

基于区间不确定分析方法的边坡稳定性分析*

于生飞^① 陈征宙^① 张明瑞^② 胡谢飞^① 王树州^①

(^①南京大学地球科学与工程学院 南京 210093)

(^②安徽省电力设计院 合肥 230601)

摘要 影响边坡稳定性的岩土参数大多具有随机性、模糊性和可变性等不确定性的特点,因此,需要引入不确定性分析模型进行分析。本文在综合分析岩土参数区间性的基础上,将区间分析模型应用于边坡的稳定性分析。通过引用区间数学的思想,运用区间极限平衡法推导出边坡最小安全系数区间,并在此基础上对边坡进行非概率可靠度分析。

关键词 区间分析方法 边坡 稳定性分析 可靠性分析

中图分类号:TU43 文献标识码:A

INTERVAL ANALYSIS MODEL OF GEOMATERIAL PARAMETERS FOR UNCERTAINTIES IN SLOPE STABILITY ASSESMENT

YU Shengfei^① CHEN Zhengzhou^① ZHANG Mingrui^② HU Xiefei^① WANG Shuzhou^①

(^①Department of Earth Science, Nanjing University, Nanjing 210093)

(^②Anhui Electric Power Design Institute, Hefei 230601)

Abstract This paper is based on a comprehensive analysis of geomaterials parameters. It introduces the interval analysis model for stability assesment of slopes. By referring interval mathematics idea, the interval limited equilibrium method is used to derive the interval minimum safety factor of slopes. Based on this foundation, the paper carries out the non-probabilistic reliability analysis of slope stabilities.

Key words Interval analysis method, Slope, Stability analysis, Reliability analysis

1 引言

在对边坡进行稳定性分析时,现有的安全系数定义是建立在确定性岩土参数的基础上的,即把稳定性分析过程中各种岩土参数作为一个确定的值来处理,目前已取得了相当多的研究成果^[1~4]。然而,影响边坡稳定性的岩土参数大多具有随机性、模糊性和可变性等不确定性的特点,导致在对岩土参数取值时,只能大概给出参数的一个变化范围。确定性的分析方法在面对实际工程提供的不确定性参数时,是难以进行分析的。因此,在对边坡进行稳定性

分析时,需要把岩土参数的所有取值都考虑进去,这样得出的结果才能更为全面地反映边坡的稳定性。

鉴于此,为了提高边坡工程的安全性要求,需要引入不确定性分析模型对此进行分析。

当前,针对边坡工程的不确定性分析,主要有3种方法:随机概率方法^[5]、模糊数学方法^[6]和区间分析方法^[7~9]。前2种方法是解决工程不确定性问题的常用方法,但是当缺乏足够的统计数据来定义参数的概率分布或隶属函数时,其计算结果可能会出现较大偏差。此时,区间分析方法就发挥了它独特的优越性。

本文在综合分析岩土参数区间性的基础上,将

* 收稿日期:2011-07-20;收到修改稿日期:2011-12-08.

第一作者简介:于生飞,从事边坡工程的研究. Email: shengfeiyu86@163.com

区间分析模型应用于边坡的稳定性分析。通过引用区间数学的思想,运用区间极限平衡法推导出边坡最小安全系数区间,并在此基础上对边坡进行非概率可靠度分析。

2 区间方法简介

实有界闭集 $X = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$ 称为区间, \underline{x}, \bar{x} 分别为区间的上端点和下端点,这样区间就可以看成是上下端点 \underline{x} 和 \bar{x} 组成的一对有序实数,称为区间数^[10]。对于任一区间 $X = [\underline{x}, \bar{x}]$, 其区间均值为 $x^c = (\bar{x} + \underline{x})/2$; 区间离差为 $x^r = (\bar{x} - \underline{x})/2$ 。则区间 X 可以表示为:

$$X = [\underline{x}, \bar{x}] = [x^c - x^r, x^c + x^r] \quad (1)$$

此外,区间 X 又可以表示为: $X = x^c + x^r \zeta$, 其中, $\zeta \in [-1, 1]$, 称为标准化区间。该区间的变异系数为:

$$\delta = x^r/x^c \quad (2)$$

此外,对于 2 个区间数分别为 $A = [\underline{a}, \bar{a}], B = [\underline{b}, \bar{b}]$ 其区间算数运算可采用以下 4 种算子:

$$\begin{cases} A + B = [\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}], \\ A - B = [\underline{a}, \bar{a}] - [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}], \\ A \cdot B = [\underline{a}, \bar{a}] \cdot [\underline{b}, \bar{b}] = [\min(\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}), \max(\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b})], \\ A/B = [\underline{a}, \bar{a}] / [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a}, \bar{a}] \cdot [1/\bar{b}, 1/\underline{b}], 0 \notin [\underline{b}, \bar{b}]. \end{cases} \quad (3)$$

