

集合预报初始扰动产生的一个新方法：条件非线性最优扰动

穆穆 姜智娜

(中国科学院大气物理研究所, 大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029; 中国科学院研究生院, 北京 100039. E-mail: mumu@lasg.iap.ac.cn)

摘要 在不考虑模式误差的情况下, 用正压准地转模式探讨了条件非线性最优扰动(奇异向量在非线性框架下的推广)在集合预报中的可能应用. 奇异向量和条件非线性最优扰动被用来产生集合预报试验的初始扰动. 对 14 d 的预报结果作了比较, 发现用条件非线性最优扰动代替第一奇异向量的集合预报技巧在中期预报范围(6~14 d)明显高于奇异向量法. 该结论是在分析误差为快速增长扰动的条件下得到的, 即分析误差的非线性发展在预报后期快于奇异向量的非线性发展, 不依赖于分析误差的大小. 通过相似指数和经验正交函数分析, 解释了为什么用新方法产生的集合预报技巧优于奇异向量法.

关键词 集合预报 天气 奇异向量 条件非线性最优扰动

在大气和海洋的可预报性研究中, 集合预报是提供定量估计由初始误差引起的预报结果不确定性的一种普遍采用的方法 [1,2]. 显然, 这种方法在其他一些领域, 利用有观测误差的初始已知状态, 用动力模式预报其未来的状态, 有着潜在的应用. 集合预报中的核心问题之一, 就是产生能够真实地反映初始条件不确定性的初始集合扰动. 在许多文献中对各种扰动产生方法作了比较, 但没有一致的结论 [2~5]. 新的集合扰动的发展(如集合卡尔曼滤波), 或者是奇异向量方法的改进是目前集合预报发展的一个重要方向.

在欧洲中期天气预报中心(ECMWF), 奇异向量法作为初始集合扰动得到了成功的应用. 奇异向量是在预报前期总能量发展最快的一类扰动, 为其在集合预报中的应用提供了主要的理论依据 [6]. Gil-mour和Simith [7]指出在集合扰动的建立过程中采用线性近似存在着局限性. 鉴于奇异向量不能抓住非线性特征, Mu等人 [8]提出了一个新的方法: 条件非线性最优扰动, 它是奇异向量在非线性框架下的自然推广. 本研究采用准地转模式比较了条件非线性最优扰动和传统的奇异向量法在集合预报中的应用, 并探讨了条件非线性最优扰动的应用前景. 采用的是“完美模式”假定, 所有的预报误差都来自于初始场

的不确定性.

1 模式、方法和试验设计

1.1 模式

考察一种新方法在资料同化与集合预报中的有效性时, 人们通常从简单模式出发, 其中正压准地转模式是一个合适的选择. 例如Talagrand 和Courtier [9]关于四维变分资料同化的经典论文, 采用的即是正压准地转模式. 该类模式在大气科学的其他研究中, 也扮演着重要角色, 例如关于“慢流形”(slow manifold)的研究. 在Anderson [10]关于集合预报的研究中, 甚至采用了简单的三变量Lorenz模式. 为了把注意力集中在方法论的角度, 本研究采用二维无量纲的正压准地转模式:

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = 0, \\ q = \nabla^2 \psi - F\psi + f_0 + f_0 h_s, \text{ 区域 } \Omega \times [0, T], \\ \psi|_{t=0} = \psi_0, \end{cases} \quad (1)$$

未知变量是流函数 $\psi(x, y, t)$, q 是位势涡度, $F = \frac{f^2 L^2}{gH}$ 是行星尺度 Froude 数, f_0 是无量纲的科氏参数, H 是典型的特征高度, 本文中 $H = 10^4$ m, h_s 是无量纲化的

2006-12-11 收稿, 2007-04-04 接受

国家重点基础研究发展计划(编号: 2006CB400503)、中国科学院知识创新工程重要方向项目(批准号: KZCX3-SW-230)和国家自然科学基金(批准号: 40221503, 40675030)资助

地形. 区域 $\Omega = [0, 2X] \times [0, 2Y]$ 具有双周期边界条件. 特征长度 $L = 10^6$ m, 特征速度 $U = 10$ m/s, $F = 0.102, f_0 = 10.0$.

