

延安 Q₂黄土统计损伤本构模型研究*

张乐中^① 何青峰^②

(^①长安大学地质工程与测绘学院 西安 710054)

(^②西安科技大学地质与环境学院 西安 710054)

摘要 中国黄土的物理力学性质改变具有明显的地域性,是一种特殊土体。以延安 Q₂ 黄土在不同围压和含水量下进行常规三轴试验获得的数据为基础,运用岩石统计损伤理论对延安 Q₂ 黄土的损伤本构模型进行研究。在考虑损伤门槛值对延安 Q₂ 黄土损伤变量的影响下,建立了延安 Q₂ 黄土在三轴压缩条件下的统计损伤本构模型,统计损伤本构方程中的参数通过对试验结果进行线性回归求得。试验和分析表明:在半对数坐标下,延安 Q₂ 黄土初始损伤点为三轴应力应变曲线的峰值拐点,对应的应力值为损伤应力门槛值。当施加的应力低于损伤门槛值时,应力应变曲线为线弹性关系,延安 Q₂ 黄土不发生损伤;而当施加的应力超过损伤门槛值时,延安 Q₂ 黄土发生损伤,并且随着施加的应力增大,损伤不断扩大。将统计损伤理论曲线与试验曲线进行对比,发现二者基本吻合,表明考虑损伤门槛值的延安 Q₂ 黄土统计损伤本构模型能较好的反映该地区黄土的变形破坏特征,对该区黄土地区岩土工程设计具有参考和借鉴作用。

关键词 延安 Q₂ 黄土 统计损伤 本构模型

中图分类号:P642.131 **文献标识码**:A

STUDY ON CONSTITUTIVE MODEL OF STATISTICAL DAMAGE FOR YAN'AN Q₂ LOESS

ZHANG Lezhong^① HE Qingfeng^②

(^①School of Geological Engineering and Surveying, Chang'an University, Xi'an 710054)

(^②School of Geological and Environmental Sciences, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054)

Abstract The physical and mechanical properties of loess at different regions in China have significant differences. Based on the data from ordinary triaxial test of Yan'an Q₂ loess under different confining pressures and moisture contents, this paper establishes the constitutive model of triaxial statistical damage for Yan'an Q₂ loess by introducing rock statistical damage theory in the damage constitutive model of Yan'an Q₂ loess. In the meantime, the paper considers the effect of damage threshold on Yan'an Q₂ loess damage variable as well. In addition, the parameters in damage constructive equation are calculated by linear regression on the test results. The experiment and analysis present that in semilogarithmic coordinates, the initial damage point is the peak inflection point of triaxial stress-strain curve of Yan'an Q₂ loess. The corresponding value of damage point is also the damage stress threshold. The Yan'an Q₂ loess cannot damage and the stress and strain can be in linear elastic relationship when applied stress is less than damage threshold. Conversely, Yan'an Q₂ loess can begin to damage. And the damage of Yan'an Q₂ loess can enlarge with the increase of applied stress. Finally, statistical damage curve shows good agreements

* 收稿日期: 2012-03-09; 收到修改稿日期: 2012-08-23.

第一作者简介:张乐中,主要从事岩土工程和地质工程方面的研究. Email: zlzbest@163.com

with test curve. This paper indicates that with the consideration of damage threshold, loess statistical damage constitutive model can better reflect the characteristics of Yan'an Q₂ loess deformation and failure, with a reference for geotechnical engineering design in the loess plateau.

Key words Yan'an Q₂ loess, Statistical damage, Constitutive model

1 引言

统计损伤理论是几何损伤理论中的一个重要分支^[1,2]。Krajcinovic D 等^[3]在 1982 年根据统计损伤理论提出一个新方法:以岩石内部缺陷是随机性分布的认识为基础,将统计强度理论和连续损伤理论借鉴到岩石损伤软化本构模型的研究中去,确立了黄土研究的一个新方向。

