双分式布朗运动下股本权证的定价

肖炜麟[1], 张卫国[2], 徐维东[1]
(1. 浙江大学管理学院, 浙江 杭州 310058; 2. 华南理工大学工商管理学院, 广东 广州 510640)

摘要: 为了体现金融资产的长期记忆性, 采用几何双分式布朗运动刻画股本权证标的资产价格变化的行为模式. 基于 Wick 积分推导出股本权证价值所满足的偏微分方程, 并通过终值条件和变量代换得到该偏微分方程的解: 股本权证的定价公式. 进一步研究了长记忆参数对定价模型的影响以及定价模型的参数估计问题. 最后, 采用市场数据进行实证研究, 不同模型的定价结果说明了金融资产具有长期记忆性.

关键词: 双分式布朗运动; 长期记忆性; Wick 积分; 股本权证
中图分类号: F830.59 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000−5781(2013)03−0348−07

Pricing equity warrants in a bifractional Brownian motion

Xiao Weilin[1], **Zhang Weiguo**[2], **Xu Weidong**[1]
(1. School of Management, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China;
2. School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: In order to reflect the long memory property of the financial assets, this paper uses the geometric bifractional Brownian motion to capture the underlying asset of equity warrants. Moreover, a partial differential equation formulation for valuing equity warrants based on Wick integration is proposed. Using the final condition and the method of variable substitution, we obtain the solution for this partial differential equation–the pricing formula for equity warrants. Furthermore, the influence of long memory parameters is analyzed and the problem of estimating the parameters of this proposed model is considered. Finally, an empirical study is presented. The pricing results of different models illustrate that the financial asset has the property of long memory.

Key words: bifractional Brownian motion; long memory; Wick integration; equity warrants

1 引 言

股权分置改革的实施使得权证成为我国金融衍生产品的重要组成部分, 传统的权证定价问题研究都是在标的资产服从几何布朗运动下进行的[1−5]. 然而, 近年来对金融资产收益率的实证研究表明: 金融资产价格之间并非随机游走, 而存在着自相似性、长期记忆性及非周期循环等分形特性, 并且是非线性动力系统和确定性混沌共同作用的结果. Peters 于 1989 年提出了分形市场假说[6], 应用 R/S 法分析了不同资本市场(如股票市场和汇率市场), 都发现了分形结构和非周期循环的存在, 即金融系统的状态不仅依赖于当前时刻的状

收稿日期: 2011−04−14; 修订日期: 2012−07−19.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71101056;71171086); 国家社科基金重大资助项目(11&ZD156); 广东省自然科学基金博士启动资助项目(S2011040005723); 广东高校优秀青年创新人才培育计划资助项目(wym11010); 华南理工大学中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2012ZM0029).

况, 而且也依赖在该时刻以前的历史过程. 刻画这种自相似性和长期记忆性最简单的方法就是采用分数布朗运动[7−10].

但是文献[11]指出分数布朗运动不是半鞅, 因此精典的随机分析理论不能直接于分数布朗运动, 而且直接将分数布朗运动应用于金融环境会产生套利机会[12,13]. 文献[13]进一步指出尽管文献[14]中采用 Wick 积分可以消除分数布朗运动产生的套利机会, 但在 Wick 积分下传统的自融资策略不符合经济学理论. 从而, 众多学者采用了修正的分数布朗运动来刻画金融资产价格变化的行为模式, 如混合分数布朗运动以及双分式布朗运动等[15,16]. 由于, 双分式布朗运动是一种比分数布朗运动更为广泛的高斯过程, 它不仅具有自相似性和长记忆性等分数布朗运动具有的性质, 而且在一定限制条件下是一个半鞅, 因此可将其应用于金融. 文献[17]给出了双分式布朗运动的随机积分, 并指出双分数布朗运动可以用来刻画金融资产的随机波动性.

为了刻画金融资产的长期记忆性, 同时为了消除分数布朗运动市场中的金融套利, 本文采用双分式布朗运动刻画股本权证标的资产价格变化的行为模式, 利用 Wick 积分和偏微分方程, 推导出双分式布朗运动下股本权证的定价模型[1], 探讨了长记忆参数对定价模型的影响以及长记忆参数的估计问题, 最后结合我国权证市场现实情况, 给出了应用实例分析.