在下面的数值试验中, 对拉普拉斯项采用的是五点离散差分格式. 对雅可比项采用的是 Arakawa 有限差分格式. 时间离散采用的是 Adams-Bashforth 格式. $\Omega = [0, 6.4] \times [0, 3.2]$. 格点间距 $\Delta x = 0.2$, 时间步长 $\Delta t = 0.006$ 分别对应 200 km 和 10 min.

简单起见, 采用的地形仅为 y 的函数, 类似于文章 [11] 中的试验 2 或者 3. 具体形式为

$$h_s(y) = h_0 \times \left(\sin\left(\frac{4\pi y}{2Y}\right) + 1 \right), \text{ 其中 } h_0 = 0.112. \quad (2)$$

1.2 方法: 奇异向量和条件非线性最优扰动

对于时间 $T > 0$ 和初始状态 $\psi|_{t=0} = \psi_0$, 记模式(1)的传播算子为 M , $\psi(x, y, T) = M_T(\psi_0)$ 是方程(1)在时刻 T 的解. 此外, 也定义了 M 的切线性算子 M 和下面给出的能量范数意义下的伴随算子 M^* .

在本文中采用了两种范数, 能量范数和 L_2 范数. 能量范数定义为

$$\|\varphi\|_E^2 = \int_{\Omega} (|\nabla\varphi|^2 + F|\varphi|^2) dx dy, \quad (3)$$

L_2 范数定义为

$$\|\varphi\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} \varphi^2 dx dy, \quad (4)$$

其中 φ 为流函数.

在该研究中, 采用迭代的幂方法来计算奇异向量. 范数为能量范数. 详细计算过程可参考 Farrell 和 Moore [12].

条件非线性最优扰动为这样的初始扰动 $\varphi_{0\sigma}^*$, 即使目标函数 $J(\varphi_0)$ 在给定的初始约束条件 $\|\varphi_0\|_{L_2} \leq \sigma$ 下, 取到极大值.

$$J(\varphi_{0\sigma}^*) = \max_{\|\varphi_0\|_{L_2} \leq \sigma} J(\varphi_0), \quad (5)$$

其中

$$J(\varphi_0) = \|M_T(\psi_0 + \varphi_0) - M_T(\psi_0)\|_E, \quad (6)$$

ψ_0 为基态的初始场, φ_0 为初始扰动, σ 为给定的正常数, 代表初始不确定性的量.

为了获得目标函数 $J(\varphi_0)$ 在初始约束 $\|\varphi_0\|_{L_2} \leq \sigma$ 下的极大值, 我们计算了另一个新的目标函数, 即上面目标函数的倒数, 在约束 $\|\varphi_0\|_{L_2} \leq \sigma$ 下的极小值. 此过程需要得到新的目标函数关于初始扰动的梯度. 在计算梯度时用到了伴随技术. 采用的优化算法为谱投影梯度算法 (SPG2) [13], 这个算法可以计算在盒

子和球约束下目标函数的极小值. 此外, 这个算法不需要计算初始约束函数关于初始扰动的梯度, 这一点与 Mu 和 Zhang [11] 中采用的 SQP [14] 优化方法不同.

线性奇异向量近似决定预报的初始阶段相空间最不稳定的方向, 而条件非线性最优扰动代表满足一定的初始约束条件在优化时间段具有最大发展的一类扰动. 条件非线性最优扰动的结构依赖于内积和优化时间间隔的选择, 这点与奇异向量相似.

1.3 试验设计

该研究采用的是“完美模式”假定. 首先, 用非线性模式积分一个给定的准确的初始态, 从而产生一个参考的大气态. 在该研究中, 这个大气态被认为是一个“真实”态, 所有的预报场都与这个“真实”态作比较. 用同样的非线性模式积分分析场可获得参照预报场. 分析场的产生方法将在第 2.1 节中给出. 奇异向量和条件非线性最优扰动都是以参照预报场为基态计算出的, 优化时间段为 2 d. 在分析场上, 即参照预报场的初始场上, 加/减扰动从而产生扰动的初始集合场. 一个集合样本由扰动的初始集合预报和一个参照预报组成. 集合样本 1 (记为 S1) 的集合扰动由奇异向量组成; 把样本 1 中的第一奇异向量替换成条件非线性最优扰动, 其他不变, 组成了样本 2 (记为 S2) 的集合扰动. 也采用了蒙特卡洛方法 (记为 MC) 进行了集合预报, 用来与 S1 和 S2 的结果作比较. 集合 S1 和 S2, 由 7 个成员组成. 蒙特卡洛法由 23 个成员组成.

