

基于收缩二叉树结构网格剖分的大地电磁 二维有限单元法正演研究

张志勇*^① 刘庆成^②

(^①中南大学地球科学与信息物理学院,湖南长沙 410083; ^②东华理工大学核资源与环境教育部重点实验室,江西南昌 330013)

张志勇,刘庆成.基于收缩二叉树结构网格剖分的大地电磁二维有限单元法正演研究.石油地球物理勘探,2013,48(3):482~487

摘要 在大地电磁的正演计算中,通常采用不断增加垂向步长以减少垂向剖分节点数,以提高计算效率。本文针对规则网格剖分无法实现随深度增加横向变步长剖分的实际情况,提出了一种基于二叉树结构的收缩网格剖分算法。该算法利用二叉树结构在实现四边形剖分的基础上,通过四边形三角形化实现三角剖分;利用对边的访问实现快速的双二次插值;利用带二次插值节点的三角形再剖分实现网格细化,同时引入缓冲层解决二叉树收缩过快问题。试算结果表明,采用这种收缩结构的二维大地电磁正演精度与规则剖分下的计算精度相当,同时大大减少了节点数,提高了计算效率。

关键词 二叉树 有限单元法 大地电磁 数值模拟

中图分类号:P631 **文献标识码**:A

1 引言

自 Coggon^[1]将有限单元法引入地球物理邻域起,有限单元法在地球物理电磁场计算问题中得到了广泛应用。有限单元法计算包括四个主要环节:①建立研究问题的数学物理方程与边界条件;②对计算模型进行离散;③依据边值问题满足的泛函,通过选择离散单元上的插值函数,形成刚度矩阵;④对稀疏线性系统进行求解,得到边值问题的解。其中②与④是公认的影响计算速度的主要环节,而区域剖分不仅关系到对地质单元、地形的逼近程度,还关系到形成刚度矩阵的规模与非零元素分布,直接影响线性方程组求解速度。

对于二维问题,有限单元的离散单元常采用四边形、三角形两种形式。四边形单元剖分简单易行,三角形单元比四边形单元有更好的拟合复杂地形与地质单元的能力。在大地电磁二维正演模拟的早期研究中,为了更好拟合地形,陈乐寿^[2]采用了矩形网格与三角形单元结合的剖分方法;Wannamaker

等^[3]采用了对四边形单元进行二次剖分为三角形的方案;为提高计算精度,史明娟等^[4]和徐世浙^[5]采用了二次插值四边形网格;刘云等^[6]利用等参单元变换,采用四边形网格实现了带地形的正演问题;陈小斌等^[7]研究了采用交叉对称三角形网格剖分的有限单元直接迭代方法。从网格的生成算法上看,上述研究均采用了较直接的网格生成算法,生成网格规则,易于对节点进行编号与访问,也有人称这类网格为结构化网格。结构化网格的不足在于对地质单元的拟合程度不高,且对计算区域外的扩展区域剖分单元数量较多,影响计算速度。为了克服结构化网格的不足,Key等^[8]采用非结构化的自适应剖分算法进行海洋大地电磁的正演;Li等^[9]利用非结构化网格进行了各向异性问题的二维大地电磁正演。非结构化网格剖分算法,有利于对地质单元与地形的拟合,且最大可能的保证剖分单元的质量、减少扩展区域单元数量,但生成算法复杂、往往采用迭代方法,计算速度较慢。

本文研究了一种基于二叉树的收缩网格剖分算法,其特点表现在如下几个方面:结构化网格生成速

* 江西省抚州市学府路56号东华理工大学核工程技术学院,344000。Email: zhyzhang78@hotmail.com

本文于2012年5月24日收到,最终修改稿于2013年4月4日收到。

度快、节点编号与访问容易;又具有非结构化网格,可减少扩展区域单元数量;同时采用三角单元剖分有利于对地质单元与地形的拟合。本文应用该剖分方案对二维大地电磁问题进行了正演计算,计算结果表明剖分方案在保证计算精度条件下提高了计算速度。

