

· 非地震 ·

2.5D 地质体重磁异常无解析 奇点正演计算研究

骆 遥*^{①②} 姚长利^① 薛典军^② 金玉洁^③

(^①地质过程与矿产资源国家重点实验室和地下信息探测技术与仪器教育部重点实验室(中国地质大学·北京),
北京 100083;^②中国国土资源航空物探遥感中心,北京 100083;^③中国矿业大学,北京 100083)

骆遥,姚长利,薛典军,金玉洁. 2.5D 地质体重磁异常无解析奇点正演计算研究. 石油地球物理勘探, 2009, 44(4): 487~493

摘要 本文明确指出现有文献中有关 2.5D 重磁异常正演模型在上半无源空间存在某些点的场值无法计算的解析“奇点”问题,长方体 ΔT 场及其梯度场正演计算理论表达式在上半无源空间存在场值无法计算的解析“奇点”问题仅是 2.5D 体的一种特例情况。通过详尽的理论推导,建立了 2.5D 体重磁异常在上半无源空间无解析“奇点”正演计算模型,并在此基础上导出了新的长方体 ΔT 场在上半无源空间无解析奇点理论表达式。上述建立的模型或表达式是普遍适用的,同现有模型或表达式相比,具有形式统一、正演计算快速的优点,一定程度上满足了正反演中快速计算的需求。对比计算表明,所建立的 2.5D 体重磁异常无解析“奇点”正演计算模型和新导出的 ΔT 场无解析“奇点”理论表达式是正确的。

关键词 2.5D 体 重磁异常 正演 解析“奇点” 长方体

1 引言

2.5D 体(即二度半体)是指沿走向截面位置、形状和物性参数不变的有限延伸地质体。限于三维地质体建模以及重磁场正、反演问题的复杂性^[1~5], 2.5D 体不仅可以模拟真实地质体用于地球物理重、磁资料处理及解释,而且可以将 2.5D 体模型方便地加载到地震剖面上进行重力、磁法和地震联合解释,以提高地球物理资料解释的可信度。基于 2.5D 体及 2.5D 组合体的重磁异常人机交互解释已比较普及^[6~11],并出现了 GM-SYS 等可视化功能很强的 2.5D 重磁场建模及正反演解释的人机交互系统。上述正反演及实用化系统的核心问题在于 2.5D 体的重、磁异常场的正演计算,在利用现有文献中的 2.5D 体的重、磁异常模型进行正演计算时,发现这些正演计算理论表达式均存在未曾被人发现或重视的在上半无源空间某些点的场值无法直接计算的解析“奇点”问题,因此深入分析和研究解析“奇点”产

生的原因或条件,并进一步找出相应的解决办法是非常必要的,具有理论和实际意义。

2 2.5D 重磁异常表达式及其“奇点”问题

二度半重磁异常正演模型由二度体重磁异常正演模型修改而得^[12~14],Rasmussen 等系统地建立了基于二度半多边形截面棱柱体重磁异常模型及正演理论表达式^[13],后来许多学者^[6~11]建立的正反演方法及人机交互系统都以此为基础,其使用的正演公式本质上具有相同的解析形式。下面对其加以说明,并对计算的“奇点”问题进行分析。

设 2.5D 体棱柱模型(图 1)的密度为 ρ ,磁化强度为 M ,参考现有教科书^[15],空间任一点 $p(\mathbf{r}_0)$ 引起的重力异常和磁力异常正演公式可以表示为重力异常

$$\Delta g_z(\mathbf{r}_0) = G\rho \sum_{i=1}^N \cos\varphi_i [I_i(Y_2 - y_0) - I_i(Y_1 - y_0)] \quad (1)$$

* 北京市海淀区学院路 29 号中国地质大学,100083

本文于 2008 年 10 月 29 日收到,修改稿于 2009 年 6 月 7 日收到。

本研究得到国家 863 计划项目(2007AA06Z134)、(2006AA06A201)、高等学校学科创新引智计划(B07011),长江学者和创新团队发展计划资助。

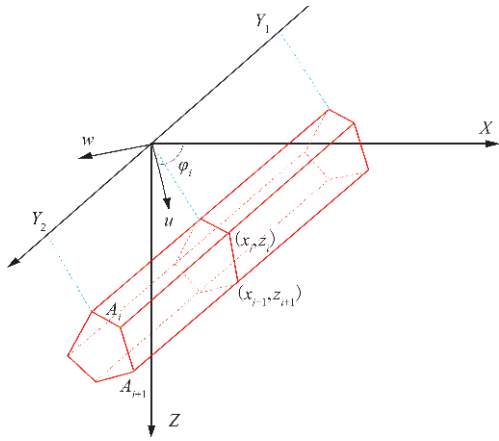


图1 2.5D水平多边形棱柱模型

其中

$$I_i(y) = y \ln \frac{u_{i+1} + R_{i+1}}{u_i + R_i} + u_{i+1} \ln(R_{i+1} + y) - u_i \ln(R_i + y) - w_i \left(\arctan \frac{u_{i+1}y}{w_i R_{i+1}} - \arctan \frac{u_i y}{w_i R_i} \right)$$

