

· 处理方法 ·

黏弹性层状多孔介质中 地震波传播方程的传递矩阵解法

李晓江 *

(燕山大学里仁学院, 河北秦皇岛 066004)

李晓江. 黏弹性层状多孔介质中地震波传播方程的传递矩阵解法. 石油地球物理勘探, 2008, 43(4): 410~414

摘要 基于 Biot 理论, 饱和多孔介质中波的传播是一个耦合问题。由于此模型的复杂性, 难以给出高效的数值解法。为此本文提出了地震波在层状饱和多孔黏弹性介质中传播的一种实用求解方法, 即在所研究的层状三维模型中, 对时间域用拉氏变换, 对空间域用傅氏变换, 将原问题变换为具有六个独立变量的常微分方程组, 每个变量只是深度坐标和一个水平坐标的函数, 进而得到关于每一层中波的传播问题的传递矩阵, 再用数值方法求出传递矩阵的特征值和特征向量。此算法的核心是首先求出在变换后的空间中的波场, 然后用 FFT 方法进行傅氏和拉氏反变换得到在时间域的波场。文中给出了算法的详细推导和数值算例。

关键词 地震波传播方程 黏弹性层状多孔介质 传递矩阵 固-流耦合模型 正演模拟 快速傅氏变换

1 引言

随着计算技术的进步和计算机运算速度的不断提高, 对地震勘探模型的要求也越来越高。从光波模型、声波模型到弹性波模型的发展就反映了这一变化过程。研究发现, 固体介质中的弹性波模型与实际介质地质模型还有差异。由于地下介质可近似认为由固体骨架和含流体孔隙构成, 因此提出了更符合实际情形的多孔介质流—固耦合模型。地震波在这种孔隙介质中的传播受到固体骨架和孔隙中流体的共同影响。固体骨架和孔隙中的流体分别满足不同的运动方程, 而这些方程又相互耦合。这种流—固耦合模型在边坡稳定、井眼稳定^[1]和油气开发^[2]等领域中都有应用。当然, 由于流—固耦合模型增加了未知变量的个数, 也使计算工作量增加了很多。特别是应用流—固耦合模型做反问题研究时, 计算量就更大。所以, 提高流—固耦合模型中地震波的计算效率是关键问题。

Biot 在 1956 年建立了多孔弹性介质波的传播理论^[3], 随后他又将该理论扩展到更一般性的黏弹性多孔介质情况^[4]。由于多孔介质在石油工程、地球物理、环境工程等领域的应用, 使得波在多孔介质

中的传播问题受到广泛重视, 因此有很多学者着力于这个问题的解析解^[5,6]和数值解^[7~9]研究。但由于模型的复杂性, 即使是几何形态上很规则的模型, 也不可像简单的弹性固体模型那样, 难以给出很高效的数值方法^[10]。本文就是根据地震勘探的实际需要, 提出了地震波在层状饱和多孔黏弹性介质中传播的一种实用求解方法。

通常, 采用层状几何模型能够给出实际地质问题的近似解。对于层状饱和多孔黏弹性介质中波的传播问题, 求出解析解也是很困难的, 因此寻求针对此类问题的高效数值解法显得十分必要。这里我们导出了针对层状饱和多孔黏弹性介质中波的传播的传递矩阵方法。与流行的有限元和有限差分法不同, 该传递矩阵方法充分考虑了多孔层状介质的特点, 极大地提高了计算效率。在求解过程中, 通过 FFT 快速算法完成正反傅氏或拉氏变换, 从而简化了复杂的黏弹性本构关系计算和时域内的繁杂计算。数值模拟结果也进一步说明了传递矩阵方法的可行性。