2 双分式布朗运动下欧式期权定价模型

金融系统是一个自由度极大的复杂系统, 交易者和投资者对股票进行估值时, 除了利用基本信息和技术分析之外, 还受投机行为的影响. 假设有一只在近期较长一段时间内一直上涨的股票, 同时交易者根据基本原则分析知公司股票将会下跌, 但他们人为地认为该只股票在未来几天内会上涨, 从而该交易者会购买更多的股票. 显然, 交易者知道, 最后他将出售手中所有的股票, 但他的这种行为会导致短期内价格的异常表现, 这就造成了金融时间序列的长记忆性. 本文采用双分式布朗运动来描述标的股票价格变化的行为模式, 以期客观地反映金融市场的现实情况.

2.1 双分式布朗运动的定义与性质

定义 1 中心高斯过程 $B^{H,K}=\left(B_t^{H,K},t\geqslant 0\right)$ 称为双分式布朗运动, 若满足均值为零, 且协方差为

$$R^{H,K}(t,s)=\mathrm{E}\left[B_t^{H,K}B_s^{H,K}\right]=\frac{1}{2^K}\left(\left(t^{2H}+s^{2H}\right)^K-|t-s|^{2HK}\right),\ s,t\geqslant 0, \tag{1}$$

其中$H\in(0,1),K\in(0,2)$.

特别的, 当 $K=1$ 时, 双分式布朗运动就退化成分数布朗运动. 当 $K=1,H=1/2$ 时, 双分式布朗运动就退化成标准布朗运动.

由定义知双分式布朗运动具有下面的性质.

性质 1 双分式布朗运动是 $HK-$自相似的.

性质 2 双分式布朗运动是 δ 阶 Höder 连续的, 且满足 $\delta\leqslant HK$.

性质 3 ,假设 $2HK=1,1<K<2$ 且 $H\in(0,1)$, 则双分式布朗运动 $B^{H,K}$ 是一个半鞅.

2.2 模型假设

给定概率空间 $(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$ 及定义在该概率空间上的双分式布朗运动 $B^{H,K}=\left(B_t^{H,K};t\geqslant 0\right)$, 其中 $\mathcal{F}_t=\sigma\{B_s^{H,K};s\leqslant t\}$. 由文献[2,3,5]知股本权证的标的资产为公司资产价值, 进一步对权证市场作如下假设:

1) 市场是无摩擦, 即交易费用为零, 无税收, 不存在套利机会, 且无风险利率 r 为常数;

2) 权证发行公司没有外债, 即权证发行公司的金融资源仅由股票和权证构成[2];

3) 没有对交易头寸方向的限制, 无卖空限制, 没有头寸大小、无流动性和时间限制;

[1]本文的研究思路, 可以应用到研究一般中心型高斯过程(如次分数 Brown 运动、混合分数布朗运动)的权证定价问题.

[2]当公司有外债(如零息票债券)时, 采用本文的研究思路和方法可以得到相应的定价模型.

4) 股本权证标的资产价格变化过程 V_t 服从几何双分式布朗运动

$$\mathrm{d}V_t = \mu V_t \mathrm{d}t + \sigma V_t \mathrm{d}B_t^{H,K},\ 0 \leqslant t \leqslant T, V_0 = V, \tag{2}$$

其中 μ 表示标的资产的收益率, σ 表示标的资产的波动率, $B_t^{H,K}$ 表示双分式布朗运动.

2.3 定价模型的数理推导

由于双分式布朗运动是一个高斯过程, 下面引入关于高斯过程的 Wick-Itô 公式, 其证明过程请参见文献[18].