黄土是一种非均匀的地质材料,内含大量随机分布的孔隙、裂隙等缺陷,在外荷载的作用下黄土微元的破坏是随机的。因此,沈珠江等^[4~6]假设黄土微元强度服从统计规律,运用岩石统计损伤理论对黄土的损伤本构模型进行研究。结果表明:在变化的含水量或外荷载条件下,黄土的材料性质由于微观结构缺陷的发展和演化发生了劣化过程。

本文取延安市宝塔区王良寺体左滑壁外侧,地表下 18~20m 的天然延安 Q₂ 黄土为研究对象(表 1),根据室内常规三轴试验数据,分析了延安 Q₂ 黄土三轴应力状态下的结构损伤规律及其随含水量及荷载变化条件下的变形破坏规律。

表 1 天然状态下延安 Q₂ 黄土主要物理力学指标

Table 1 Main physical and mechanical index of Yan'an Q₂ loess in natural state

黏聚力/kPa	内摩擦角/(°)	天然密度/g·cm ⁻³	天然孔隙比	天然含水量/(%)	含水量/(%)	
					液限/(%)	塑限/(%)
120	31.5	1.83	0.64	10.24	27.8	16.8

2 统计损伤本构模型

2.1 统计损伤变量及演化方程

损伤变量 D 是表征黄土微元的破坏概率,为黄土破坏微元与微元总体的比例。

$$D = \int_{-\infty}^F P(F) dF \quad (1)$$

式中, F 为黄土微元强度的随机分布变量, F 的概率密度函数为 $P(F)$ 。假设黄土微元强度服从 Weibull 分布,则其概率密度函数为



图 1 王良寺滑坡治理工程概貌

Fig. 1 General view of Wangliangsi landslide treatment project



图 2 Tsz30-2.0 型应变控制式三轴仪

Fig. 2 Tsz30-2.0 triaxial apparatus of strain control type

$$P(F) = \frac{m}{F_0} \left(\frac{F}{F_0} \right)^{m-1} \exp \left[- \left(\frac{F}{F_0} \right)^m \right] \quad (2)$$

式中, m 、 F_0 为 Weibull 分布参数,反映了黄土的力学性质。

根据王春来^[7]提出的两参数 Weibull 分布,则黄土的损伤变量 D 可用下式表示

$$D = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^m \right] \quad (3)$$

式中, ε 为应变, m 、 a 分别为形状参数和尺度参数,且均为非负数。

黄土损伤本构关系的关键在于损伤变量 D 的选择。本文运用与岩石统计损伤变量相似的方法对结构性 Q₂ 黄土的损伤作如下假设:(1)黄土是微元的集合体,在宏观上视为各相同性;(2)黄土微元破

坏前具有线弹性性质,服从 Hooke 定律;(3)黄土微元的破坏可用统计规律来描述,且微元强度服从 Weibull 分布,其概率密度函数同单轴情况一样,可用式(2)表示,损伤变量也可用相似的形式表示,即

$$D = 1 - \exp\left[-\left(\frac{F^*}{F_0}\right)^m\right] \quad (4)$$

式中, F^* 为屈服函数,是 3 个应力不变量的函数; F_0 为使系数无量纲而采用的一常数,通常取 1。已有的文献^[8,9]表明,可以用 Druck-Prager 破坏准则来度量黄土的微元强度。综上所述,可选取黄土微元强度破坏的基本形式如下

$$F^* = \alpha I_1^* + \sqrt{J_2^*} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)得损伤演化方程如下

$$D = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\alpha I_1^* + \sqrt{J_2^*}}{F_0}\right)^m\right] \quad (6)$$

2.2 考虑损伤门槛值的本构方程

结合前面对损伤变量的假设和 Lemaitre 应变等价原理,可以建立黄土的损伤本构关系如下:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* (1-D) = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} (1-D) \quad (7)$$

式中, σ_{ij} 为名义应力张量分量; σ_{ij}^* 为有效应力张量分量; ε_{kl} 为应变张量分量; D_{ijkl} 为弹性刚度张量分量。

联立式(4)(7)可得黄土的统计损伤本构方程如下

$$\frac{1}{1-D} = \exp\left[\left(\frac{(\alpha I_1 + \sqrt{J_2})}{F_0(1-D)}\right)^m\right] \quad (8)$$