区间矩阵的算术运算也是上述 4 种算子的组合。

3 区间极限平衡方法

区间极限平衡方法是在充分考虑传统的极限平衡计算公式中岩土体参数的区间性基础上推导出来的边坡稳定性分析的一种新方法。考虑边坡岩土体的重度 γ_i 、黏聚力 c_i 、内摩擦角 φ_i 均为区间数,则得到的边坡安全系数 F_s 也必然为区间数,其安全系数区间 F^l 推导公式如下。

3.1 瑞典条分法

瑞典条分法是条分法中最古老而又最简单的方法,它假定滑动面为圆柱面,剖面上即为一圆弧(图 1)。它将滑动体分成若干条块,并假定各条块为一刚性不变形体,不考虑条块两侧面上的作用力。

边坡稳定安全系数区间表达式为:

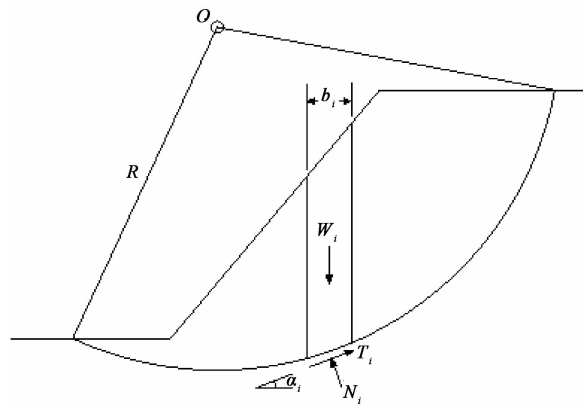


图 1 瑞典条分法受力分析图

Fig. 1 Sketch map of force analysis in Sweden slice method

$$F_s^l = \frac{\sum_1^n (c_i^l l_i + \gamma_i^l V_i \cos \alpha_i \tan \varphi_i^l)}{\sum_1^n \gamma_i^l V_i \sin \alpha_i} \quad (4)$$

式中, $F_s^l = [F_s^-, F_s^+]$, $\gamma_i^l = [\underline{\gamma}_i, \bar{\gamma}_i]$, $c_i^l = [c_i^-, c_i^+]$, $\varphi_i^l = [\varphi_i^-, \varphi_i^+]$, γ_i, c_i, φ_i 分别为第 i 条块的重度、黏聚力和内摩擦角; α_i 为第 i 条块底面中心的法线(过圆心)与过圆心 O 的铅直线间的夹角; l_i, V_i 分别为第 i 条块的弧长和体积。

由于边坡破坏的滑弧面既存在 $\alpha_i \geq 0$, 同时也存在 $\alpha_i < 0$ 的情况。因此在确定边坡安全系数区间上下限时,需要考虑 α_i 的正负情况。假设,当 $i = 1 \sim m$ 条块时, $\alpha_i < 0$; 当 $i = m \sim n$ 条块时, $\alpha_i \geq 0$, 则

$$\begin{cases} F_s^- = \frac{\sum_1^m (c_i^- l_i + \bar{\gamma}_i V_i \cos \alpha_i \tan \bar{\varphi}_i)}{\sum_1^m \bar{\gamma}_i V_i \sin \alpha_i} \\ \quad + \frac{\sum_m^n (c_i^+ l_i + \underline{\gamma}_i V_i \cos \alpha_i \tan \underline{\varphi}_i)}{\sum_m^n \bar{\gamma}_i V_i \sin \alpha_i} \\ F_s^+ = \frac{\sum_1^m (c_i^+ l_i + \underline{\gamma}_i V_i \cos \alpha_i \tan \underline{\varphi}_i)}{\sum_1^m \bar{\gamma}_i V_i \sin \alpha_i} \\ \quad + \frac{\sum_m^n (c_i^- l_i + \bar{\gamma}_i V_i \cos \alpha_i \tan \bar{\varphi}_i)}{\sum_m^n \underline{\gamma}_i V_i \sin \alpha_i} \end{cases} \quad (5)$$