引理 1 [18] 设令 Y_t 是一方差有界的中心型高斯变量, 函数 $f(t,y):[0,+\infty]\times R \mapsto R$ 是连续的, 其偏导 $\dfrac{\partial f}{\partial t}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 均存在且满足指数型增长条件, 即对 $\forall\, t\in[0,T], \forall x \in R$ 有

$$\left|\frac{\partial^k f(t,y)}{\partial y^k}\right| \leqslant C_T \exp(c_T y^2)\,, k=0,1,2, \tag{3}$$

则 Wick-Itô 公式的积分形式为

$$f(T,Y_T) = f(0,Y_0) + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial t}(t,Y_t)\mathrm{d}t + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial y}(t,Y_t)\Diamond \mathrm{d}Y_t + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,Y_t)\mathrm{d}Y_t\,, \tag{4}$$

其中 C_T, c_T 均为大于零的常数, 且满足 $c_T < \dfrac{1}{4}\left(\sup\limits_{t\in[0,T]}\left(\mathrm{E}\left[Y_t^2\right]\right)^{-1}\right)$, $\Diamond$ 表示 Wick 积分.

同时 Wick-Itô 公式的微分形式为

$$\mathrm{d}f(t,Y_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,Y_t)\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial y}(t,Y_t)\Diamond \mathrm{d}Y_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,Y_t)\mathrm{d}Y_t\,. \tag{5}$$

令 $W(t,V_t)$ 表示 t 时刻且执行价格为 X, 到期日为 T 的股本权证价格, 则下面定理给出了任意时刻 $t\in[0,T)$ 股本权证的价值.

定理 1 设公司拥有 N 份发行在外的股票和 M 份认股权证, 并且每份认股权证可使其持有者在到期日 T 以每股 X 元的执行价格向公司购买 k 份股票, t 时刻公司每只股票的价值为 S_t, 其波动率为 σ_S. 公司资产价值 V_t 变化过程满足式(2), 则 $t\in[0,T)$ 时刻股本权证的价值可以表示为

$$W(t,V_t) = \frac{1}{N+Mk}\left(kV_t\varPhi(d_1) - NX\mathrm{e}^{-r(T-t)}\varPhi(d_2)\right), \tag{6}$$

其中 $d_1 = \dfrac{\ln(kV_t/(NX)) + r(T-t) + \dfrac{\sigma^2}{2}(T^{2HK}-t^{2HK})}{\sigma\sqrt{T^{2HK}-t^{2HK}}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T^{2HK}-t^{2HK}}$, $\varPhi(\cdot)$ 为标准正态分布函数.

同时定价模型(6)中的参数 σ 和 V 可以通过下面非线性方程组求得

$$\begin{cases} NS_t = V_t - \dfrac{M}{N+Mk}\left(kV_t\varPhi(d_1) - NX\mathrm{e}^{-r(T-t)}\varPhi(d_2)\right) \\ \sigma_S = \dfrac{V_t\sigma}{S_t}\dfrac{N+kM-kM\varPhi(d_1)}{N(N+kM)}\,. \end{cases} \tag{7}$$

证明 由式(2)知

$$V_t = V_0\exp\left(\mu t + \sigma B_t^{H,K} - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2HK}\right).$$

由 Wick-Itô 公式(4)得

$$\begin{aligned} W(t,V_t) = {} & W(0,V_0) + \int_0^t \frac{\partial W}{\partial u}(u,V_u)\mathrm{d}u + \mu\int_0^t \frac{\partial W}{\partial V}(u,V_u)V_u\mathrm{d}u + \\ & \sigma\int_0^t \frac{\partial W}{\partial V}(u,V_u)V_u\Diamond \mathrm{d}B_u^{H,K} + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t 2HK\frac{\partial^2 W}{\partial V^2}(u,V_u)V_u^2 u^{2HK-1}\mathrm{d}u\,. \end{aligned} \tag{8}$$

采用 $\varDelta$ 对冲技巧构造无风险投资组合 $\varPi$ 满足

$$\varPi_t = W(t, V_t) - \varDelta_t V_t\,.$$

另一方面, 根据文献[12]给出的 Wick 自融资条件, 则有

$$W(t,V_t) = W(0,V_0) + r\int_0^t \varPi_u \mathrm{d}u + \mu\int_0^t \varDelta_u V_u \mathrm{d}u + \sigma\int_0^t \varDelta_u V_u \Diamond \mathrm{d}B_u^{H,K}. \tag{9}$$