式(8)可以写成更一般的形式,即

$$\frac{1}{1-D} = \exp\left[\left(\frac{F}{F_0(1-D)}\right)^m\right] \quad (9)$$

式中, F 为名义应力的组合形式。当 $D=0$,即黄土没有发生损伤时, $F=0$ 是式(9)成立的必要条件。所以,黄土发生损伤的门槛值或临界点是 $F=0$,当 $F>0$ 时,黄土开始产生结构损伤。

黄土在三维应力状态下,若考虑 $F = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} = 0$,且由 Druck-Prager 破坏准则表达式可知 $\alpha > 0$,则等式成立的必要条件为:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (10)$$

式(10)表明,只要受到很小的外荷载,黄土损伤就会发生。

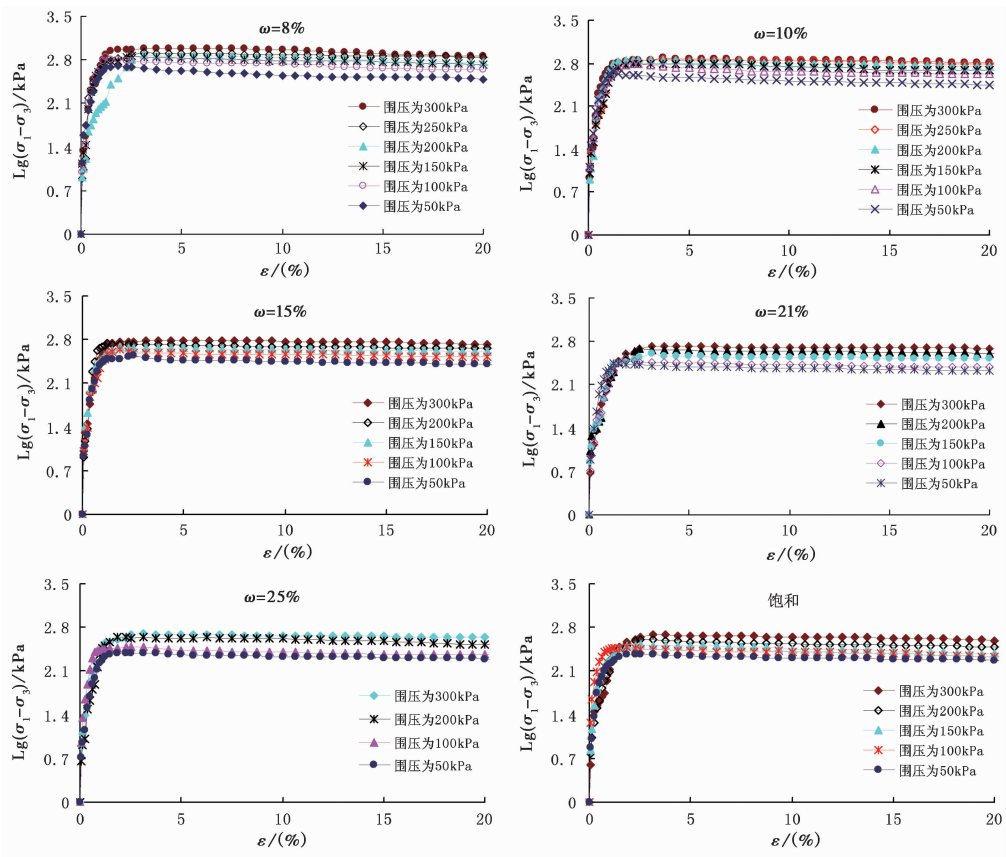


图3 Q_2 黄土 $\varepsilon \sim \lg(\sigma_1 - \sigma_3)$ 关系曲线

Fig. 3 Relation curve of $\varepsilon \sim \lg(\sigma_1 - \sigma_3)$ of Q_2 loess