2 基本方程

对于层状饱和多孔黏弹性介质中波的传播问

* 河北省秦皇岛市海港区燕山大学里仁学院, 066004

本文于 2007 年 8 月 6 日收到, 修改稿于同年 12 月 13 日收到。

题,根据 Biot 理论^[4],其本构方程为

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \delta_{ij} \left(K - \frac{2}{3}\mu \right) \epsilon_{kk} - \delta_{ij}\alpha p \quad (1)$$

$$p = -\alpha Q\epsilon_{kk} + Q\zeta \quad (2)$$

式中: μ 是固体骨架的剪切模量; p 是饱和空隙压力; ϵ_{kk} 是体积应变; σ_{ij} 和 ϵ_{ij} 分别是应力向量和应变向量; $\alpha = 1 - K/K_s$,其中 K 和 K_s 分别是固体骨架和颗粒的体积模量; $1/Q = n/K_f + (\alpha - n)/K_s$,其中 K_f 是孔隙中流体的体积模量, n 是孔隙度; $\zeta = -\text{div } \mathbf{w}$, $\mathbf{w} = n(\mathbf{u} - \mathbf{U})$,其中 \mathbf{u} 和 \mathbf{U} 分别是固相和液相的位移向量。如果不考虑孔隙压力的耦合效应,对于一般的黏弹性材料,固体的本构方程为

$$\begin{cases} a_1(D)S_{ij} = a_2(D)\epsilon_{ij} \\ b_1(D)\sigma_{kk} = b_2(D)\epsilon_{kk} \end{cases} \quad (3)$$

式中: S_{ij} 和 ϵ_{ij} 分别为应力和应变的偏张量; σ_{kk} 是体积应力;对于黏弹性材料,系数 $a_1(D)$, $a_2(D)$, $b_1(D)$ 和 $b_2(D)$ 均为关于时间的微分算子,它们的表达式为

$$\begin{cases} a_1(D) = \sum_{k=0}^m a_{1k} \frac{\partial^k}{\partial t^k}, & a_2(D) = \sum_{k=0}^n a_{2k} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \\ b_1(D) = \sum_{k=0}^m b_{1k} \frac{\partial^k}{\partial t^k}, & b_2(D) = \sum_{k=0}^n b_{2k} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \end{cases} \quad (4)$$

其中: a_{1k} , a_{2k} , b_{1k} 和 b_{2k} 均为与材料有关的常数。对于线弹性材料,在式(4)中 $m = n = 0$,则表示应力和应变间呈线性比例关系。

定义拉氏变换为

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

式中 $f(t)$ 表示时间变量 t 的任意函数。对式(4)做拉氏变换,得到变换后空间中固体骨架的剪切模量 $\bar{\mu}$ 及固体骨架的体积模量 \bar{K} ,即

$$\begin{cases} \bar{\mu} = \frac{a_2(s)}{2a_1(s)} \\ \bar{K} = \frac{b_2(s)}{3b_1(s)} \end{cases} \quad (5)$$

式中: $a_1(s)$, $a_2(s)$, $b_1(s)$ 和 $b_2(s)$ 分别为 $a_1(D)$, $a_2(D)$, $b_1(D)$ 和 $b_2(D)$ 的拉氏变换。根据 Biot 理论,可得到下列本构方程

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2\bar{\mu}\bar{\epsilon}_{ij} + \delta_{ij} \left(\bar{K} - \frac{2}{3}\bar{\mu} \right) \bar{\epsilon}_{kk} - \delta_{ij}\bar{\alpha}\bar{p} \quad (6)$$

$$\bar{p} = -\bar{\alpha}\bar{Q}\bar{\epsilon}_{kk} + \bar{Q}\bar{\zeta} \quad (7)$$

其中

$$\bar{\alpha} = 1 - \delta\bar{K}, \quad \bar{Q} = \frac{1}{\gamma + \delta - \delta^2\bar{K}} \quad (8)$$

$$\delta = \frac{1 - \alpha}{K}, \quad \gamma = n(c - \delta) \quad (9)$$

式中: δ 是固体的压缩率; c 是流体的压缩率。对于固体骨架,其动力平衡方程可写为^[7]

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - \rho_f \dot{\mathbf{w}} = 0 \quad (10)$$

流体的动力平衡方程为

$$-\nabla p + \rho_f \mathbf{b} - \frac{\dot{\mathbf{w}}}{k} - \rho_f \ddot{\mathbf{u}} - \frac{\rho_f}{n} \dot{\mathbf{w}} = 0 \quad (11)$$