由推导出来的公式(6)即可得到边坡安全系数的区间上下限。

3.2 简化 Bishop 条分法

不同于瑞典圆弧条分法,毕肖普法考虑了条块侧面力(图2),为了便于求解,引进其他的简化假定,即认为条块间只有水平作用力 P_i ,而不存在切向力 H_i ,于是采用简化的 Bishop 法,边坡的安全系数区间为:

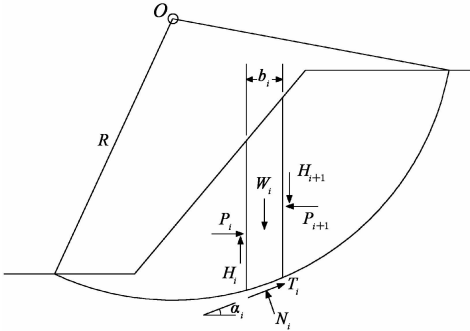


图2 简化 Bishop 法受力分析图

Fig. 2 Sketch map of force analysis in simplified Bishop method

$$\left\{ \begin{aligned} F_s^l &= \frac{\sum_1^n \frac{1}{m_{\theta i}^l} (c_i b_i + \gamma_i^l V_i \tan \varphi_i^l)}{\sum_1^n \gamma_i^l V_i \sin \alpha_i} \\ m_{\theta i}^l &= \cos \alpha_i + \frac{\sin \alpha_i \tan \varphi_i^l}{F_s^l} \end{aligned} \right. \quad (6)$$

式中, $F_s^l = [F_s^-, F_s^-]$, $\gamma_i^l = [\gamma_i^-, \gamma_i^-]$, $c_i^l = [c_i^-, c_i^-]$, $\varphi_i^l = [\varphi_i^-, \varphi_i^-]$, $m_{\theta i}^l = [m_{\theta i}^-, m_{\theta i}^-]$ 。 γ_i 、 c_i 、 φ_i 分别为第 i 条块的重度、黏聚力和内摩擦角; α_i 为第 i 条块底面中心的法线(过圆心)与过圆心 O 的铅直线间的夹角; l_i 、 V_i 分别为第 i 条块的弧长和体积。

同样,考虑 α_i 的正负情况,并且假设,当 $i = 1 \sim m$ 条块, $\alpha_i < 0$; 当 $i = m \sim n$ 条块 $\alpha_i \geq 0$, 则边坡的安全系数区间上下限可推导为:

$$\left\{ \begin{aligned} F_s^+ &= \frac{\sum_1^m (\bar{c}_i l_i + \bar{\gamma}_i V_i \cos \alpha_i \tan \bar{\varphi}_i) / \bar{m}_{\theta i}}{\sum_1^m \bar{\gamma}_i V_i \sin \alpha_i} \\ &+ \frac{\sum_m^n (c_i l_i + \gamma_i V_i \cos \alpha_i \tan \varphi_i) / \bar{m}_{\theta i}}{\sum_m^n \bar{\gamma}_i V_i \sin \alpha_i} \\ F_s^- &= \frac{\sum_1^m (c_i l_i + \gamma_i V_i \cos \alpha_i \tan \varphi_i) / \bar{m}_{\theta i}}{\sum_1^m \bar{\gamma}_i V_i \sin \alpha_i} \\ &+ \frac{\sum_m^n (\bar{c}_i l_i + \bar{\gamma}_i V_i \cos \alpha_i \tan \bar{\varphi}_i) / \bar{m}_{\theta i}}{\sum_m^n \bar{\gamma}_i V_i \sin \alpha_i} \end{aligned} \right. \quad (7)$$

其中,

$$\bar{m}_{\theta i} = \begin{cases} \cos \alpha_i + \frac{\sin \alpha_i \tan \varphi_i}{F_s^-} & (\alpha_i < 0) \\ \cos \alpha_i + \frac{\sin \alpha_i \tan \varphi_i}{F_s^+} & (\alpha_i \geq 0) \end{cases} \quad (8)$$

$$\bar{m}_{\theta i} = \begin{cases} \cos \alpha_i + \frac{\sin \alpha_i \tan \varphi_i}{F_s^+} & (\alpha_i \geq 0) \\ \cos \alpha_i + \frac{\sin \alpha_i \tan \varphi_i}{F_s^-} & (\alpha_i < 0) \end{cases} \quad (9)$$