延安 Q₂ 黄土在三维应力状态下何时开始损伤是需要进一步研究的重点。本文通过对延安 Q₂ 黄土在三轴试验中获得的应力应变曲线分析可知:在三轴加载初期,应力应变关系曲线近似直线,随着三轴荷载增大,曲线脱离线性,斜率变小。上述现象在半对数坐标 $\varepsilon - \lg\sigma$ 中表现更为明显,由此可知,延安 Q₂ 黄土峰值前应力应变曲线存在拐点(图 3)。结合试验和宋飞^[10]的岩石损伤研究结论,我们认为延安 Q₂ 黄土初始损伤点为半对数坐标 $\varepsilon - \lg\sigma$ 中曲线的转折点,对应的应力值就是损伤应力门槛值,由此说明式(10)是错误的。试验分析表明,当应力小于损伤门槛值时,应力应变关系为线弹性,延安 Q₂ 黄土不发生损伤;当应力大于损伤门槛值时,延安 Q₂ 黄土才开始发生损伤,随着应力的增大,延安 Q₂ 黄土的损伤也不断增加。

依据文献^[10, 11]的确定方法,由损伤应力门槛值作出 $J_2^{1/2} \sim I_1$ 关系曲线(图 4),其曲线呈近似线性关系,线性函数符合如下关系式

$$J_2^{1/2} = gI_1 + h \quad (11)$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} \frac{\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} & G < 0 \\ \frac{\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} \exp\left[\left(\frac{(\alpha I_1 + \sqrt{J_2} - (\alpha + 0.2557e^{-0.0425\omega})I_{1G} - 630.7\omega^{-0.59}Pa) E\varepsilon_1}{F_0[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]}\right)^m\right] & G \geq 0 \end{cases} \quad (16)$$

式中, μ 、 E 分别为 Q₂ 黄土的泊松比和弹性模量。

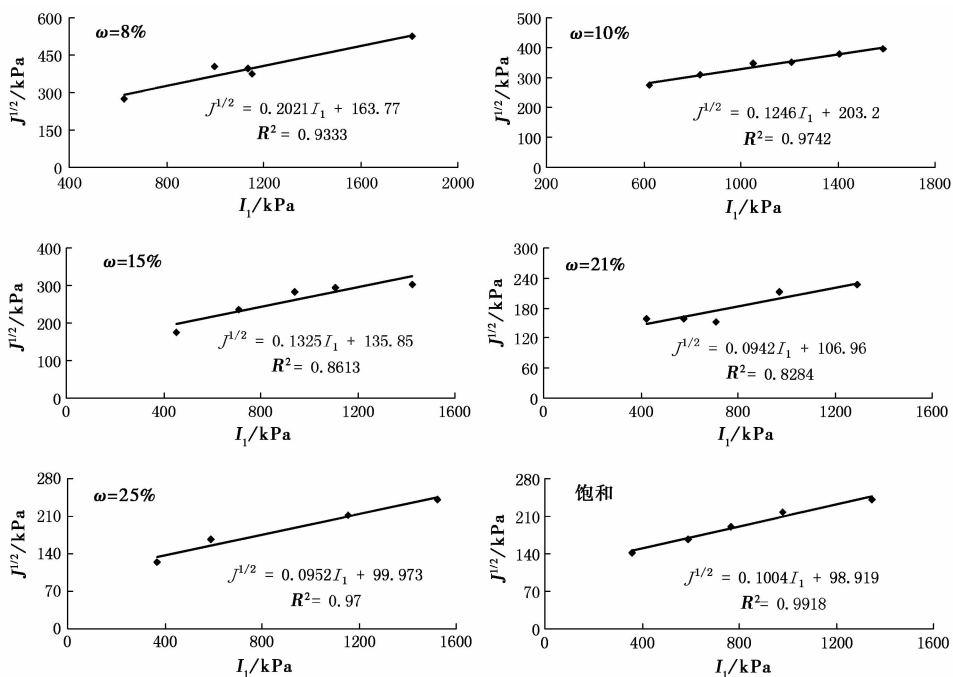


图 4 不同含水量 Q₂ 黄土初始损伤 $J_2^{1/2} \sim I_1$ 曲线

Fig. 4 Curve of loess initial damage $J_2^{1/2} \sim I_1$ in different moisture content