2 二维大地电磁场有限单元数值模拟基本原理

二维条件下,取地质体走向为 z 轴,大地电磁问题满足偏微分方程^[5]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) + (\sigma - i\omega\epsilon) E_z = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) + i\omega\mu H_z = 0 \quad (2)$$

式中: μ 是介质的磁导率; ϵ 是介电常数; σ 是电导率; ω 为角频率。式(1)代表 E 型波,也称 TE 模式,式(2)代表 H 型波,也称 TM 模式。

对于 E 型波,取 $u = E_z$, $\tau = \frac{1}{i\omega\mu}$, $\lambda = \sigma - i\omega\epsilon$;

对于 H 型波,取 $u = H_z$, $\tau = \frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon}$, $\lambda = i\omega\mu$ 。

式(1)、式(2)满足如下统一形式的变分^[5]

$$F(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 - \frac{1}{2} \lambda u^2 \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{bottom}}} \frac{1}{2} \tau k u^2 d\Gamma \quad (3a)$$

$$u \Big|_{\Gamma_{\text{top}}} = 1 \quad (3b)$$

$$\delta F(u) = 0 \quad (3c)$$

其中: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y$; Ω 为研究区域; Γ_{top} 为研究区域上边界, E 型波取空气边界、H 型波取地表边界; Γ_{bottom} 为研究区域底边界。

根据有限单元剖分结果,泛函式(3a)可表示为离散形式

$$F(u) = \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 de + \sum_{\Omega} \int_e -\frac{1}{2} \lambda u^2 de + \sum_{\text{bottom}} \int_l \frac{1}{2} \tau k u^2 dl = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left(\sum_{\Omega} \mathbf{K}_{1e} - \sum_{\Omega} \mathbf{K}_{2e} + \sum_{\text{bottom}} \mathbf{K}_{3e} \right) \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (4)$$

根据变分式(式(3c)),得到有限单元计算方程组

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = 0$$

将边界条件式(式(3b))代入式(5)求解,即可得到节点的场值。

2 基于二叉树(Bi-Tree)的收缩网格剖分方案

鉴于各种地表的地球物理观测方法,一般都是浅部观测数据的分辨率高、深部逐渐变低,根据这样的认识,本文引入了二叉树为基础的收缩网格剖分方法。

2.1 基于 Bi-Tree 的收缩结构

在图论中二叉树定义为:一个连通的无环图,并且每一个顶点的度不大于 3。有根二叉树还要满足根节点的度不大于 2。有了根节点之后,每个顶点定义唯一的父节点和最多 2 个子节点。假设由模型底部向地表分辨率变高,则其具有二叉树式的结构,如图 1a 所示。

2.2 减速收缩方法

图 1a 所示的 Bi-Tree 结构对于实际工作来说收缩速度过快,模型底部单元的剖分过粗,为了克服这一缺点在收缩过程中引入缓冲层,即每隔几层收缩一次。图 1b 为加入一个缓冲层的收缩结构。

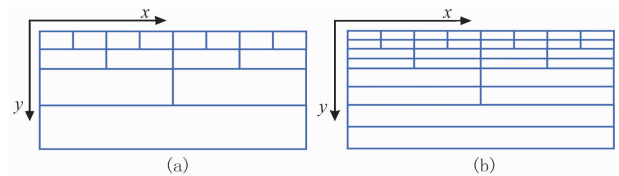


图 1 基于叉树的收缩结构示意图

(a)二次收缩;(b)带减速层的二次收缩

2.3 四边形单元的三角形化

分析收缩网格特点可见,在其网格中只存在四点、五点两种四边形(图 2),通过简单算法即可实现其三角形化:四点四边形 $ABCD$,可以变为三角形 ABD 与 BCD 或三角形 ACD 与 ABC ;五点四边形可变为三个三角形 ABE 、 BDE 、 BCD 。图 3 为剖分的四边形单元三角化示意图,可见所有单元均为三角形,且节点间联接关系明确。