为了对冲风险, 令 $\varDelta = \dfrac{\partial W}{\partial V}$, 同时对比式(8)和(9)得

$$\frac{\partial W}{\partial t} + HK\sigma^2 V^2 t^{2HK-1}\frac{\partial^2 W}{\partial V^2} + rV\frac{\partial W}{\partial V} - rW = 0\,. \tag{10}$$

根据终端条件 $W|_T = \dfrac{1}{N+Mk}(kV_T - NX)^+$ 并结合式(10), 易知求解权证价值等价于求解下面偏微分方程问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t} + HK\sigma^2 V^2 t^{2HK-1}\dfrac{\partial^2 W}{\partial V^2} + rV\dfrac{\partial W}{\partial V} - rW = 0 \\ W|_T = \dfrac{1}{N+Mk}(kV_T - NX)^+. \end{cases}$$

令 $\hat{\sigma}^2 = HK\sigma^2 V^2 t^{2HK-1}$, 做波动率修正, 则上式可以转换为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t} + \hat{\sigma}^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial V^2} + rV\dfrac{\partial W}{\partial V} - rW = 0 \\ W|_T = \dfrac{1}{N+Mk}(kV_T - NX)^+. \end{cases} \tag{11}$$

利用变量代换技术并结合边界条件, 将方程(11)转化为常系数抛物型方程的 Cauchy 问题并解之即可得满足方程(11)的解即为式(6).

同时由假设条件 2)知公司资产总价值仅由股票和权证构成, 即

$$V_t = NS_t + MW_t. \tag{12}$$

另一方面, 由股票波动率和公司资产价值波动率的相互关系(请参见文献[2,3])易知

$$\sigma_S = \frac{V_t\sigma}{S_t}\left(\frac{1}{N} - \frac{Mk}{N+Mk}\varPhi(d_1)\right). \tag{13}$$

从而由式(6),式(12)以及式(13)知式(7)成立.　　证毕.

3　长记忆参数对权证价值的影响及参数估计

比较定价公式(6)和 Uhkov 权证定价模型[3], 可以看出公式(6)反映了标的资产的长记忆参数对股本权证的影响. 由于金融资产的长记忆性, 使得其在一段时间内可能会持续高涨或下跌, 长记忆参数 H 和 K 正反映了金融资产的这种自相似性和长期记忆性, 进一步观察定价公式(6), 可以看出长记忆系数 H 和 K 对定价模型的影响是一样的, 下面分析长记忆指数对股本权证价值的影响.

推论 1　股本权证的价值随着长记忆参数 H 和 K 的增大而增加.

证明　首先讨论 H 的变化对股本权证价值的影响. 根据式(6)并对 H 求偏导得

$$\begin{aligned}\frac{\partial W(t,V_t)}{\partial H} &= \frac{1}{N+kM}\left(kV_t\varPhi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial H} - NX\mathrm{e}^{-r(T-t)}\varPhi(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial H}\right) \\ &= \frac{kV_t\varPhi(d_1)}{N+kM}\frac{\partial\left(\sigma\sqrt{T^{2HK}-t^{2HK}}\right)}{\partial H}\end{aligned}$$

$$= \frac{kV_t\Phi(d_1)}{N+kM}\frac{\sigma(T^{2HK}\ln T - t^{2HK}\ln t)}{\sqrt{T^{2HK}-t^{2HK}}} > 0\,,$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布的密度函数.

从而,股本权证的价格随着H的增大而增加. 同时由于 H 和 K 的对称性, 则由式(6)对 K 求偏导可得股本权证的价格随着 K 的增大而增加, 从而结论成立. 证毕.

推论 1 也说明了金融时间序列具有持久性, 即过去的增量与未来的增量正相关. 仔细对比定价公式(6)和 Uhkov 股本权证定价公式, 可以发现采用定价模型(6) 比 Uhkov 模型多了两个参数 H 和 K. 但进一步观察发现, 定价模型(6)只与 H 和 K 的乘积有关, 因此如何采用现实数据估计 HK 是将定价模型(6)应用于实践的关键步骤. 由性质1知双分式布朗运动是 $HK-$自相似的, 因此可以采用聚合方差法来估计长记忆参数值.