综上所述,黄土发生损伤的条件也就是黄土微元开始发生破坏的条件,相应的损伤函数可以表示为^[12~15]:

$$G = J_2^{1/2} - gI_1 - h \quad (12)$$

通过对图 2 中不同含水量 Q₂ 黄土的 $J_2^{1/2} \sim I_1$ 曲线拟合,可得出式(12)中参数 g 、 h 与含水量的变化关系(图 5),关系式分别如下:

$$g = 0.2557e^{-0.0425\omega} \quad (13)$$

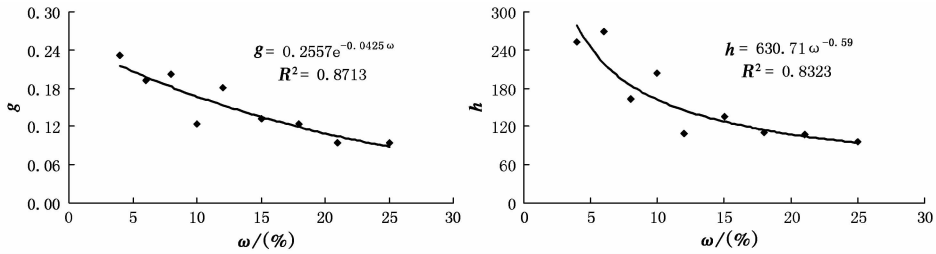
$$h = 630.71\omega^{-0.59} \quad (14)$$

联立式(12)(13)(14)若考虑黄土损伤门槛时,其损伤演化方程如下:

$$D = \begin{cases} 0 & G < 0 \\ 1 - \exp\left[-\left(\frac{F^* - F_G^*}{F_0}\right)^m\right] & G \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

式中, F_G^* 为损伤应力门槛值所对应的黄土微元强度值。

联立式(5)(7)(11)(15)可得考虑损伤门槛的 Q₂ 黄土统计损伤本构方程如下:

图5 Q₂黄土损伤门槛参数 g 、 h 与含水量关系Fig. 5 Relationship between Q₂ loess damage shreshold parameters g 、 h and moisture content

2.3 统计损伤本构方程的参数求解

已知常规三轴试验结果,黄土损伤本构方程参数 F_0 、 m 可由式(16)确定。由于常规三轴试验中 $\sigma_2 = \sigma_3$, 当 $G \geq 0$ 时,式(16)可表示为:

$$\frac{\sigma_1 - 2\mu\sigma_3}{E\varepsilon_1} = \exp \left[- \left(\frac{(\alpha I_1 + \sqrt{J_2} - (\alpha + 0.2557e^{-0.0425\omega})I_{1G} - 630.7\omega^{-0.59}Pa) E\varepsilon_1}{F_0(\sigma_1 - 2\mu\sigma_3)} \right)^m \right] \quad (17)$$

对式(17)两边取对数,则

$$\ln a + m \ln b = \ln \left[- \ln \left(\frac{\sigma_1 - 2\mu\sigma_3}{E\varepsilon_1} \right) \right] \quad (18)$$

式(18)中,

$$a = \left(\frac{1}{F_0} \right)^m \quad (19)$$

$$b = \frac{(\alpha I_1 + \sqrt{J_2} - (\alpha + 0.2557e^{-0.0425\omega})I_{1G} - 630.7\omega^{-0.59}Pa) E\varepsilon_1}{\sigma_1 - 2\mu\sigma_3} \quad (20)$$

$$\text{令 } Y = \ln \left[- \ln \left(\frac{\sigma_1 - 2\mu\sigma_3}{E\varepsilon_1} \right) \right]; X = \ln b; c = \ln a \text{ 则} \\ Y = mX + c \quad (21)$$

运用式(21)对试验结果进行线性回归可求得

m 、 c ,再由式 $F_0 = \exp\left(-\frac{c}{m}\right)$ 可求出 F_0 。

3 实例验证

根据上述方法对延安 Q₂ 黄土(含水量为 10%)的常规三轴试验结果进行拟合。Q₂ 黄土的泊松比取 0.25,根据 Druck-Prager 破坏准则表达式 $\alpha I_1 + \sqrt{J_2} = k$ 可求得 $\alpha = 0.169$; 弹性模量取 6 种不同围压下各曲线