磁异常三分量

$$H_{ax}(\mathbf{r}_0) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \sin\varphi_i (M_x I_{1i} + M_y I_{2i} + M_z I_{3i}) \quad (2)$$

$$H_{ay}(\mathbf{r}_0) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left[(M_x \sin\varphi_i - M_z \cos\varphi_i) I_{2i} - M_y (\sin\varphi_i I_{1i} - \cos\varphi_i I_{3i}) \right] \quad (3)$$

$$Z_a(\mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \cos\varphi_i (M_x I_{1i} + M_y I_{2i} + M_z I_{3i}) \quad (4)$$

其中

$$I_{1i} = P_{1i}(Y_2 - y_0) - P_{1i}(Y_1 - y_0)$$

$$I_{2i} = P_{2i}(Y_2 - y_0) - P_{2i}(Y_1 - y_0)$$

$$I_{3i} = P_{3i}(Y_2 - y_0) - P_{3i}(Y_1 - y_0)$$

$$P_{1i}(y) = \cos\varphi_i \ln \frac{R_i + y}{R_{i+1} + y} - \sin\varphi_i \left(\arctan \frac{u_{i+1}y}{w_i R_{i+1}} - \arctan \frac{u_i y}{w_i R_i} \right)$$

$$P_{2i}(y) = \ln \frac{R_i + u_i}{R_{i+1} + u_{i+1}}$$

$$P_{3i}(y) = \sin\varphi_i \ln \frac{R_i + y}{R_{i+1} + y} + \cos\varphi_i \left(\arctan \frac{u_{i+1}y}{w_i R_{i+1}} - \arctan \frac{u_i y}{w_i R_i} \right)$$

总场磁异常

$$\Delta T(\mathbf{r}_0) = H_{ax}(\mathbf{r}_0) \cos I_0 \cos D_0 + H_{ay}(\mathbf{r}_0) \cos I_0 \times \sin D_0 + Z_a(\mathbf{r}_0) \sin I_0 \quad (5)$$

上述式中: G 为引力常数; M 为磁化强度; i 为棱柱体角点标号; N 为棱柱体的边数; I_0 、 D_0 分别为地磁场的倾角、偏角; I 、 D 为磁化强度方向的倾角、偏角; $u_i = x_i \cos\varphi_i + z_i \sin\varphi_i$, $u_{i+1} = x_{i+1} \cos\varphi_i + z_{i+1} \sin\varphi_i$; $w_i = -x_i \sin\varphi_i + z_i \cos\varphi_i$, $R_i = (u_i^2 + y^2 + w_i^2)^{1/2}$, $\varphi_i = \arctan \frac{z_{i+1} - z_i}{x_{i+1} - x_i}$; $M_x = M \cos I \cos D$, $M_y = M \cos I \sin D$, $M_z = M \sin I$ 。应注意上述所有 x_i 相当于 $x_i - x_0$, z_i 相当于 $z_i - z_0$ 。

实际正演计算时发现, 在上半无源空间(即 $z_0 < z_i$), 当 2.5D 棱柱端面与计算点共面且共线(如计算点位于 $A_i A_{i+1}$ 的延长线上)情况下, 表达式中均出现反正切项中分子和分母同时为零的情况, 在重力和磁力公式中有可能出现部分对数项为零的情况。例如: 当 $y = 0$, $\tan\varphi_i = \frac{z_i}{x_i}$ 时, $w_i = 0$, 反正切项 $\arctan \frac{u_i y}{w_i R_i}$, $\arctan \frac{u_{i+1} y}{w_i R_{i+1}}$ 中均会出现无法计算的分子和分母同时为零的情况。类似地, 在上述条件下, 若 $x_i < 0$, 则 $u_i < 0$ 有 $u_i + R_i = 0$ 会出现对数项 $\ln(u_i + R_i)$ 为零的情况。因此, 这些测点的场值成为正演表达式无法计算的解析“奇点”。在上述情况中, 对数项为零的可以通过对 φ_i 角度的另一种定义^[16] 来消除, 以保证对数项恒大于零, 进而消除对数项奇异的问题, 但是表达式中反正切项分子和分母同时为零的情况却是无法消除的。因此重新对 2.5D 地质体重磁异常模型的正演理论表达式进行推导, 建立新的 2.5D 地质体重磁异常模型的无解析“奇点”正演理论表达式是非常必要的。