推论 2 令 $Y_t, t=1,2,\ldots,N$ 为包含双分式布朗运动的随机序列, 进一步令聚合序列 $Y^{(m)}(k) = \frac{1}{m}\sum\limits_{i=(k-1)m+1}^{km} Y_i$, 这里 m 为正整数且 $k=1,2,\ldots,[N/m]$. 将随机序列分为样本容量为 m 的 $[N/m]$ 个子样本, 则当 m 充分大时, 长记忆参数 HK、样本容量 m 和聚合序列的方差 $\mathrm{Var}\left(Y^{(m)}\right)$ 有如下关系

$$\ln\left(\mathrm{Var}\left(Y^{(m)}\right)\right) \sim C + (2HK-2)\ln(m)\,, \tag{14}$$

其中 $[N/m]$ 表示 N/m 的取整, C 为常数.

证明 首先根据方差的定义知聚合序列 $Y^{(m)}(k)$ 的方差可以写成

$$\mathrm{Var}\left(Y^{(m)}\right) = \frac{1}{[N/m]}\sum_{k=1}^{[N/m]}\left(Y^{(m)}(k)\right)^2 - \left(\frac{1}{[N/m]}\sum_{k=1}^{[N/m]}Y^{(m)}(k)\right)^2. \tag{15}$$

另一方面, 由双分式布朗运动的定义 1 知聚合序列 $Y^{(m)}(k)$ 的方差具有弱衰减性, 且当 m 足够大时, 有

$$\frac{1}{[N/m]}\sum_{k=1}^{[N/m]}\left(Y^{(m)}(k)\right)^2 - \left(\frac{1}{[N/m]}\sum_{k=1}^{[N/m]}Y^{(m)}(k)\right)^2 \sim \hat{C}m^{2HK-2}, \tag{16}$$

其中 $\hat{C}$ 为一个常数.

由式(15)和式(16)得

$$\mathrm{Var}\left(Y^{(m)}\right) \sim \hat{C}m^{2HK-2}. \tag{17}$$

令 $C=\ln(\hat{C})$, 进一步对式(17)两边取对数得式(14)成立. 证毕.

推论 2 给出了对于某一个固定 m 值, 其对应的聚合序列方差与长记忆参数的关系表达式. 实际上, 对于不同的 m 值, 根据推论 2 的结论, 可以得到不同的聚合序列方差, 从而可以采用最小二乘法得到长记忆参数 HK 的估计值. 因此, 结合历史波动率的估计方法[19], 下面给出定价模型参数估计的具体步骤:

步骤 1 根据收集每天的历史数据 $Y_t, t=1,2,\ldots,N$, 计算资产第 t 个时间间隔的对数收益率 u_i;

步骤 2 采用下式估计波动率的值[19]

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{250}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(u_i-\bar{u})^2},$$

其中$\bar{u} = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}u_i$;

步骤 3 将得到的长为 N 时间序列分为长度为 m 的组, 即 $(Y_1,Y_2,\ldots,Y_m)$, $(Y_{m+1},Y_{m+2},\ldots,Y_{2m}),\ldots,$ $(Y_{([N/m]-1)m+1},\ldots,Y_{[N/m]m})$;

步骤 4 对于每个长度为 m 的分组, 利用公式(15)计算 $Y^{(m)}$ 的方差;

步骤 5 针对不同长度 m, 重复步骤 3 和步骤 4;

步骤 6 由所得数据绘制 $\ln\left(\mathrm{Var}\left(Y^{(m)}\right)\right)$ 和 $\ln(m)$ 的图形, 并通过最小二乘法回归得到图形的斜率 slope;

步骤 7 计算 $\widehat{HK}=\mathrm{slope}/2+1$.

4 应用实例

为了说明模型的有效性, 下面以我国权证市场八只股本权证为例进行应用研究. 所有的数据均来自于国泰安数据库(http://www.gtarsc.com/), 数据选取的时间段为 2005–08–22 至 2008–05–22. 首先采用上节给出的定价模型参数估计方法来估计每只权证所对应股票收益率序列, 进一步求得各支股票的历史波动率和长记忆参数值, 所得的基本信息如表 1 所示.