式中: k 是固体骨架的渗透率; ρ_f 和 ρ_s 分别为流体和固体的密度, $\rho = n\rho_f + (1 - n)\rho_s$; \mathbf{b} 是体力; $\boldsymbol{\sigma}$ 是固相的应力向量。

以上各方程的更详细解释可见参考文献[7]。图 1 是层状模型示意图。图中给出了坐标系的方向、岩石层数和所作用的外载荷分布。在 x 和 y 方向所考虑的是无穷大域。在 z 方向,深度取决于层数和每层的厚度。对于线源问题,即载荷沿某一直线分布的问题,由式(10)和式(11)的拉氏变换可得

$$\begin{cases} (\bar{\rho}u_x + \rho_f \bar{w}_x) s^2 = \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} \\ \rho_f s^2 \bar{u}_x + \left(\frac{\rho_f}{n} s^2 + \frac{s}{k} \right) \bar{w}_x = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ \rho_f s^2 \bar{u}_z + \left(\frac{\rho_f}{n} s^2 + \frac{s}{k} \right) \bar{w}_z = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \end{cases} \quad (12)$$

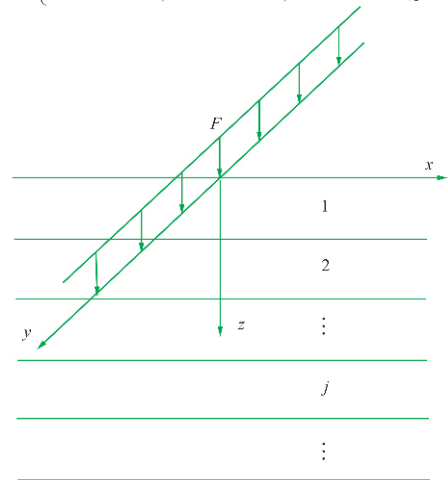


图 1 层状模型示意图

在式(12)中,为了简便,略去了体力 \mathbf{b} 。由式(6)和式(7)可得变换后的本构方程

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_z = 2\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} + \left(\bar{K} - \frac{2}{3}\bar{\mu} \right) \left(\frac{\partial \bar{\mu}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right) - \bar{\alpha} \bar{p} \\ \bar{\sigma}_x = 2\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \left(\bar{K} - \frac{2}{3}\bar{\mu} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right) - \bar{\alpha} \bar{p} \\ \bar{\tau}_{zx} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (13a)$$

$$\bar{p} = -\alpha Q \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right) - Q \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_z}{\partial z} \right) \quad (13b)$$

3 求解方法

从式(12)和式(13)中消去 σ_x 和 w_x , 得到

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} &= -\frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial x} + \rho_s^2 \bar{u}_z + \rho_t s^2 \bar{w}_z \\ \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} &= -\frac{\bar{K} - \frac{2}{3} \bar{\mu}}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} + \left[\frac{2\bar{\mu} \bar{\alpha}}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} - \frac{\rho_t s^2}{\frac{\rho_t s^2}{n} + \frac{s}{k}} \right] \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \\ &+ s^2 \left[\rho - \frac{\rho_t^2 s^2}{\frac{\rho_t s^2}{n} + \frac{s}{k}} \right] \bar{u}_x - \frac{4\bar{\mu} \left(\bar{K} + \frac{\bar{\mu}}{3} \right)}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} &= -\rho_t s^2 \bar{u}_z - \left(\frac{\rho_t s^2}{n} + \frac{s}{k} \right) \bar{w}_z \\ \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} &= \frac{1}{\bar{\mu}} \bar{\tau}_{zx} - \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} &= \frac{1}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} \left[\bar{\sigma}_z + \bar{\alpha} \bar{p} - \left(\bar{K} - \frac{2}{3} \bar{\mu} \right) \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial \bar{w}_z}{\partial z} &= -\frac{\bar{\alpha}}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} \bar{\sigma}_z - \left[\frac{1}{Q} + \frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} \right] \bar{p} + \\ &+ \frac{1}{\frac{\rho_t s^2}{n} + \frac{s}{k}} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} + \left[\frac{\rho_t s^2}{\frac{\rho_t s^2}{n} + \frac{s}{k}} - \frac{2\bar{\mu} \bar{\alpha}}{\lambda \bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} \right] \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \end{aligned} \right. \quad (14)$$