2 数值结果

2.1 分析场的产生

在“完美模式”假定下, 有如下几种产生分析场的方法. 根据 Toth 和 Kalnay [5], 繁殖模和分析误差之间存在着很大的相关, Houtekamer 和 Derome [15] 假定某个繁殖模为分析误差, 做了 2 个样本的集合预报试验. 鉴于资料同化是许多业务中心产生分析场的主要方法, Morss 等人 [16] 采用一个三维变分方法来产生分析场, 其中观测值通过在其真值上叠加随机误差获得. 在该研究中, 我们实施了一个简单的四维变分方法来产生分析场, 具体方法如下.

首先, 在每一个点的真值上叠加一个具有正态分布的随机误差产生观测值. 这样, 观测场的大小可以通过调整正态分布的标准偏差来控制.

根据资料同化方法, 假定 ψ_0^* 是这样的初始场,

其使下面目标函数 $J_1(\psi_0)$ 获得极小值

$$J_1(\psi_0^*) = \min_{\psi_0} J_1(\psi_0), \tag{7}$$

其中

$$J_1(\psi_0) = \frac{1}{2} (M_T(\psi_0) - \psi_T^{obs})^T W (M_T(\psi_0) - \psi_T^{obs}), \tag{8}$$

上标 T 表示矩阵的转置, W 是观测误差协方差矩阵的逆矩阵, ψ_T^{obs} 为 T 时刻的观测场, 此处 T 为 6 h. ψ_0^* 即为该研究采用的分析场. 求解(7)的细节可以参阅文献 [17,18].

2.2 预报试验

在这部分试验中, 真实场的初始场 ψ_0^t 定义为

$$\psi_0^t = 0.5 \sin\left(\frac{\pi x}{X}\right) + 1.0 \sin\left(\frac{\pi y}{Y}\right) + 0.5, \tag{9}$$

能量范数 $\|\psi_0^t\|_E = 6.582$, L_2 范数 $\|\psi_0^t\|_{L_2} = 4.234$. 以参照预报场为基态来计算奇异向量和条件非线性最优扰动. 这组试验讨论了不同分析误差大小下的试验结果. 在这我们采用集合平均预报作为评价集合预

报技巧的工具.

() 试验 1. 该试验中分析误差的能量范数为 0.656, 占真实场能量范数的 9.97%; 其 L_2 范数为 0.0664, 占真实场的 1.57%. 这种误差在真实大气中属于较大的分析误差. 在初始约束 $\sigma = 0.0664$ 的条件下, 求得了奇异向量和条件非线性最优扰动. 集合平均预报场和真实场的均方根误差随时间的变化如图 1(a)所示. 在第 11 d 之前, S1 提供了比蒙克卡洛法好的集合平均预报. 11 d 之后, 结果相反, 这可能是由于奇异向量不能抓住大的分析误差的非线性发展所致. 一个令人高兴的结果是, S2 从第 8~14 d 提供了一个非常好的集合平均预报, 而在预报前期, S2 的集合平均预报较差, 可能是由于条件非线性发展太快的缘故.

() 试验 2. 在此试验中, 分析误差的 L_2 范数为 0.0340, 小于试验 1 中的分析误差. 在初始约束 $\sigma = 0.0340$ 的条件下, 计算了奇异向量和条件非线性最优扰动. 集合平均预报场和真实场的均方根误差随时间