表 1 八只权证的基本信息

Table 1 Basic information of eight equity warrants

权 证	观察量					估计量	
名 称	股价	股票数量	权证数量	有效期	执行价	波动率	HK
宝钢	4.000	875 600 000	387 700 000	2	4.50	30.50 %	0.618
首创	4.750	2 200 000 000	60 000 000	1	4.55	31.30 %	0.650
云化	22.62	536 400 000	540 000 000	2	18.23	43.90 %	0.637
马钢	3.480	6 455 300 000	1 265 000 000	2	3.40	36.20 %	0.594
国电	7.430	36 538 730 100	427 465 000	2	7.50	60.90 %	0.629
鞍钢	4.21	2 962 985 697	113 097 855	1	3.60	35.77 %	0.616
武钢	13.36	5 468 000 000	727 500 000	2	10.20	49.11 %	0.622
上汽	28.24	6 551 000 000	226 800 000	2	27.43	55.67 %	0.665

其他参数:行权比例 $k=1$; 一年无风险利率 $r_1=2.25\%$; 两年无风险利率 $r_2=4.14\%$.

下面采用不同的定价模型计算股本权证的价值, 所得结果如表 2 所示. 其中 $P_{\text{B-S}}, P_{\text{G-S}}, P_{\text{U}}, P_{\text{B-F}}$ 以及 P_{Actual} 分别表示采用 Black-Scholes 公式[1], Schulz 等[2]的修正模型, Ukhov 定价模型[3]以及考虑长记忆的双分式布朗运动模型求得权证的价值以及权证的真实市场价格.

从表中数据可以看出各种定价模型的定价结果都低估了权证的价格, 这是由于定价模型没有考虑交易费用, 随机波动率, 随机跳跃, 投资者的情绪和投机行为等因素. 但是, 仔细观察表 2 的数据易知根据双分式布朗运动模型计算的权证价值与市场权证价格最为接近, 这是由于该模型考虑了金融资产的长记忆性.

表 2 不同定价模型的定价结果以及市场价格

Table 2. Results by different pricing models vs. actual market prices

权 证	定价结果					权 证	定价结果				
名 称	$P_{\text{B-S}}$	$P_{\text{G-S}}$	P_{U}	$P_{\text{B-F}}$	P_{Actual}	名 称	$P_{\text{B-S}}$	$P_{\text{G-S}}$	P_{U}	$P_{\text{B-F}}$	P_{Actual}
宝钢	0.718	0.528	0.657	0.801	0.874	首创	0.735	0.715	0.734	0.996	1.013
云化	8.244	7.490	7.812	8.691	9.343	马钢	0.857	0.716	0.852	1.099	1.133
国电	2.660	2.629	2.659	3.196	3.585	鞍钢	0.268	0.227	0.259	0.352	0.397
武钢	4.415	4.167	4.284	4.987	5.044	上汽	1.761	1.435	1.434	2.406	2.447

5 结束语

本文探讨了几何双分式布朗运动下股本权证的定价问题, 分析了长记忆参数对定价模型的影响, 并给出了定价模型的参数估计方法. 此外, 虽然本文只研究了双分式布朗运动下股本权证的定价问题, 但本文的研究思路和方法可以应用到一般中心型高斯过程下股本权证的定价问题. 而且研究表明, 定价公式只与高斯过程的方差有关, 从而说明了本文方法的普遍适应性. 采用双分式布朗运动刻画金融资产的价格变化过程在一定程度上比传统模型有所改进, 但是整个理论模型始终没有脱离 Black-Scholes 模型理论框架, 为简化模型

而进行的众多假设与现实仍有出入, 同时模型中的利率和波动率均都假设为常数, 且模型中没有考虑到随机跳跃、投资者投机行为和情绪等因素, 因此模型有待进一步改进和修正.

参考文献:

[1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637–657.

[2] Schulz G U, Trautmann S. Robustness of option-like warrant valuation[J]. Journal of Banking and Finance, 1994, 18(5): 841–859.