3 无解析奇点理论表达式及其推导

3.1 2.5D 重力异常无解析奇点理论表达式

为了解决 2.5D 水平棱柱重力异常和磁力异常正演计算理论表达式的“奇点”问题, 我们重新对二度半地质模型产生的重、磁异常进行推导, 以期得到 2.5D 水平棱柱体在上半无源空间重、磁力场的无“奇点”的解析表达式。设 2.5D 棱柱模型的密度为 ρ , 则在空间任一点 $p(\mathbf{r})$ 引起的重力异常可以表示为

$$\Delta g_z(\mathbf{r}) = -G\rho \int_V \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV \quad (6)$$

根据高斯散度定理, 上述体积分(式(6))可以转化为

面积分

$$\begin{aligned} \Delta g_z(\mathbf{r}_0) &= -G\rho \int_S \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dS \\ &= -G\rho \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \int_{S_i} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dS \end{aligned} \quad (7)$$

式中: G 为万有引力参数; V 为 2.5D 水平棱柱的体积; S 为其外表面; ρ 为密度; $\hat{\mathbf{n}}$ 是侧面 S_i 的外法线方向的单位向量; $\hat{\mathbf{z}}$ 是 Z 轴方向的单位向量; S_i 是围成 2.5D 水平棱柱的一系列侧面; N 是其一系列侧面的个数。

根据式(7)可知, 2.5D 水平棱柱两端直立的端面对重力异常 Δg_z 没有任何贡献, 于是重力异常 Δg_z 的正演计算可以简化为对 2.5D 棱柱一系列倾斜(或水平)侧面的面积分 $\int_{S_i} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dS$ 的计算。该积分为第一类曲面积分, 其积分结果与计算中所采用的坐标系无关。为了便于求积, 我们将坐标沿 Y 轴顺时针旋转 φ_i , 使 2.5D 水平棱柱倾斜侧面 S_i 在旋转后的坐标系 $u-y-w$ 中处于水平(图 1), 于是有

$$\int_{S_i} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dS = \int_{Y_1 - y_0}^{Y_2 - y_0} dy \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{1}{(u^2 + y^2 + w_i^2)^{1/2}} du \quad (8)$$

其中

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$$

附录中给出了积分式(8)的详细推导过程。

2.5D 水平棱柱的重力异常可以表示为

$$\Delta g_z(\mathbf{r}_0) = G\rho \sum_{i=1}^N \cos\varphi_i [I_i(Y_2 - y_0) - I_i(Y_1 - y_0)] \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} I_i(y) &= y \ln \frac{u_{i+1} + R_{i+1}}{u_i + R_i} + u_{i+1} \ln(R_{i+1} + y) - \\ &u_i \ln(R_i + y) - 2w_i \left(\arctan \frac{w_i}{u_{i+1} + y + R_{i+1}} - \right. \\ &\left. \arctan \frac{w_i}{u_i + y + R_i} \right) \end{aligned}$$

以上各式中符号的意义如下: i 为棱柱体角点标号(顺时针排列); N 为棱柱体的边数; $u_i = (x_i - x_0)\cos\varphi_i + (z_i - z_0)\sin\varphi_i$, $u_{i+1} = (x_{i+1} - x_0)\cos\varphi_i + (z_{i+1} - z_0)\sin\varphi_i$; $w_i = -(x_i - x_0)\sin\varphi_i + (z_i - z_0)\cos\varphi_i$, $R_i = (u_i^2 + y^2 + w_i^2)^{1/2}$, $\sin\varphi_i = \frac{abs(z_{i+1} - z_i)}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}}$; $\cos\varphi_i = \text{sign}[(x_{i+1} -$

$$\begin{aligned} x_i)(z_{i+1} - z_i)] \times \frac{abs(x_{i+1} - x_i)}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}}, \\ \text{sign}(n) = \begin{cases} +1, n \geq 0 \\ -1, n < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

值得注意的是, 式(9)中 $\arctan \frac{y}{x} \in (-\pi, \pi]$ 已经转化成 $x + yi$ 对应的复角, 因此在实际编制程序计算 $\arctan \frac{y}{x}$ 时需使用 $\text{atan2}(y, x)$ 函数进行计算。

3.2 2.5D 磁异常无解析奇点理论表达式

类似地, 我们可以建立 2.5D 水平棱柱重力异常 Δg_x 的正演理论表达式

$$\Delta g_x(\mathbf{r}_0) = -G\rho \sum_i \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \int_{S_i} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dS \quad (10)$$

将 Δg_z 和 Δg_x 分别对观测点 $p(\mathbf{r}_0)$ 求偏导数, 可以得到 $\frac{\partial \Delta g_z}{\partial x_0}$ 、 $\frac{\partial \Delta g_z}{\partial y_0}$ 、 $\frac{\partial \Delta g_z}{\partial z_0}$ 和 $\frac{\partial \Delta g_x}{\partial x_0}$ 、 $\frac{\partial \Delta g_x}{\partial y_0}$ 、 $\frac{\partial \Delta g_x}{\partial z_0}$, 根据拉普拉斯方程 $\frac{\partial \Delta g_y}{\partial y_0} = -\left(\frac{\partial \Delta g_x}{\partial x_0} + \frac{\partial \Delta g_z}{\partial z_0}\right)$ 和引力位二阶