定义傅氏变换

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\xi & \rho_s^2 & \rho_t s^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\mu}} & -i\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_t s^2 & -\frac{\rho_t s^2}{n} - \frac{s}{k} \\ -\frac{\bar{K} - \frac{2}{3} \bar{\mu}}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} i\xi & \frac{4\bar{\mu} \left(\bar{K} + \frac{\bar{\mu}}{3} \right) \xi^2}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} + s^2 \left[\rho - \frac{\rho_t^2 s^2}{\frac{\rho_t s^2}{n} + \frac{s}{k}} \right] & \left[\frac{2\bar{\mu} \bar{\alpha}}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} - \frac{\rho_t s^2}{\frac{\rho_t s^2}{n} + \frac{s}{k}} \right] i\xi & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} & -\frac{\bar{K} - \frac{2}{3} \bar{\mu}}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} i\xi & \frac{\bar{\alpha}}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\bar{\alpha}}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} & \left[\frac{\rho_t s^2}{\frac{\rho_t s^2}{n} + \frac{s}{k}} - \frac{2\bar{\mu} \bar{\alpha}}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} \right] i\xi & \frac{-\xi^2}{\frac{\rho_t s^2}{n} + \frac{s}{k}} - \frac{1}{Q} - \frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x) e^{-i\xi x} dx$$

式中: $\hat{f}(x)$ 是 x 的任意函数。对式(14)做傅氏变换得

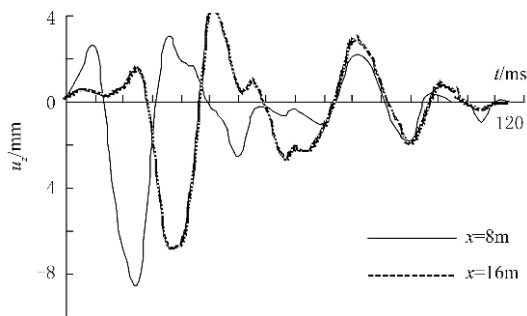
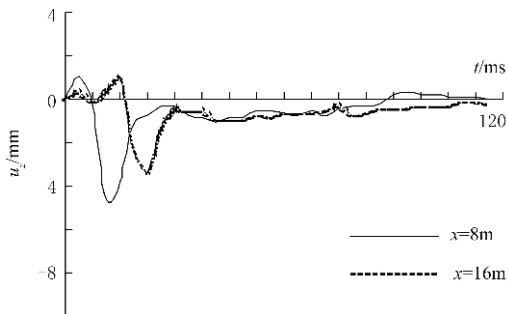
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \hat{\sigma}_z}{\partial z} &= -i\xi \hat{\tau}_{zx} + \rho_s^2 \hat{u}_z + \rho_t s^2 \hat{w}_z \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} &= -\rho_t s^2 \hat{u}_z - \left(\frac{\rho_t s^2}{n} + \frac{s}{k} \right) \hat{w}_z \\ \frac{\partial \hat{\tau}_{zx}}{\partial z} &= -\frac{\bar{K} - \frac{2}{3} \bar{\mu}}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} i\xi \hat{\sigma}_z + \left[\frac{2\bar{\mu} \bar{\alpha}}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} - \frac{\rho_t s^2}{\frac{\rho_t s^2}{n} + \frac{s}{k}} \right] i\xi \hat{p} + \\ &+ \left[s^2 \left[\rho - \frac{\rho_t^2 s^2}{\frac{\rho_t s^2}{n} + \frac{s}{k}} \right] + \frac{4\bar{\mu} \left(\bar{K} + \frac{\bar{\mu}}{3} \right)}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} \xi^2 \right] \hat{u}_x \\ \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial z} &= \frac{1}{\bar{\mu}} \hat{\tau}_{zx} - i\xi \hat{u}_z \\ \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial z} &= \frac{1}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} \left[\hat{\sigma}_z + \bar{\alpha} \hat{p} - \left(\bar{K} - \frac{2}{3} \bar{\mu} \right) i\xi \hat{u}_x \right] \\ \frac{\partial \hat{w}_z}{\partial z} &= \frac{\bar{\alpha}}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} \hat{\sigma}_z - \left[\frac{1}{Q} + \frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} + \frac{\xi^2}{\frac{\rho_t s^2}{n} + \frac{s}{k}} \right] \hat{p} + \left[\frac{\rho_t s^2}{\frac{\rho_t s^2}{n} + \frac{s}{k}} - \frac{2\bar{\mu} \bar{\alpha}}{\bar{K} + \frac{4}{3} \bar{\mu}} \right] i\xi \hat{u}_x \end{aligned} \right. \quad (15)$$