2.4 二次插值节点的生成与三角单元二次剖分

有限单元法计算中,通常假设单元上的场值线性或二次变化。对于上述收缩网格中的三角形单

元,通过在边上引入二次节点可实现二次插值;对二次节点的三角形单元一分为四,可实现二次剖分。其过程如图4所示,三角形IKJ,在边IJ插入中间节点 M_k ,在边JK插入中间节点 M_i ,在边KI插

入中间节点 M_j ;生成二次剖分三角形单元 IM_kM_j 、 M_kJM_i 、 M_iKM_j 、 $M_jM_kM_i$ 。图5为图3插入中间节点,实现二次插值示意图;图6为利用二次插值节点实现二次剖分的示意图。

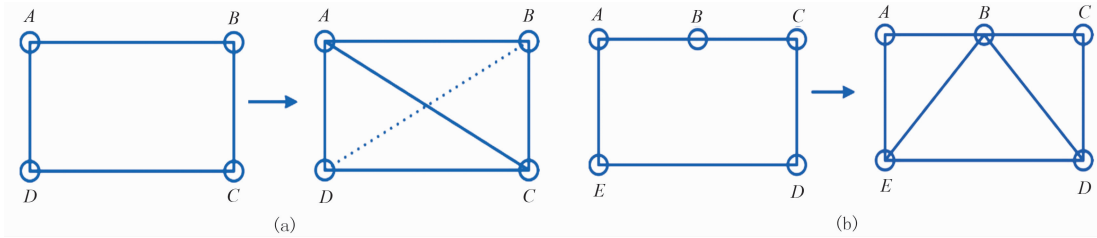


图2 四边形单元变为三角形单元

(a) 四点四边形变三角形; (b) 五点四边形变三角形

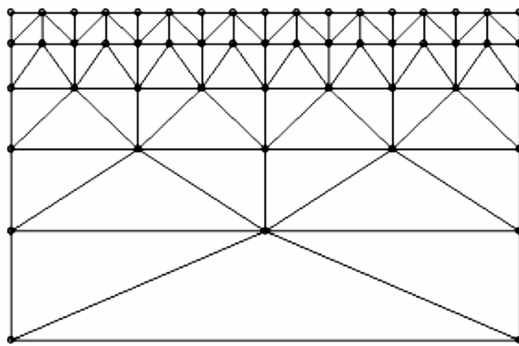


图3 三角形化

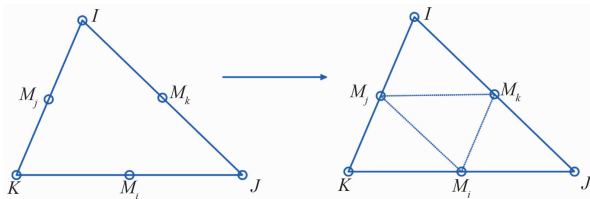


图4 三角单元二次离散

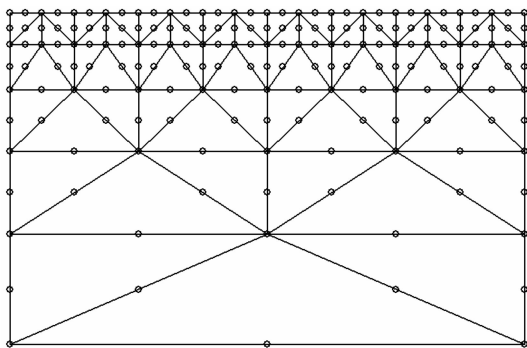


图5 二次插值

2.5 收缩网格剖分算法与多重剖分

利用二叉树与四边形变三角形,由三角形边插入二次节点、带二次节点三角形二次离散,可设计收

缩网格算法步骤:①根据二叉树生成四边形二次收缩网格,得到一次剖分的节点;②对四边形进行三角形化,得到边集;③利用边集插入二次节点,实现二次插值;④根据单元要求,对有二次节点的三角形进行二次剖分,生成二次剖分三角形;⑤重复③、④直到达剖分要求。