对公式(7)~(9)进行迭代计算直至收敛后,即得出区间安全系数的上下限值。

4 区间扩张问题的讨论

从上述推导的结果上不难看出,在区间算术运算的基础上直接得出的最小安全系数区间上下限,其计算结果区间实际上超过了真实区间,是不准确的。

针对区间扩张问题^[11],现在还没有很好的方法去解决它。虽然 Rao^[9]提出了区间截断的方法。但是,区间截断准则不容易确定,使之截断参数对截断后的区间结果的影响比较大。

由于边坡最危险的滑面是由最不利的岩土参数组合导致的。因此,边坡安全系数区间上下限可以尝试通过参数区间组合法确定。本文通过岩土参数在各自的变化区间内进行大量的边坡稳定性组合计算发现:当重度取其区间上限 $\bar{\gamma}_i$,黏聚力和内摩擦角同时取其区间下限 φ_i^- 、 c_i^- 时,得到的安全系数最小;而当重度取其区间下限 γ_i ,黏聚力和内摩擦角同时取其区间上限 φ_i^+ 、 c_i^+ 时,得到的安全系数最大。

基于此,边坡稳定安全系数区间上下限可以简化为:

4.1 瑞典法

$$\left\{ \begin{aligned} F_s^+ &= \frac{\sum_1^n (c_i l_i + \gamma_i V_i \cos \alpha_i \tan \varphi_i)}{\sum_1^n \bar{\gamma}_i V_i \sin \alpha_i} \\ F_s^- &= \frac{\sum_1^n (\bar{c}_i l_i + \bar{\gamma}_i V_i \cos \alpha_i \tan \bar{\varphi}_i)}{\sum_1^n \bar{\gamma}_i V_i \sin \alpha_i} \end{aligned} \right. \quad (10)$$

4.2 简化的 Bishop 法

$$\begin{cases} \overline{F_s} = \frac{\sum_1^n (c_i \overline{l_i} + \overline{\gamma_i} V_i \cos \alpha_i \tan \overline{\varphi_i}) / \overline{m_{\theta i}}}{\sum_m^n \overline{\gamma_i} V_i \sin \alpha_i} \\ \underline{F_s} = \frac{\sum_1^n (c_i \underline{l_i} + \underline{\gamma_i} V_i \cos \alpha_i \tan \underline{\varphi_i}) / \underline{m_{\theta i}}}{\sum_m^n \underline{\gamma_i} V_i \sin \alpha_i} \end{cases} \quad (11)$$

其中,

$$\begin{cases} \overline{m_{\theta i}} = \cos \alpha_i + \frac{\sin \alpha_i \tan \overline{\varphi_i}}{\overline{F_s}} \\ \underline{m_{\theta i}} = \cos \alpha_i + \frac{\sin \alpha_i \tan \underline{\varphi_i}}{\underline{F_s}} \end{cases} \quad (12)$$

5 非概率可靠度分析

边坡最小安全系数区间可以较为正确的评价边坡的稳定状态,在此基础上,还可以用一种非概率的方法来判定边坡的可靠性。

边坡的可靠性状态受很多因素和变量的控制,如土体重度 γ 、黏聚力 c 、内摩擦角 φ 等,而且这些变量都具有区间性。那么,可以用这些区间变量来构造函数模型,以此用来描述边坡的可靠性状态:

$$M = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = F^I - 1 \quad (13)$$

式中, x 为岩土体参变量; F^I 为边坡稳定安全系数区间; 1 为边坡处于极限平衡状态时的安全系数值。

从上式很容易看出,非概率可靠性功能函数 M 的值是一个区间数, $M = [\underline{M}, \overline{M}]$ 。

由区间数学可知, $M = [M^c - M^r, M^c + M^r]$, M^c 、 M^r 分别为均值和离差。则定义无量纲 η 为:

$$\eta = \frac{M^c}{M^r} \quad (14)$$

由式(4)可知,当 $\eta > 1$ 时,则 $M^c - M^r > 0$,即对于 $\forall x_i \in [\underline{x_i}, \overline{x_i}]$ ($i = 1, 2, \dots, n$),均有 $M > 0$,边坡稳定性处于安全可靠状态;当 $\eta < -1$ 时,则 $M^c + M^r < 0$,即对于 $\forall x_i \in [\underline{x_i}, \overline{x_i}]$ ($i = 1, 2, \dots, n$),均有 $M < 0$,边坡稳定性处于破坏状态。当 $-1 \leq \eta \leq 1$ 时,则 $M^c - M^r \leq 0$ 且 $M^c + M^r \geq 0$,即对于 $\forall x_i \in [\underline{x_i}, \overline{x_i}]$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $M > 0$ 和 $M < 0$ 均有可能,边坡可能安全也可能不安全,但是,当边坡