[3] Ukhov A D . Warrant pricing using observable variables[J]. Journal of Financial Research, 2004, 27(3): 329–339.

[4] 杨立洪, 徐黄玮, 刘 广. 基于B-S公式的欧式股本权证多因素定价模型[J]. 系统工程学报, 2009, 24(1): 74–78.
Yang Lihong, Xu Huangwei, Liu Guang. Multi-factors pricing model of European equity warrants based on B-S Formula[J]. Journal of Systems Engineering, 2009, 24(1): 74–78. (in Chinese)

[5] 杨宝臣, 李 彪. 基于最优动态利率模型的认股权证定价研究[J]. 系统工程学报, 2009, 24(3): 264–271.
Yang Baochen, Li Biao. Research on warrant pricing based on optimal dynamical interest rate model[J]. Journal of Systems Engineering, 2009, 24(3): 264–271. (in Chinese)

[6] Peters E E. Fractal structure in the capital markets[J]. Financial analyst Journal, 1989, 7(32): 434–453.

[7] 徐 梅, 张世英. 基于小波变换的时变长记忆 SV 模型估计方法研究[J]. 系统工程学报, 2006, 21(1): 12–17.
Xu Mei, Zhang Shiying. Study on estimation method of time varying long memory SV model based on wavelet transformation[J]. Journal of Systems Engineering, 2006, 21(1): 12–17. (in Chinese)

[8] 樊 智, 张世英.金融市场的效率与分形市场理论[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 22(3): 13-19.
Fan Zhi, Zhang Shiying. Efficiency of financial market and fractal market theory[J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2003, 22(3): 13–19. (in Chinese)

[9] 路应金, 唐小我, 张 勇. 供应链中牛鞭效应的分形特征研究[J]. 系统工程学报, 2006, 21(5): 463–469.
Lu Yingjin, Tang Xiaowo, Zhang Yong. Study on the fractal characters of the bullwhip effect in supply chains[J]. Journal of Systems Engineering, 2006, 21(5): 463–469. (in Chinese)

[10] Xiao W, Zhang W, Zhang X, et al. Pricing currency options in a fractional Brownian motion with jumps[J]. Economic Modelling, 2010, 27(5): 935–942.

[11] Lin S J. Stochastic analysis of fractional Brownian motions[J]. Stochastics and Stochastics Reports, 1995, 55(1/2): 121–140.

[12] Bender C, Elliott R J. Arbitrage in a discrete version of the Wick-fractional Black-Scholes market[J]. Mathematics of Operations Research, 2004, 29(4): 935–945.

[13] Björk T, Hult H. A note on Wick products and the fractional Black-Scholes model[J]. Finance and Stochastics, 2005, 9(2): 197–209.

[14] Hu Y, Øksendal B. Fractional white noise calculus and applications to finance[J]. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2003, 6(1): 1–32.

[15] Lei P, Nualart D. A decomposition of the bi-fractional Brownian motion and some applications[J]. Statistics and Probability Letters, 2009, 79(5): 619–624.

[16] Russo F, Tudor C. On the bifractional Brownian motion[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2006, 116(5): 830–856.

[17] Es-Sebaiy K, Tudor C A. Multidimensional bifractional Brownian motion: Itô and Tanaka’s formulas[J]. Stochastics and Dynamics, 2007, 7(3): 365–388.

[18] Nualart D, Taqqu M S. Wick-Itô formula for regular processes and applications to the Black and Scholes formula[J]. Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 2008, 80(5): 477–487.

[19] Hull John C. Options, Futures and Other Derivatives[M]. 7th Edition, New Jersey: Prentice Hall Press, 2009.

作者简介:

肖炜麟(1981—), 男, 湖南衡南人, 博士, 讲师, 研究方向: 资产定价与数量金融, Email: weilinhy@yahoo.com.cn;

张卫国(1963—), 男, 宁夏中卫人, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向: 金融工程与决策理论, Email: wgzhang@scut.edu.cn;

徐维东(1981—), 男, 宁夏固原人, 博士, 副教授, 研究方向: 资产定价与风险管理, Email: wdxu@zju.edu.cn.