梯度张量的对称性 $\frac{\partial \Delta g_y}{\partial x_0} = \frac{\partial \Delta g_x}{\partial y_0}$ 、 $\frac{\partial \Delta g_y}{\partial z_0} = \frac{\partial \Delta g_z}{\partial y_0}$, 可以获得 2.5D 水平棱柱重力场的梯度张量。再根据重磁位泊松公式便可以得到 2.5D 水平棱柱磁力异常的理论表达式。上述推导的原理虽然简单, 但其求导过程却极其复杂和繁琐, 这里仅仅给出结果。 H_{ax} 、 H_{ay} 和 Z_a 三分量的表达形式与式(2)~式(4)仍旧相同, 所不同的是基函数, 下面列出了具有差异的 $P_{1i}(y)$ 、 $P_{3i}(y)$, 即

$$\begin{aligned} P_{1i}(y) &= \cos\varphi_i \ln \frac{R_i + y}{R_{i+1} + y} - 2\sin\varphi_i \times \\ &\left(\arctan \frac{w_i}{u_{i+1} + y + R_{i+1}} - \arctan \frac{w_i}{u_i + y + R_i} \right) \\ P_{3i}(y) &= \sin\varphi_i \ln \frac{R_i + y}{R_{i+1} + y} + 2\cos\varphi_i \times \\ &\left(\arctan \frac{w_i}{u_{i+1} + y + R_{i+1}} - \arctan \frac{w_i}{u_i + y + R_i} \right) \end{aligned}$$

总场磁异常仍可用式(5)表述。其余符号的意义与式(9)相同不再重复。同样, 上述磁异常表达式中 $\arctan \frac{y}{x}$ 仍转化为 $x + yi$ 对应的复角, 因此在实际编制程序计算 $\arctan \frac{y}{x}$ 时需使用 $\text{atan2}(y, x)$ 函数进行计算。

上述建立并推导的 2.5D 地质体重磁异常正演计算模型, 在上半无源空间(即 $z_0 < z_i$) 进行正演计

算时不存在前面介绍的解析“奇点”问题,以下进行简要的论证。2.5D地质体重磁异常存在的计算“奇点”均与2.5D体棱柱的端面共面且共线有关,例如当计算网格点位于 $A_i A_{i+1}$ 在上半无源空间的延长线时,则构成无法进行计算的解析“奇点”。考虑到这种情况,观测点 $p(r_0)$ 满足 $\cot\varphi_i = \frac{x_0 - x_i}{z_0 - z_i}$,且 $y_0 = Y_1$,重磁异常正演计算模型中有 $w_i = 0, y = 0$,且 $R_i = |u_i|$,有 $u_i + y + R_i = u_i + |u_i|$,又 $u_i = (x_i - x_0)\cos\varphi_i + (z_i - z_0)\sin\varphi_i$,于是有 $u_i = (z_i - z_0) \times \sin\varphi_i(\cot^2\varphi_i + 1)$ 。考虑到本文对 φ_i 的定义和上半无源空间的约束有 $(z_i - z_0)\sin\varphi_i > 0$ 成立,所以 $u_i > 0$ 且 $u_i + R_i > 0$ 。因此, $\arctan \frac{w_i}{u_i + y + R_i}$ 不存在分子分母同时为零和对数项 $\ln(R_i + u_i)$ 为零等“奇异”的情况,即本文提出的2.5D地质体重磁异常正演模型在上半无源空间不存在任何无法计算的解析“奇点”,是一种普遍适用的2.5D地质体重磁异常正演计算模型。

我国山区(山地、丘陵、高原等)约占国土面积的三分之二,大部分重磁测量工作都在起伏的观测面上进行,在高精度重磁测量、资料处理解释中消除观测面地形起伏所产生的影响具有重要的实际意义^[17]。通常做法是进行位场转换,将曲面(曲线)上的位场数据转化为平面上进行处理和解释即曲化平,但位场转换会损失部分场的原始信息、引入误差,起伏地形条件下直接进行重磁场的正反演、解释^[11, 18]更具实用价值。因此,对上述2.5D地质体重磁异常上半无源空间无解析“奇点”正演模型进行源外全空间扩展是具有实际意义的。考虑到2.5D地质体重磁异常上半无源空间无解析“奇点”正演模型中将原反正切项转化为对复角的计算,所以源外全空间的解析“奇点”仅仅存在于对数项中。本文提出的正演模型在计算源外全空间异常场值时仅需要对对数项进行考察,当对数项 $\ln(x)$ 中 $x=0$ 时,令对数项为零(极限求和情况),这样便将本文模型由源外的半空间扩展到全空间;考虑到正演模型在上半无源空间没有不能计算的解析“奇点”,所以在推广到源外全空间时本正演模型较Rasmussen等提出的正演模型^[13]其判断解析“奇点”和极限近似求解的运算量可减少1/2,能够有效减少计算机程序编制的复杂性,提高计算效率。