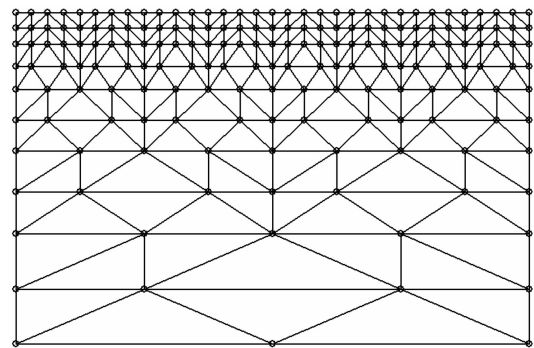


图6 二次剖分

3 收缩网格剖分下大地电磁剖分单元刚度矩阵计算

收缩网格剖分的最后单元为一次和二次插值三角形,利用一维、二维自然坐标^[5]推导可得到单元上的刚度矩阵。三角单元节点逆时针编号*i, j, m*,如果有二次插值节点则为*i, j, m, r, p, q*,其中*r*为边*i, j*中点、*p*为边*j, m*中点、*q*为边*m, i*中点。下文中*a, b, c*的定义来自参考文献^[5]。

3.1 泛函式(4)第一项单元积分

当选择双线性插值, \mathbf{K}_{1c} 矩阵元素为

$$k_s = \frac{1}{4\Delta}(a_s a_t + b_s b_t) \quad s, t \in \{i, j, m\} \quad (6a)$$

当选择双二次插值, \mathbf{K}_{1e} 矩阵为

$$\mathbf{K}_{1e} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1e}^1 & \mathbf{K}_{1e}^{3T} \\ \mathbf{K}_{1e}^3 & \mathbf{K}_{1e}^2 \end{bmatrix}$$

其中 \mathbf{K}_{1e}^1 矩阵元素为

$$k_{hh} = \begin{cases} -\frac{\Delta}{3}(a_k a_h + b_k b_h) & k \neq h \\ \Delta(a_k^2 + b_k^2) & k = h \end{cases} \quad k, h \in \{i, j, k\} \quad (6b)$$

\mathbf{K}_{1e}^2 矩阵元素为

$$k_{w\omega} = \begin{cases} \frac{8\Delta}{3}[(a_w^2 + a_n^2 + a_n a_w) + (b_w^2 + b_n^2 + b_n b_w)] & w = \omega \\ \frac{4\Delta}{3}[(2a_\omega a_w + a_n a_w + a_\omega a_n + a_n^2) + (2b_\omega b_w + b_n b_w + b_\omega b_n + b_n^2)] & w \neq \omega \end{cases} \quad w, \omega, n \in \{i, j, k\}, n \neq w \neq \omega \quad (6c)$$

\mathbf{K}_{1e}^{3T} 矩阵可以写成

$$\mathbf{K}_{1e}^{3T} = \frac{4\Delta}{3} \begin{pmatrix} a_i a_j + b_j b_j & 0 & a_i a_m + b_i b_m \\ a_i a_j + b_j b_j & a_j a_m + b_j b_m & 0 \\ 0 & a_j a_m + b_j b_m & a_i a_m + b_i b_m \end{pmatrix} \quad (6d)$$

3.2 泛函式(4)第二项单元积分

当选择双线性插值, 则有

$$\mathbf{K}_{2e} = \frac{\Delta}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7a)$$

当选择双二次插值, 则有

$$\mathbf{K}_{2e} = \frac{\Delta}{180} \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 32 & 16 & 16 \\ -4 & 0 & 0 & 16 & 32 & 16 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & 16 & 32 \end{pmatrix} \quad (7b)$$

3.3 泛函式(4)第三项单元积分

当选择双线性插值, 则有

$$\mathbf{K}_{3e} = \frac{l}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (8a)$$

当选择双二次插值, 则有

$$\mathbf{K}_{3e} = \frac{l}{30} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (8b)$$

