following entry guidance using linear quadratic regulator theory[C]// *Proc. of the American Institute of Aeronautics and Astronautics, Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, 2002; 8 - 17.

作者简介:

庄宇飞(1981-),女,讲师,博士,主要研究方向为航天器姿态控制、最优控制。

E-mail:yufeizhuang9@gmail.com

黄海滨(1983-),男,讲师,博士,主要研究方向为轨迹规划、航天器编队控制。

E-mail:hbb83@sohu.com