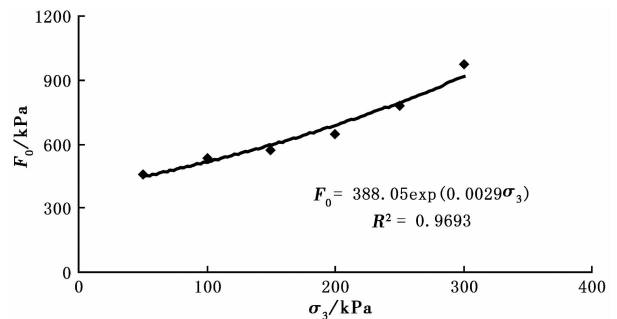
弹性模量的平均值,通过拟合可得 $E = 4.48 \times 10^4$ kPa。参数 F_0 、 m 的拟合结果如表 2 所示。

表 2 Q₂ 黄土统计损伤本构模型参数Table 2 Parameters of statistical damage constitutive model of Q₂ loess

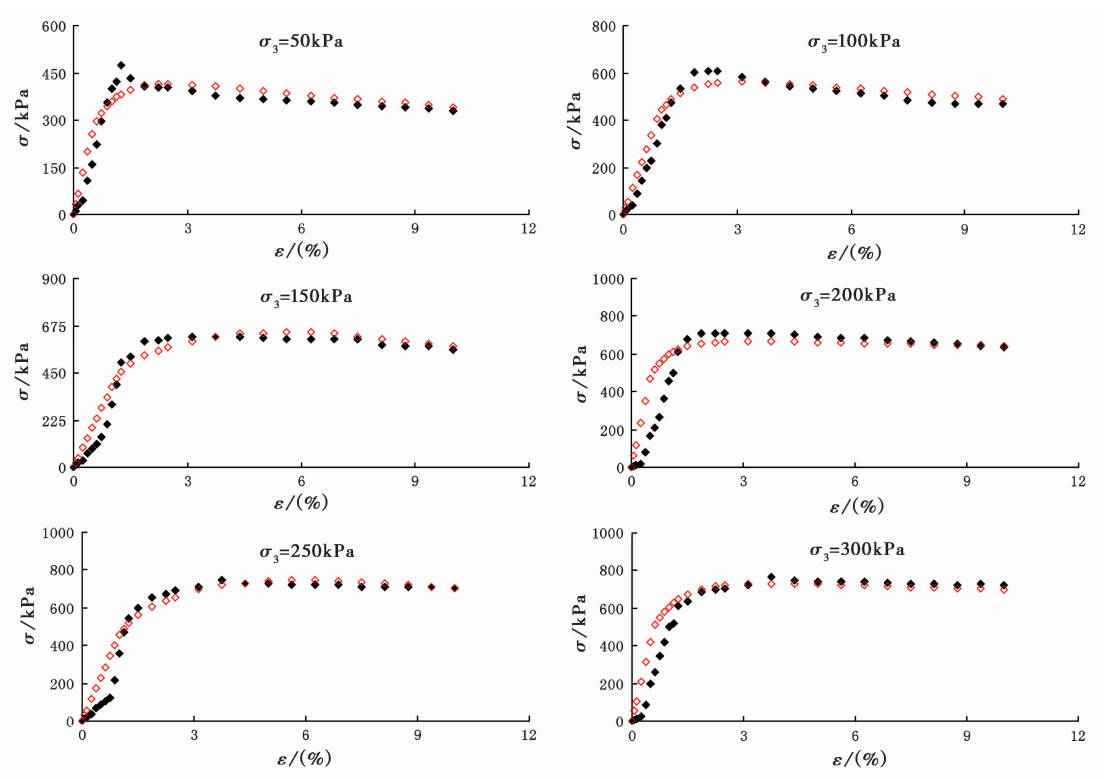
σ_3 /kPa	50	100	150	200	250	300
F_0 /kPa	460	535	570	650	780	925
m	0.476	0.49	0.485	0.482	0.479	0.488