可将式(15)写成矩阵形式

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} = \mathbf{A} \mathbf{X} \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{X}^T = (\hat{\sigma}_z \quad \hat{u}_x \quad \hat{p} \quad \hat{\tau}_{zx} \quad \hat{u}_z \quad \hat{w}_z) \quad (17)$$

图4 算例2中弹性模型的 z 向位移图5 算例2中黏弹性模型的 z 向位移

波在层状饱和多孔黏弹性介质中的传播给予更多的关注还是很有意义的。

5 结论

本文推导出在层状饱和多孔黏弹性介质中耦合波传播的半解析解,分析了传递矩阵方法的有效性和精度,并做了数值模拟。

地下介质可用固体弹性模型、固体黏弹性模型、流—固耦合弹性模型和流—固耦合黏弹性模型等进行描述。随着所考虑因素的增加,模型与实际情形越来越接近,但求解时的计算工作量也越来越大。与有限元法和有限差分法相比,本文的传递矩阵法计算效率更高。特别是在层数较多时,随着层数增加,传递矩阵法所增加的工作量很少。这一点对薄层的精细计算尤为重要。对于上面提及各模型,本

文的传递矩阵法均适用,使用时只需改变参数 τ 的值。

本文只研究了线源问题,但本文方法很容易推广到点源问题,即单炮震源问题,它属于在层状介质中的球面波传播问题,需用 Hankel 变换替代本文的傅氏变换(另文论述)。这样变换后的式(15)将有所不同;但其他步骤基本相同,仍可用传递矩阵方法解决。

参考文献

- [1] Zhang W and Li X. Semi-analytic axisymmetric pressure distribution in a consolidating porous medium. *Transport in Porous Media*, 1997, 29:179~189
- [2] Zhang W and Li X. Optimum source frequency in vibration production technology. *Petroleum Science & Engineering*, 1998, 21(3):239~248
- [3] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in saturated porous solid, II, High-frequency range. *J Acoust Soc Am*, 1956, 28:179~191
- [4] Biot M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *J Appl Phys*, 1962, 33(4):1482~1498
- [5] Dai N, Vafidis A and Kanasevich E R. Wave propagation in heterogeneous, porous media: A velocity stress, finite-difference method. *Geophysics*, 1995, 60(2):327~340
- [6] Gajo A, Saetta A and Vitaliani R. Silent boundary conditions for wave propagation in saturated porous media. *Int J of Numer and anal methods in geomech*, 1996, 20:253~273
- [7] Zienkiewicz O C, Chang C T and Bettess P. Drained consolidating and dynamic behavior assumptions in soils. *Geotechnique*, 1980, 30(4):385~395
- [8] Prevost J H. Nonlinear transient phenomena in saturated porous media. *Comput methods in appl mech and eng*, 1982, 20:3~18
- [9] Prevost J H. Wave propagation in fluid-saturated porous media: An efficient finite element procedure. *Soil dynamics and earthquake engineering*, 1985, 4(4):
- [10] 李晓江, 张文飞. 三维波动方程的一维化有限元法. *石油地球物理勘探*, 1996, 31(1):21~27

(本文编辑:朱汉东)

《石油地球物理勘探》是您的挚友