的所有不确定参数都取其区间数时,可认为边坡只处于 2 种状态:可靠或者不可靠^[12],因此,从工程应用及区间意义上讲,此种情况下的边坡也是不可靠的。

从 η 的表达式可知,无量纲 η 的值越大,表明边坡的安全程度越高。所以,可用 η 作为边坡稳定性可靠度的度量。

通过公式(13)(14)边坡的非概率可靠度公式可以推导为:

$$\eta = \frac{M^c}{M^r} = \frac{F_s + \overline{F_s} - 2}{\overline{F_s} - \underline{F_s}} \quad (15)$$

式中, $\underline{F_s}$ 、 $\overline{F_s}$ 分别为边坡稳定安全系数区间 F^I 的上下限。

6 算例分析

选取某均质简单土坡作为算例,该土坡几何尺寸为:土坡高度 10m,坡度为 1:2 (图 3),。由现场勘测及室内外试验,在确定性分析时,其基准计算参数取值如下:重度 $\gamma = 20\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$,黏聚力 $c = 10\text{kPa}$,内摩擦角 $\varphi = 20^\circ$ 。区间分析时, γ 、 c 和 φ 均取区间数。

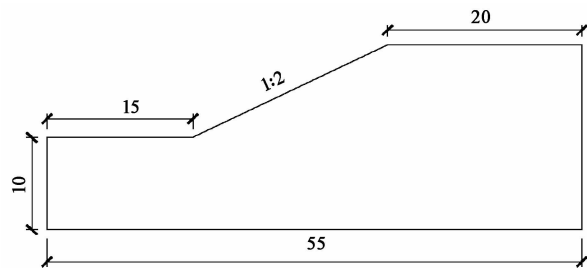


图 3 边坡几何尺寸(图中单位为 m)

Fig. 3 Geometry of the slope

考虑到边坡实际情况,令重度、黏聚力和内摩擦角在基准值的基础上取不同的变异系数, $\delta_\gamma = 0.02$, $\delta_c = 0.2$, $\delta_\varphi = 0.1$,即 $\gamma^I = [19.6, 20.4]$, $c^I = [8, 12]$, $\varphi^I = [18, 22]$ 。分别代入公式(10)(11)和(12)进行计算(图 4,表 1)。