从表 2 可以看出, F_0 随围压 σ_3 的增大而增大,将其绘制在 $F_0 \sim \sigma_3$ 坐标系中(图 6),通过曲线拟合可得到二者关系式如下:

$$F_0 = 388.05e^{0.0029\sigma_3} \quad (22)$$

图 6 黄土统计损伤参数 F_0 与 σ_3 关系曲线($\omega=10\%$)Fig. 6 Relation curve of loess statistical damage parameter F_0 and σ_3 ($\omega=10\%$)

如图 7 所示,本文的试验结果与延安 Q₂ 黄土($\omega=10\%$)在不同围压下应力应变关系曲线进行对比,后者是用迭代法把式(22)和参数 m 代入式(21)求得。结果表明,本文建立的考虑损伤门槛值的黄土统计损伤本构模型能够很好地与试验结果相吻合,充分反映了黄土的软化特性。

图 7 黄土三轴统计损伤理论曲线(空心红点)与试验曲线(实心黑点)($\omega=10\%$)Fig. 7 Curves of triaxial statistical damage theory(hollow red dot) and test of loess(filled black dot)($\omega=10\%$)

4 结 论

本文运用损伤理论研究了延安 Q₂ 黄土在三轴压缩条件下的本构关系,建立了该地区黄土的统计损伤本构模型。同时,考虑了损伤门槛值对黄土损伤变量的影响。通过试验研究得出以下结论:

(1)在半对数坐标下,延安 Q₂ 黄土初始损伤点

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} \frac{\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} & G < 0 \\ \frac{\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} \exp \left[\left(\frac{(\alpha I_1 + \sqrt{J_2} - (\alpha + 0.2557e^{-0.0425\omega}) I_{1G} - 630.7\omega^{-0.59} Pa) E \varepsilon_1}{F_0 [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]} \right)^m \right] & G \geq 0 \end{cases}$$

(4)通过对常规三轴条件下延安 Q₂ 黄土的统计损伤模型参数进行了深入的分析,得出常规三轴统计损伤演化方程中参数 F_0 随着围压 σ_3 的增大而增大。

(5)将统计损伤理论曲线与试验曲线进行对比,二者基本吻合,表明考虑损伤门槛值的延安 Q₂ 黄土统计损伤本构模型能较好的反映该地区黄土的变形破坏特征,对本区黄土岩土工程设计具有参考和借鉴作用。

为三轴应力应变曲线的峰值拐点,对应的应力值为损伤应力门槛值。

(2)在三维应力状态下,当应力小于损伤门槛值时,应力应变关系为线弹性,延安 Q₂ 黄土不发生损伤;当应力大于损伤门槛值时,延安 Q₂ 黄土开始发生损伤,随着应力的增大,损伤也不断扩大。

(3)在常规三轴条件下,延安 Q₂ 黄土的统计损伤本构模型为:

参 考 文 献

- [1] 李兆霞. 损伤力学及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
Li Zhaoxia. Damage Mechanics and Its Application. Beijing: Science Press, 2002.
- [2] 林斌. 考虑损伤效应的黄土流变模型研究[D]. 西安: 长安大学, 2005.
Lin Bin. Reserach on Rheological Model of Loess in Considering of Damage Effect. Xi'an: Chang'an University, 2005.
- [3] Krajcinovic D, Silva M A G. Statistical aspects of the continuous damage theory. Int. J. Solids Structure, 1982, 18(7): 551 ~ 562.