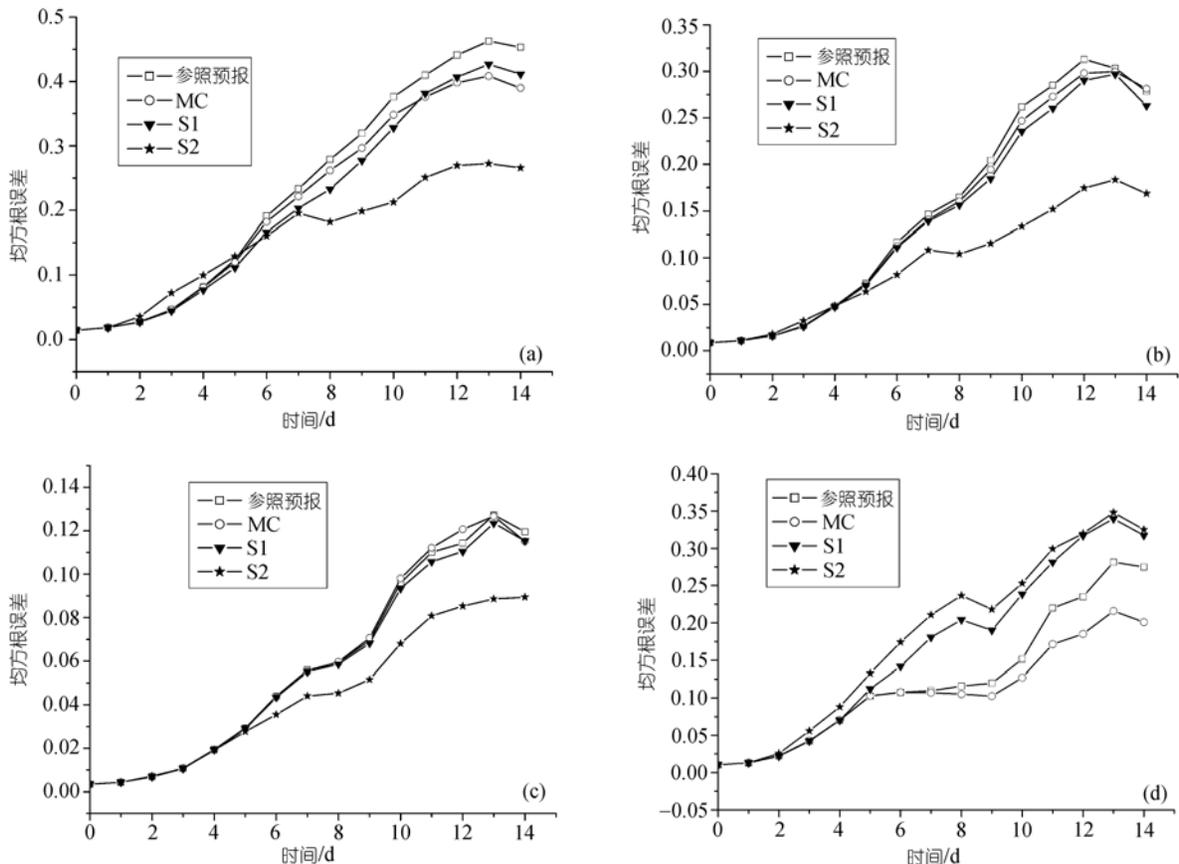


图 1 试验 1~4 中集合平均预报场和真实场的均方根误差随时间的变化

间的变化如图 1(b)所示. 结论与试验 1 类似, S2 的集合平均预报技巧在中期预报范围(5~14 d)仍然最高; 而且 S1 和 S2 在预报前期的预报效果差距减小. 在整个预报阶段蒙特卡洛方法稍微改善了预报效果.

() 试验 3. 在此试验中, 分析误差的 L_2 范数为 0.0158, 小于试验 2 中的分析误差. 集合平均预报场和真实场的均方根误差随时间的变化如图 1(c)所示. 容易发现, 对于该分析误差场, S1 和 S2 在预报前期几乎没有差别, 而从第 5~14 d, S2 仍然提高了预报技巧. 蒙特卡洛法在预报前期几乎没有改善预报效果, 在预报后期预报效果变差.

从以上的数值试验我们可以发现, 随着分析误差的减小, 在预报前期, S2 的集合平均预报效果逐渐接近 S1; 而在预报后期, S2 仍能够提供比 S1 效果好的集合平均预报. 这些结果启示我们, 当实际大气中分析误差较小时, 条件非线性最优扰动仍然可以用来作为集合扰动, 从而提高中期预报技巧.

2.3 另一个试验(试验 4)

在这个试验中, 真实场的初始场 ψ_0^t 为

$$\psi_0^t = 1.0 \sin\left(\frac{2\pi x}{2X}\right) + 1.0 \sin\left(\frac{2\pi y}{2Y}\right) + 5.0, \quad (10)$$

能量范数 $\|\psi_0^t\|_E = 10.156$, L_2 范数 $\|\psi_0^t\|_{L_2} = 23.073$. 分析误差的 L_2 范数为 0.0476, 占真实场的 0.206%. 在同样初始约束下求得了奇异向量和条件非线性最优扰动. 集合平均预报场和真实场的均方根误差随时间的变化如图 1(d)所示, 发现与以上 3 个试验差别很大. 相对于参照预报, 蒙特卡洛方法提高了平均预报技巧, 在整个预报阶段 S1 集合平均预报效果变差, S2 预报效果更差.