3.3 长方体 ΔT 场无解析奇点理论表达式

鉴于高精度重磁资料处理解释工作中三维反演日益受到重视,物性反演成为三维重磁反演中的主要形式。在重磁三维物性反演中,要将地质场源区域离散化成离散的长方体单元,磁性长方体磁场的正演计算是三维磁性反演中的基本问题。郭志宏等首次明确指出了现有长方体 ΔT 场及其梯度场理论表达式在上半无源空间存在某些测点场值无法计算的解析“奇点”问题,推导出了 ΔT 及其梯度场在上半无源空间无解析“奇点”的理论表达式^[19]。该长方体 ΔT 无解析“奇点”表达式与Bhattacharyya^[20, 21]给出的向下无限延伸直立四方棱柱体公式有相似之处,但同原有长方体磁场及其梯度正演公式^[22~24]相比形式上不统一,且其计算量有增加。在三维物性反演中需要进行大量的长方体模型正演计算,尽管有一些针对性的快速计算方法^[25, 26],但更为有效的措施还是直接改进长方体 ΔT 无解析奇点表达式的计算量。

长方体是一种特殊的2.5D体,上述2.5D地质体重磁异常解析“奇点”的问题同样存在于长方体模型中。根据前面指出的“奇点”存在条件,在图2所示的无源上半空间(即 $z < \zeta_1$)情况,当长方体顶面的四个顶点在计算平面上的垂直投影点与网格点重合时(即 $x = \xi, y = \eta$),这些网格点(图2)上原有长方体磁场正演公式的反正切项中均出现分母和分子同时为零的情况,因此这些网格点的场值成为正演表达式中无法计算的解析“奇点”。虽然长方体磁场垂直分量 Z_a 表达式不存在“奇点”问题,但是磁场水平分量 H_{ax}, H_{ay} 表达式以及由此建立的 ΔT 场及其梯度场 $\frac{\partial \Delta T}{\partial x}, \frac{\partial \Delta T}{\partial y}, \frac{\partial \Delta T}{\partial z}$ 表达式均存在上述无法计算

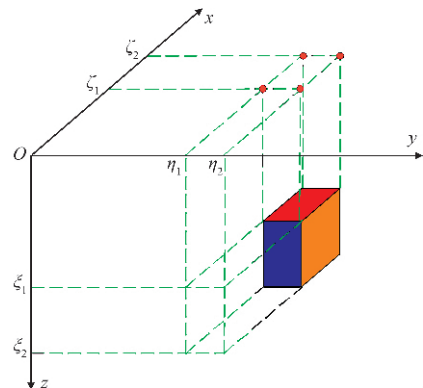


图2 磁性长方体及解析“奇点”示意图
长方体顶面四个顶点在计算平面上的垂直投影点为解析“奇点”

的解析“奇点”问题,这与郭志宏等^[19]得出的结论是一致的。因此,长方体 ΔT 场的解析“奇点”问题仅是原 2.5D 地质体重磁异常场中解析“奇点”情况的一种特例。

对于长方体情况,2.5D 地质体重磁异常模型的无解析“奇点”正演理论表达式有 $\varphi_i=0$ 或 $\varphi_i=\pi/2$, 于是可将 2.5D 体模型进行简化,得到新的长方体 ΔT 场无解析“奇点”理论表达式

$$\begin{aligned} &\Delta T(x, y, z) \\ &= \frac{\mu_0 J}{4\pi} \left[-K_1 \arctan \frac{\xi}{\eta + \zeta + R} - K_2 \arctan \frac{\eta}{\xi + \zeta + R} - \right. \\ &\quad K_3 \arctan \frac{\zeta}{\xi + \eta + R} + K_4 \ln(\xi + R) + \\ &\quad \left. K_5 \ln(\eta + R) + K_6 \ln(\zeta + R) \right] \begin{vmatrix} \xi_2 - x & \eta_2 - y & \xi_2 - z \\ \xi_1 - x & \eta_1 - y & \xi_1 - z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

式中: $K_1=2Ll$, $K_2=2Mm$, $K_3=2Nn$, $K_4=Nm+Mn$, $K_5=Nl+Ln$, $K_6=Ml+Lm$, l, m, n 及 L, M, N 分别为地磁场及总磁化强度的方向余弦; $R=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$; J 为长方体的总磁化强度; μ_0 为真空中的磁导率。

对 ΔT 表达式(11)分别求对 x, y, z 的偏导数,可以得到新的长方体 ΔT 场梯度的无解析“奇点”理论表达式,结果可以参照文献[27]。对比郭志宏等长方体磁场公式,式(11)不仅在上半无源空间不存在解析“奇点”问题,而且形式更为简单、整齐,具有更少的计算量。