通过非概率可靠性分析,计算求得此边坡的非概率可靠度(表 2)。

通过上述计算可以看出,相比确定性分析,区间分析方法得到的最小安全系数区间可以更好地反映边坡的稳定状态,由此得出的边坡非概率可靠度也

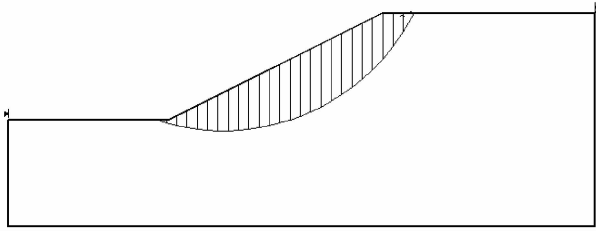


图4 边坡滑面条分图

Fig. 4 Slip noodles graph of the slope

表1 边坡最小安全系数计算结果

Table 1 the results of minimum safety factor of slope

区间分析		确定性分析
瑞典条分法	[1.116, 1.494]	1.303
简化 Bishop 条分法	[1.173, 1.575]	1.370

表2 η 的计算结果Table 2 the results of η calculated by each method

计算方法	非概率可靠度 η
瑞典条分法	1.614
简化 Bishop 条分法	1.861

更为清晰明了,结果表明,该算例边坡是稳定的。此外,与简化的 Bishop 法相比,通过瑞典法得出的可靠度 η 是保守的。

7 岩土参数变异性对边坡可靠度 η 的影响

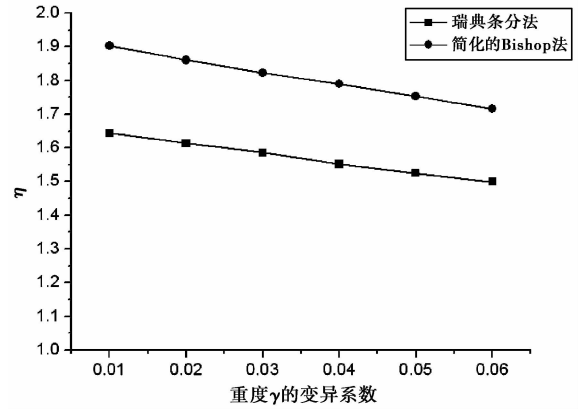
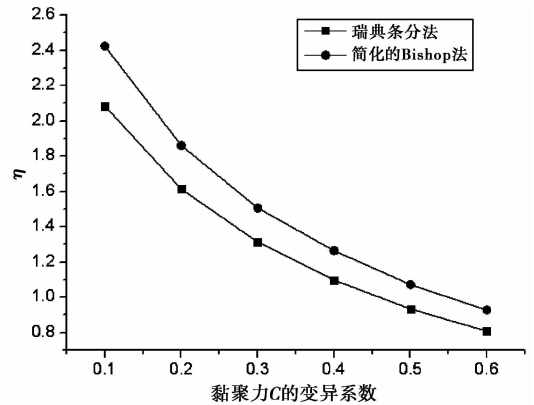
为进一步探讨岩土体参数变异性对边坡稳定的非概率可靠度 η 的影响规律,本文将结合算例讨论重度 γ 、黏聚力 c 和内摩擦角 φ 分别对边坡稳定非概率可靠度 η 的影响。在分析每个参数对可靠度 η 的影响时,假定其他参数取值区间不变。

7.1 重度 γ 的变异性对 η 的影响

图5为重度在不同的变异性大小下与 η 的关系曲线,当重度 γ 的变异性由0.01增加到0.06时,通过瑞典法得出的可靠度 η 从1.643减至1.500,而简化的 Bishop 法得到的 η 则从1.903减至1.717。这说明 γ 的变异性对边坡稳定可靠度 η 的具有一定不利的影响,但不是很明显。

7.2 黏聚力 c 的变异性对 η 的影响

图6为非概率可靠性指标 η 随着黏聚力 c 的变异性变化的情况,可以看出,当黏聚力 c 的变异性

图5 不同的变异性下重度与 η 的关系曲线Fig. 5 The relationship curve of different variability of specific weight and η 图6 黏聚力 c 的变异性与 η 的曲线Fig. 6 The curve of variability of cohesion (c) and reliability index (η)

数由0.1增加到0.6时,由瑞典法得出可靠度 η 从2.085下降到0.808,而简化的 Bishop 法得到的 η 则从2.417下降到0.928,减少量分别为1.277和1.489,这说明重度 c 的变异性越大对边坡稳定越不利,并且 c 的变异性对边坡稳定可靠度 η 的影响非常明显。

7.3 内摩擦角 φ 的变异性对 η 的影响

当内摩擦角 φ 的变异性由0.1增加到0.6时,通过瑞典法和简化的 Bishop 法,可靠度 η 分别从1.614减至0.503、从1.861减至0.578,这说明内摩擦角 φ 的变异性越大对边坡稳定越不利,并且 φ 的变异性对边坡稳定可靠度 η 的影响比较明显(图7)。

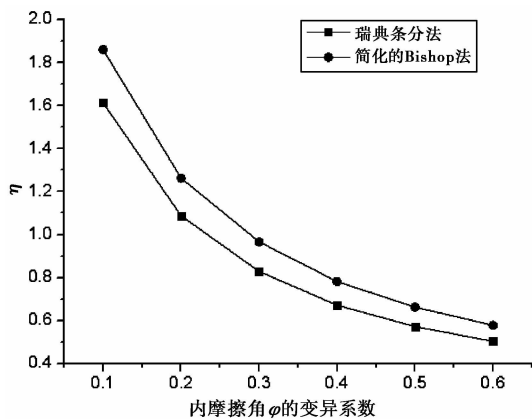


图7 内摩擦角 φ 的变异系数与 η 的曲线

Fig. 7 The curve of variability of internal friction angle (φ) and reliability index (η)