3 结果分析

我们从 L_2 范数的角度比较了分析误差、第一奇异向量和条件非线性最优扰动的非线性发展, 试图解释为什么在一些情况下 S1 和 S2 能够提高预报技巧, 而在另一些情况下 S1 和 S2 的预报效果变差, 并探讨了可能原因.

试验 1~3 的结果都表明, 第一奇异向量的非线性发展在预报前(后)期大于(小于)分析误差的非线性发展. 条件非线性最优扰动的非线性发展一直是三者中最大的. 简单起见, 仅给出了试验 1 的结果, 如图 2 所示.

试验 4 的情形与以上 3 个试验差别很大, 如图 3

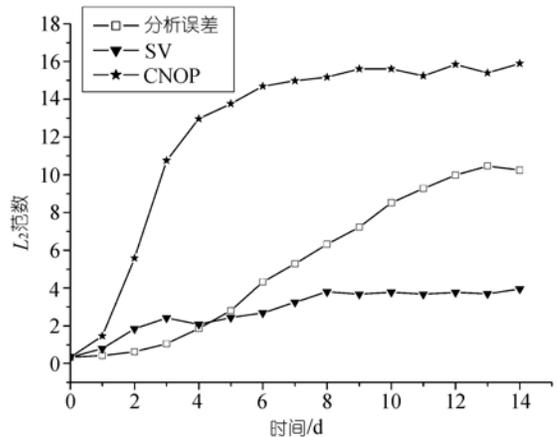


图 2 试验 1 中分析误差、第一奇异向量和条件非线性最优扰动在 L_2 范数意义下随时间的非线性发展

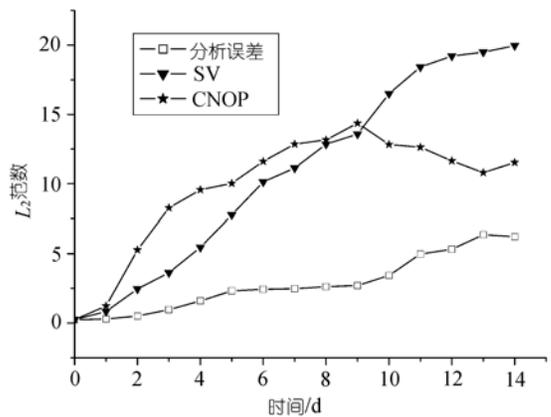


图 3 试验 4 中分析误差、第一奇异向量和条件非线性最优扰动在 L_2 范数意义下随时间的非线性发展

所示. 容易发现, 分析误差的非线性发展在整个预报阶段都要小于奇异向量和条件非线性最优扰动的非线性发展. 该文中, 试验 1~3 中的分析误差可认为是快速增长误差, 而试验 4 中的分析误差定义为缓慢增长误差.

以上分析表明, 当分析误差属于快速增长误差, 由奇异向量组成的集合样本能够改善预报效果, 如果把样本中第一奇异向量替换成对应的条件非线性最优扰动, 则在中期预报范围更大地改善了预报效果. 当分析误差属于缓慢增长误差, 发现蒙特卡洛方法的预报效果较好. 快速增长扰动的集合可能使平均预报效果变差.

大家知道, 集合预报是概率预报的一种近似实现形式. 在完美模式的条件下, 集合预报的效果主要依赖于初始扰动成员能否较好地表征初始的分析误

差. 在上面的试验中, 在分析误差是快速增长型时, SV 方法和我们的方法可以较好地表征初始的分析误差, 因而预报效果较好. 在分析误差是缓慢增长型时, SV 方法和我们的方法都不能较好地表征初始的分析误差, 因而使预报效果变差. 这些分析告诉我们, 了解分析场误差的信息, 进而采用合适的集合预报方法, 是很重要的. 另一方面, 考虑到集合预报的一个主要功能是提高极端天气事件的预报能力, 而对于极端天气事件而言, 初始的分析误差发展大都是快速增长的(否则在完美模式的条件下, 缓慢增长的误差不会导致预报极端天气事件的失败), 因此, 我们的新方法应该是有效的. 当然, 这需要进一步的试验和研究.