4 算例分析

4.1 均匀半空间模型

分别取地下电阻率为 $1\Omega \cdot m$ 和 $1000\Omega \cdot m$, 采

用规则网格和收缩网格(缓冲层为 6)三角形单元双线性与双二次插值, 计算 TE、TM 模式视电阻率, 研究收缩网格的计算精度和适用性。计算区地表取 65 个节点, 垂向取 26 个节点(包括地平线), 水平方向节点位置由如下函数生成

$$x(i) = \begin{cases} x(i-1) + 50 \times 1.5^{i-n/4} & 0 < i < n/4 \\ x(i-1) + 50 & n/4 \leq i \leq 3n/4 \\ x(i-1) + 50 \times 1.5^{i-3n/4} & i > 3n/4 \\ 0 & i = 0 \end{cases} \quad (9a)$$

取地表纵坐标为 0, 向下按如下函数生成垂向节点

$$y(i) = 1.5^i \quad 0 < i < 25 \quad (9b)$$

TE 模式取 5 层空气单元, 分别计算 1000Hz, 0.001Hz 时电阻率。

表 1 为规则网格、收缩网格分别采用双线性与双二次插值的节点数。可见本实例中, 收缩网格可以将节点数减少一半以上, 刚度矩阵非零元素将减少 3/4 以上, 无疑将大大提高求解效率。表 2 为均

表 1 剖分节点数统计

网格类型	观测模式	双线性	双二次
规则网格	TE	1690	6579
	TM	2015	4425
收缩网格	TE	814	3135
	TM	1139	1869

表 2 均匀半空间($1\Omega \cdot m$)TE 模式视电阻率计算结果 $\Omega \cdot m$

网格类型	双线性		双二次	
	10^3 Hz	10^{-3} Hz	10^3 Hz	10^{-3} Hz
规则网格	1.037123	0.997037	0.998813	1.000006
收缩网格	1.039340	0.993028	0.997863	0.999822

表3 均匀半空间($1000\Omega \cdot \text{m}$)TM模式视电阻率计算结果
 $\Omega \cdot \text{m}$

网格类型	双线性		双二次	
	10^3 Hz	10^{-3} Hz	10^3 Hz	10^{-3} Hz
规则网格	1005.454253	999.998096	1000.053704	1000.023822
收缩网格	1004.170248	999.948703	1000.081959	1000.000821

均匀半空间电阻率为 $1\Omega \cdot \text{m}$ 时TE模式视电阻率计算结果,表3为均匀半空间、电阻率为 $1000\Omega \cdot \text{m}$ 时TM模式视电阻率计算结果(为节省篇幅其他两种情况不再赘述),可见规则网格与收缩网格计算精度

相差不大,双二次插值精度远高于双线性插值。由此可见收缩网格在与规则网格保持相同精度的条件下,可有效地减少节点数量,提高计算效率。

4.2 层状介质模型

为进一步验证计算精确性,采用层状介质解析解与数值解进行比较。选用均匀半空间模型相同的剖分方式,建立三层模型,各层参数见图7a。图7b为有限单元(双二次插值)TE、TM数值解和理论解曲线比较图,可见两种极化条件下数值模拟计算结果与理论曲线完全吻合,表明数值方法具有较高的计算精度。

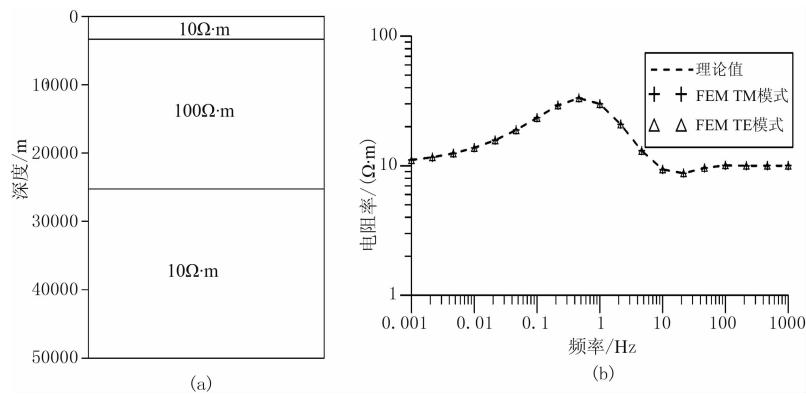


图7 三层模型(a)及视电阻率曲线(b)