8 结 论

(1) 在现有极限平衡法的基础上, 引入区间数学的方法, 推导出边坡最小安全系数区间, 更能客观地反映实际边坡的稳定状态。

(2) 针对区间运算存在的区间扩张问题, 对区间安全系数公式进行简化, 使得区间求解结果更精确。

(3) 基于区间数学方法, 得出了边坡非概率可靠度, 为边坡可靠度分析提供了一种新方法。与传统的可靠度计算方法相比, 该方法能够在原始材料相对缺乏的情况下使分析结果量化, 更能清楚地得出边坡的可靠度数值。

(4) 参数变异性对可靠度 η 的影响分析结果表明: 黏聚力和内摩擦角的变异性对边坡稳定非概率可靠性指标 η 的影响非常明显, 并且随着它们的变异性愈大, 边坡的可靠度 η 愈低; 重度的变异性对 η 也有一定的不利影响但不是很明显, 在实际计算中不可忽略它的变异性而作为常量处理。

(5) 岩土参数的变异对边坡稳定的评价大多是不利的, 因此, 在实际工程中, 我们在选定岩土力学参数取值范围时, 要尽量选择较为精确的取值区间, 这对边坡的稳定评价非常重要。

参 考 文 献

[1] 黄昌乾, 丁恩宝. 边坡稳定性评价结果的表达与边坡稳定判据

[J]. 工程地质学报, 1997, **12**(4): 375 ~ 380.

Huang Changqian, Ding Enbao. Expression of results of slope stability evaluation and criteria for evaluation of slope stability. Journal of Engineering Geology, 1997, **12**(4): 375 ~ 380.

[2] 潘永坚. 某跨海大桥主塔位工程边坡稳定性研究[J]. 工程地质学报, 2004, **12**(4): 380 ~ 384.

Pan Yongjian. Slope stability of a main tower foundation of the sea-crossing bridge. Journal of Engineering Geology, 2004, **12**(4): 375 ~ 380.

[3] 刘利平, 姜德义, 郑硕才, 等. 边坡稳定性分析的最新进展[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2000, **5**(3): 115 ~ 118.

Liu Liping, Jiang Deyi, Zheng Shuocai, et al. The recent progress of the slope stability analysis methods. Journal of Chongqing University(Natural Science Edition), 2000, **5**(3): 115 ~ 118.

[4] 陈祖煜. 土质边坡稳定性分析[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2002.

Chen Zuyu. Stability Analysis on Soil Slope. Beijing: China Water Power Press, 2002.

[5] Cambou B. Application of first-order uncertainty analysis in the finite element method in linear elasticity. Proc. of 2nd Int. Conf. Applications of Statistics and Structural Engineering. Netherlands: Balkema, 1975, 67 ~ 87.

[6] Moens David, Vandepitte Dirk. Fuzzy finite element method for frequency response function analysis of uncertain structures. AIAA Journal, 2002, **40**(1): 126 ~ 136.

[7] Ben-Haim Y. A non-probabilistic concept of reliability. Structure Safety, 1994, **14**(4): 227 ~ 245.

[8] Elishakoff I. Essay on uncertainties in elastic and viscoelastic structures; from AM Freudenthal's criticisms to modern convex modeling. Computers & Structure, 1995, **56**(6): 871 ~ 895.

[9] Rao SS, Berke L. Analysis of uncertain structural systems using interval analysis. AIAA Journal, 1997, **35**(4): 727 ~ 735.

[10] 苏静波, 邵国建, 褚卫江. 基于区间的土体参数敏感性分析方法研究[J]. 应用数学与力学, 2008, **29**(12): 1502 ~ 1512.

Su Jingbo, Sao Guojian, Chu Weijiang. Pile sensitivity analysis method of soil parameters based on interval. Applied Mathematics and Mechanics, 2008, **29**(12): 1502 ~ 1512.

[11] 王德生, 张连生, 邓乃扬. 非线性方程的区间算法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1987.

Wang Desheng, Zhang Liansheng, Deng Naiyang. Interval Algorithm for Nonlinear Equations. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1987.

[12] 郭书祥, 吕震宙, 冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型[J]. 计算机力学学报, 2001, **18**(1): 56 ~ 60.

Guo Shuxiang, Lv Zhenzhou, Feng Yuansheng. A non-probabilistic model of structural reliability based on interval analysis. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2001, **18**(1): 56 ~ 60.