4 模型检验

针对新提出的 2.5D 地质体重磁异常无解析“奇点”正演计算表达式,我们用长方体模型和一般的 2.5D 体组合模型进行计算检验。

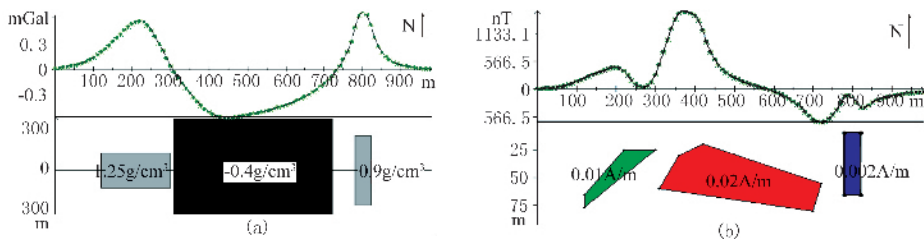


图 4 2.5D 地质体重磁异常无解析“奇点”模型正演结果与 GeoModel 比较

(a)重力异常的正演结果,2.5D 体组合模型以俯视图表示;(b)磁力异常的正演结果,2.5D 体组合模型以剖面图表示
图中 * 号表示 2.5D 地质体重磁异常无解析“奇点”模型正演结果,实线表示 GeoModel 正演计算结果

4.1 长方体模型

为了检验新无解析“奇点”长方体 ΔT 及其梯度理论表达式的正确性,对表达式(11)和原郭志宏等推导出的公式分别取相同的长方体模型^[19](模型顶面四个顶点在计算平面上的垂直投影点与计算的网格点重合)进行正演计算比较,图 3 给出了计算的倾斜磁化的长方体 ΔT 等值线图。模型正演计算表明两种公式正演计算的 ΔT 及梯度数据(精确到四位小数点的情况下)完全一致,这充分说明了推导出的长方体无解析“奇点” ΔT 表达式是正确的,同时也验证了 2.5D 地质体重磁异常无解析“奇点”正演计算模型在长方体特例情况下也是正确的。

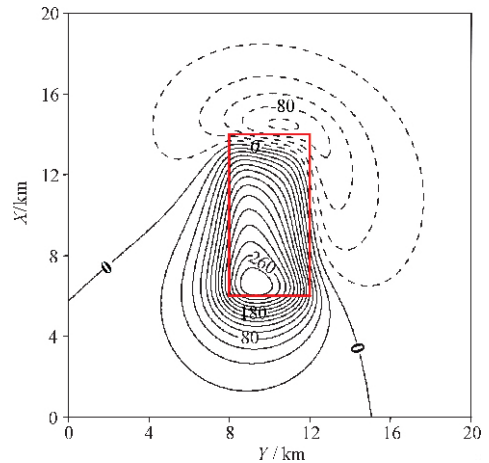


图 3 倾斜磁化长方体 ΔT 场等值线图

图中实线为正值,虚线为负值,矩形框是长方体在计算平面上的垂向投影位置,等值线间隔为 20nT

4.2 2.5D 体模型

为了验证其效果,对本文建立的 2.5D 地质体重磁异常无解析“奇点”正演模型进行了大量的建模检验。采用 GeoModel 软件随机建立 3 个 2.5D 体组合模型(图 4),并应用 GeoModel^[9]对其进行重磁异常的正演计算,同时应用本文提出的正演模型对上述 3 个 2.5D 体组合模型进行正演计算,并对两

套正演模式的计算结果(正演剖面横穿组合模型中心)进行比较。结果表明,本文 2.5D 地质体重磁异常无解析“奇点”正演模型的正演结果与 GeoModel 正演结果(分别精确到 0.01mGal 和 0.01nT)完全一致(图 4),充分说明建立的 2.5D 地质体重磁异常无解析“奇点”正演模型是正确的。

5 结论

(1) 现有文献中的 2.5D 体重力异常、磁力异常正演计算模型在上半无源空间存在场值无法计算的解析“奇点”,对某些特定的 2.5D 体模型无法获得完整的正演场数据。郭志宏等提出的长方体 ΔT 正演计算理论表达式在上半无源空间存在无法计算的解析“奇点”问题,仅是现有 2.5D 体重磁异常正演计算模型中的一种特例。

(2) 本文建立了一种 2.5D 体重磁异常无解析“奇点”正演计算模型,该 2.5D 体模型在上半无源空间不存在解析“奇点”问题,是一种更为普遍适用 2.5D 地质体的重磁场正演模型,计算中加入一定限制条件后能够将计算区域扩展到源外全空间。由于不存在判断“奇点”以及处理“奇点”处场值等一系列问题,计算效率将得到提高。