4.3 带地形模型

为验证算法的适用性,进行带地形模型试算,计算模型示意图如图8所示。TE、TM计算结果如图9、图10所示,由计算结果可见,在正地形上方TE模式形成高阻异常,而TM模式形成低阻异常,并且低阻异常两侧存在较大的高阻异常。可见TE、TM均可识别低阻与高阻模型的存在,但TM模式视阻率曲线异常不封闭。模型试算表明,算法有较好的适用性。

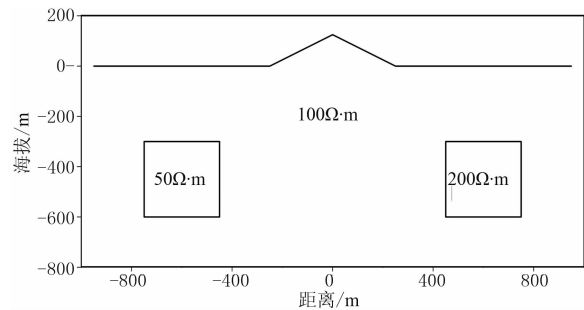


图8 模型示意图

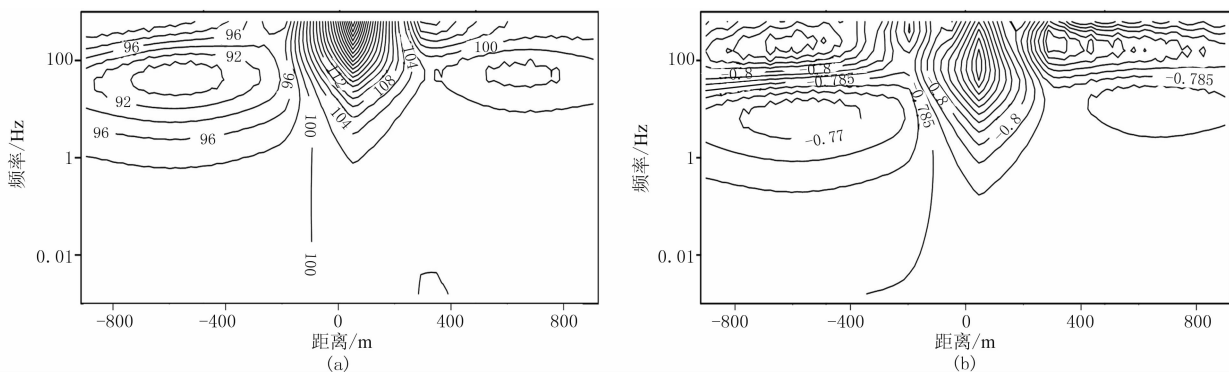
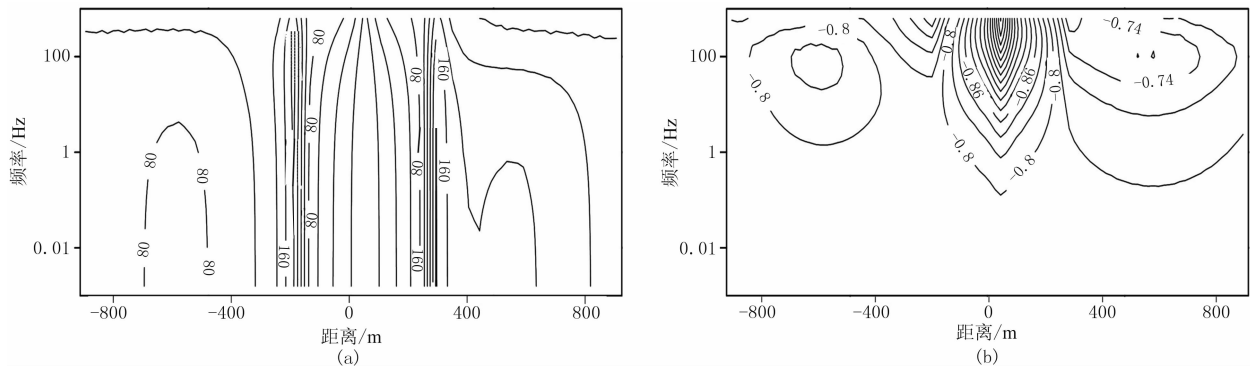