- [4] 沈珠江. 土体结构性的数学模型—21 世纪土力学的核心问题 [J]. 岩土工程学报, 1996, **18**(1): 95 ~ 97.
Shen Zhujiang. The mathematical model for soil structure: the key problem in soil mechanics in the 21st century. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1996, **18**(1): 95 ~ 97.
- [5] 沈珠江. 结构性黏土的弹塑性损伤模型 [J]. 岩土工程学报, 1993, **15**(3): 21 ~ 28.
Shen Zhujiang. Anelasto plastic damage model of cemented clays. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1993, **15**(3): 21 ~ 28.
- [6] 方祥位. Q₂ 黄土的微细观结构及力学特性研究 [D]. 重庆: 解放军后勤工程学院, 2008.
Fang Xiangwei. A Research of the Micro-and Meso Structure in Q₂ Loess and Mechanical Properties of Q₂ Loess. Chongqing: Logistical Engineering University, 2008.
- [7] 王春来, 徐必根, 李庶林, 等. 单轴受压状态下钢纤维混凝土损伤本构模型研究 [J]. 岩土力学, 2006, **27**(1): 151 ~ 154.
Wang Chunlai, Xu Bigen, Li Sulin, et al. Study on a constitutive model of damage of Sfrc under uniaxial compression. Rock Mechanics, 2006, **27**(1): 151 ~ 154.
- [8] 曹文贵, 赵明华, 刘成学. 基于 Weibull 分布的岩石损伤软化模型及其修正方法研究 [J]. 岩石力学与工程学报, 2004, **23**(19): 3226 ~ 3231.
Cao Wengui, Zhao Minghua, Liu Chengxue. Study on the model and its modifying method for rock softening and damage based on Weibull Random. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, **23**(19): 3226 ~ 3231.
- [9] 曹文贵, 赵明华, 刘成学. 基于统计损伤理论的德鲁克-普拉格岩石强度准则的修正 [J]. 水利学报, 2004, (9): 18 ~ 23.
Cao Wengui, Zhao Minghua, Liu Chengxue. Modified Drucker-Prager strength criterion based on statistical damage theory for rock. Shuili Xuebao, 2004, (9): 18 ~ 23.
- [10] 宋飞. 石膏角砾岩非线性流变模型研究及有限元分析 [D]. 西安: 长安大学, 2006.
Song Fei. Study on Finite Element and Nonlinear Creep Model for Gypsum Breccias. Xi'an: Chang'an University, 2006.
- [11] 谢星. 西安地区 Q₂ 黄土损伤特性及非线性流变模型研究 [D]. 西安: 长安大学, 2007.
Xie Xing. Study on Rheological Properties and Statistical Damage Rheological Model for Q₂ Loess. Xi'an: Chang'an University, 2007.
- [12] 王念秦, 罗东海, 姚勇, 陈效星, 杨建国. 马兰黄土动强度及其微结构变化实验 [J]. 工程地质学报, 2011, **19**(4): 467 ~ 471.
Wang Nianqin, Luo Donghai, Yao Yong, Chen Xiaoxing, Yang Jianguo. Dynamic strength and microstructure change of Malan loess under triaxial cyclic loading. Journal of Engineering Geology, 2011, **19**(4): 467 ~ 471.
- [13] 刘保健, 张晓荣, 程海涛. 应变控制下压实黄土的动三轴试验研究 [J]. 岩土力学, 2007, **28**(6): 1073 ~ 1076.
Liu Baojian, Zhang Xiaorong, Cheng Haitao. Study on compacted loess under strain control at dynamic triaxial test. Rock and Soil Mechanics, 2007, **28**(6): 1073 ~ 1076.
- [14] 何青峰, 林斌, 赵法锁, 王雷. 马兰黄土的应力-应变本构方程 [J]. 工程地质学报, 2007, **15**(1): 71 ~ 76.
He Qingfeng, Lin Bin, Zhao Fasu, Wang Lei. Stress-strain constitutional equation of Malan loess. Journal of Engineering Geology, 2006, **15**(1): 71 ~ 86.
- [15] 骆亚生, 谢定义, 陈存礼. 黄土不同湿度状态下破坏动强度的试验分析 [J]. 西安理工大学学报, 2001, **17**(4): 403 ~ 407.
Luo Yasheng, Xie Dingyi, Chen Cunli. Test and analysis of dynamic failure strength of loess under different moisture conditions. Journal of Xi'an University of Technology, 2001, **17**(4): 403 ~ 407.