(3) 借助新建立的 2.5D 体重磁异常无解析“奇点”正演计算公式导出了新的长方体 ΔT 表达式,该表达式是上半无源空间无解析“奇点”的公式,较前人无解析“奇点”表达式更为简单和整齐,具有更少的计算量。

感谢南非 Witwatersrand 大学地球科学系 Gordon R. J. Cooper 教授为检验本文提出的正演计算模型所提供 2.5D 重磁场模拟、反演软件 GeoModel,以及在软件使用方面所给予的指导。

参考文献

- [1] Barnett C T. Theoretical modeling of the magnetic and gravitational fields of an arbitrarily shaped three-dimensional body. *Geophysics*, 1976, 41 (6): 1353~1364
- [2] Okabe M. Analytical expressions for gravity anomalies due to homogeneous polyhedral bodies and translations into magnetic anomalies. *Geophysics*, 1979, 44 (4): 730~741
- [3] 王邦华, 林盛表, 邓一谦. 均匀磁化多面体的磁场. *地球物理学报*, 1980, 23(4): 415~426
- [4] 何昌礼, 钟本善. 复杂形体的高精度重力异常正演方法. *物探化探计算技术*, 1988, 10(2): 121~128
- [5] 田黔宁, 吴文鹞, 管志宁. 任意形状重磁异常三度体人机联作反演. *物探化探计算技术*, 2001, 23(2): 125~129
- [6] 王懋基, 宋正范. 奇异值分解在二维半多边形体 ΔT 异常最优化反演中的应用. *物探与化探*, 1991, 15(1): 39~45
- [7] 黎益仕, 姚长利, 管志宁. 重磁资料的实时正演拟合. *物化探计算技术*, 1994, 16 (3): 192~196
- [8] 杨高印, 管志宁. 重磁异常的人机联作校正—迭代反演. *现代地质*, 1995, 9 (3): 372~381
- [9] Cooper G R J. Forward modeling of magnetic data. *Computers & Geosciences*, 1997, 23(10): 1125~1129
- [10] 姚长利, 黎益仕, 管志宁. 重磁异常正反演可视化实时方法技术改进. *现代地质*, 1998, 12(1): 115~122
- [11] 睦素文, 于长春, 姚长利. 起伏地形剖面重磁异常半智能处理解释软件及应. *物探与化探*, 2004, 28(1): 65~68
- [12] Shuey R T, Pasquale A. S. End corrections in magnetic profile interpretation. *Geophysics*, 1973, 38 (3): 507~512
- [13] Rasmussen R, Pedersen L B. End corrections in potential field modeling. *Geophysical Prospecting*, 1979, 27(4): 749~760
- [14] Cady J W. Calculation of gravity and magnetic anomalies of finite-length right polygonal prisms. *Geophysics*, 1980, 45(10): 1507~1512
- [15] 管志宁. 地磁场与地磁勘探. 北京: 地质出版社, 2005
- [16] 骆遥, 姚长利. 复杂形体重力场、梯度及磁场计算方法. *地球科学——中国地质大学学报*, 2007, 32(4): 517~522
- [17] 申宇华. 磁法勘探的科技进展. *物探与化探*, 1989, 13(5): 347~355
- [18] 安玉林. 起伏地形上规则二度体复重磁场正演和直接反演. *物探与化探*, 2003, 27(1~4): 33~38, 115~119, 206~211, 284~291
- [19] 郭志宏, 管志宁, 熊盛青. 长方体 ΔT 场及其梯度场无解析奇点理论表达式. *地球物理学报*, 2004, 47(6): 1131~1138
- [20] Bhattacharyya B K. Magnetic anomalies due to prism-shaped bodies with arbitrary polarization. *Geophysics*, 1964, 29(4): 517~531
- [21] Whitehill D E. Automated interpretation of magnetic anomalies using the vertical prism model. *Geophysics*, 1973, 38(6): 1070~1087
- [22] Goodacre A K. Some comments on the calculation of the gravitational and magnetic attraction of a homogeneous rectangular prism. *Geophysical Prospecting*, 1973, 21(1): 66~69
- [23] Plouff D. Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections. *Geophysics*, 1976, 41(4): 727~741
- [24] 地面磁测资料解释推断手册编写组. 地面磁测资料解释推断手册. 北京: 地质出版社, 1979
- [25] 侯遵泽. 一种重磁正演模型的快速计算方法. *物化探计算技术*, 1985, 7(2): 171~174
- [26] 姚长利, 郝天珧, 管志宁等. 重磁遗传算法三维反演