图9 TE模式视电阻率(a, $\Omega \cdot \text{m}$)和视相位(b, $^{\circ}$)断面图

图 10 TM 模式视电阻率(a, $\Omega \cdot m$)和视相位(b, $^\circ$)断面图

5 结论

本文研究了一种基于二叉树结构的二维模型收缩网格剖分方法,并应用该剖分方案进行了大地电磁问题的有限单元正演,通过模型试算验证了基于收缩结构的二维大地电磁有限元算法具有较高的精度和适用性。主要取得了以下成果:

(1)开发了基于二叉树结构的收缩网格剖分算法。该算法通过引入缓冲层,减缓二叉树收缩速度;最终采用三角形单元剖分,有利于拟合地形、地质体边界。

(2)开发了收缩网格的二次插值与二次剖分算法。通过边插入二次节点,便于节点访问,利用带二次节点三角形实现二次剖分的算法简单易行。

(3)模型试算结果表明,本文设计的收缩网格计算精度与规则网格相当,但可以大大减少剖分节点数。

参考文献

- [1] Coggon J H. Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method. *Geophysics*, 1971, 36(1): 132~155
- [2] 陈乐寿. 有限元法在大地电磁场二维正演中的改进. 石油地球物理勘探, 1982, 27(3): 68~76
Chen Leshou. Improvements on the application of finite element method to the two dimensional forward

solution in the magnetotelluric method. *OGP*, 1982, 27(3): 68~76

- [3] Wannamaker P E, Stodt J A, Rijo L. Two-dimensional topographic responses in magnetotellurics modeled using finite elements. *Geophysics*, 1986, 51(11): 2131~2144
- [4] 史明娟, 徐世浙, 刘斌. 大地电磁二次函数插值的有限元法正演模拟. 地球物理学报, 1997, 40(3): 421~430
Shi Mingjuan, Xu Shizhe, Liu Bin. Finite element method using quadratic element in MT forward modeling. *Chinese J Geophys*, 1997, 40(3): 421~430
- [5] 徐世浙. 地球物理中的有限单元法. 北京: 科学出版社, 1994: 220~241
- [6] 刘云, 王绪本. 大地电磁二维自适应地形有限元正演模拟. 地震地质, 2010, 32(3): 382~391
Liu Yun, Wang Xuben. FEM using adaptive topography in 2D MT forward modeling. *Seismology and Geology*, 2010, 32(3): 382~391
- [7] 陈小斌, 张翔, 胡文宝. 有限元直接迭代算法在 MT 二维正演计算中的应用. 石油地球物理勘探, 2000, 35(4): 487~496
Chen Xiaobin, Zhang Xiang, Hu Wenbao. Application of finite element direct iteration algorithm to MT 2-D forward computation. *OGP*, 2000, 35(4): 487~496
- [8] Key K, Weiss C. Adaptive finite-element modeling using unstructured grids: The 2D magnetotelluric example. *Geophysics*, 2006, 71(6): 291~299
- [9] Li Y, Pek J. Adaptive finite element modelling of two-dimensional magnetotelluric fields in general anisotropic media. *Geophys J Int*, 2008, 175: 942~954

(本文编辑:冯杏芝)