中高速计算及有效存储方法技术. 地球物理学报, 2003, 46 (2): 252~258

- [27] 骆遥, 姚长利. 长方体磁场及其梯度无解析奇点表达式理论研究. 石油地球物理勘探, 2007, 42 (6): 714~719

附录 A

$$\begin{aligned}
 I'(Y, i) &= \int_0^Y dy \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{1}{(u^2 + w_i^2 + y^2)^{1/2}} du \\
 &= \int_0^Y [\ln(u_{i+1} + (u_{i+1}^2 + w_i^2 + y^2)^{1/2}) - \ln(u_i + (u_i^2 + w_i^2 + y^2)^{1/2})] dy \\
 &= I'_{1a}(Y, i) - I'_{1b}(Y, i)
 \end{aligned}$$

其中

$$I'_{1a}(Y, i) = \int_0^Y \ln[u_{i+1} + (u_{i+1}^2 + w_i^2 + y^2)^{1/2}] dy$$

$$I'_{1b}(Y, i) = \int_0^Y \ln[u_i + (u_i^2 + w_i^2 + y^2)^{1/2}] dy$$

则

$$\begin{aligned}
 I'_a(Y, i) &= [y \ln(u_{i+1} + (u_{i+1}^2 + w_i^2 + y^2)^{1/2})] \Big|_0^Y - \int_0^Y \frac{y^2}{u_{i+1} + (u_{i+1}^2 + w_i^2 + y^2)^{1/2}} \frac{1}{(u_{i+1} + w_i^2 + y^2)^{1/2}} dy \\
 &= I'_{2a}(Y, i) - I'_{2b}(Y, i)
 \end{aligned}$$

其中

$$I'_{2a}(Y, i) = Y \ln[u_{i+1} + (u_{i+1}^2 + w_i^2 + Y^2)^{1/2}]$$

$$\begin{aligned}
 I'_{2b}(Y, i) &= \int_0^Y \frac{y^2}{u_{i+1} + (u_{i+1}^2 + w_i^2 + y^2)^{1/2}} \times \\
 &\frac{1}{(u_{i+1}^2 + w_i^2 + y^2)^{1/2}} dy
 \end{aligned}$$

令

$$(u_{i+1}^2 + w_i^2 + y^2)^{1/2} = p - y$$

则

$$y = \frac{p^2 - (u_{i+1}^2 + w_i^2)}{2p}$$

$$(u_{i+1}^2 + w_i^2 + y^2)^{1/2} = \frac{p^2 + (u_{i+1}^2 + w_i^2)}{2p}$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{p^2 + (u_{i+1}^2 + w_i^2)}{2p^2}$$

于是

$$\begin{aligned}
 I'_{ab}(Y, i) &= \int_{p(0)}^{p(Y)} \left(\frac{p^2 - 2u_{i+1}p + (u_{i+1}^2 + w_i^2)}{2p^2} - \frac{2w_i^2}{p^2 + 2u_{i+1}p + (u_{i+1}^2 + w_i^2)} \right) dp \\
 &= Y - u_{i+1} \ln(Y + R_{i+1}) - 2w_i \arctan \frac{u_{i+1} + Y + R_{i+1}}{w_i}
 \end{aligned}$$

其中

$$R_{i+1} = (u_{i+1}^2 + w_i^2 + X^2)^{1/2}$$

所以, 有

$$\begin{aligned}
 I'(Y, i) &= Y \ln \frac{u_{i+1} + R_{i+1}}{u_i + R_i} + u_{i+1} \ln(Y + R_{i+1}) - u_i \ln(Y + R_i) + 2w_i \left(\arctan \frac{u_{i+1} + Y + R_{i+1}}{w_i} - \arctan \frac{u_i + Y + R_i}{w_i} \right)
 \end{aligned}$$

其中

$$R_{i+1} = (u_{i+1}^2 + w_i^2 + Y^2)^{1/2}$$

$$R_i = (u_i^2 + w_i^2 + Y^2)^{1/2}$$

$$\arctan \frac{u_{i+1} + y + R_{i+1}}{w_i} \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\arctan \frac{u_i + y + R_i}{w_i} \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right)$$

根据三角函数和定积分的基本概念, 可将上述的 $I'(Y, i)$ 变换为

$$\begin{aligned}
 I'(Y, i) &= Y \ln \frac{u_{i+1} + R_{i+1}}{u_i + R_i} + u_{i+1} \ln(Y + R_{i+1}) - u_i \ln(Y + R_i) - 2w_i \left(\arctan \frac{w_i}{u_{i+1} + Y + R_{i+1}} - \arctan \frac{w_i}{u_i + Y + R_i} \right)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \arctan \frac{w_i}{u_{i+1} + Y + R_{i+1}} &= \text{Arg} \left[\hat{i} \cdot w_i + (u_{i+1} + Y + R_{i+1}) \right] \\
 &= \text{Arg} \left[\hat{i} \cdot w_i + (u_i + Y + R_i) \right]
 \end{aligned}$$

$\arctan \frac{w_i}{u_i + Y + R_{i+1}} = \text{Arg} \left[\hat{i} \cdot w_i + (u_i + Y + R_i) \right]$ 为复角形式。

(本文编辑: 冯杏芝)