为了进一步理解在试验 1~3 中, 为什么 S2 比 S1 的集合平均预报效果好, 我们采用了相似指数和经验正交函数, 分析了分析误差和集合扰动的关系.

首先, 我们定义了一个相似指数 S [19,20], 用来定量地衡量模态间的相似程度.

$$S(t) = \langle e_t, ep_t \rangle / \|e_t\| \|ep_t\|, \quad (11)$$

其中 e_t 代表分析误差的非线性发展模态, ep_t 代表集合扰动的非线性发展模态. 从以上的公式可以发现, S 的范围为 $[-1, 1]$. 此外, S 依赖于内积的选择. 在该研究中, 分别采用了能量范数和 L_2 范数来计算.

定义 $\psi^i(t)$ 为 t 时刻的真实场, $\psi^c(t)$ 为 t 时刻的参照预报场, $\psi^e(t)$ 为 t 时刻的集合平均预报场. 下面的关系成立,

$$\psi^c(t) - \psi^i(t) = e_t, \quad (12)$$

$$\psi^e(t) - \psi^c(t) = ep_t, \quad (13)$$

因此,

$$\psi^e(t) - \psi^i(t) = ep_t + e_t, \quad (14)$$

这表明 S 的负相关越高, 集合平均预报越准确.

图 4 分别给出实验 1 中能量范数和 L_2 范数情况下 S 随时间的变化. 结果发现, 无论是能量范数还是 L_2 范数, S2 和分析误差的相似指数 S 在第 3~14 d 范围比 S1 和分析误差的 S 负值高, 这表明在这个时间段 S2 的平均预报比 S1 的平均预报更准确. 试验 2, 3 结论与实验 1 类似, 图示省略.

然后, 我们采用经验正交函数, 分析了不同误差主要模态间的关系. 经验正交函数分析是海洋和气象研究中广泛采用的方法. 以试验 1 为例, 采用经验正交函数得到分析误差和集合扰动的非线性发展(14 d)的前 3 个模态, 解释了各自的主要方差(表 1). 试验 2, 3 结论类似. 每个模态归一化从而使总的空间方差

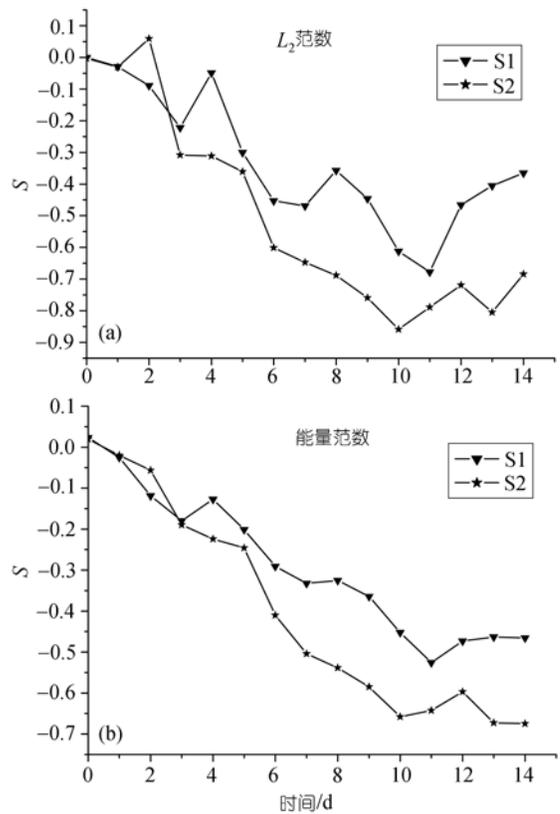


图 4 (a) 分析误差和 S1, 分析误差和 S2 在 L_2 范数意义下的相似指数随时间的变化; (b) 与 (a) 相同, 但为能量范数情况

表 1 分析误差, S1 和 S2 前 3 个模态所占方差和总方差

扰动	第一模态	第二模态	第三模态	总方差
分析误差	0.517	0.206	0.135	0.858
S1	0.616	0.197	0.099	0.912
S2	0.594	0.171	0.105	0.870

为 1.

结果表明分析误差非线性发展的第一模态显现出经向结构特征. 第二模态在纵向上呈现出低/高结构, 低值区比高值区小. 第三模态在纵向上呈现出高/低结构, 低值区和高值区相当. 同样, 也得到了 S1 和 S2 集合扰动非线性发展的前 3 个模态. 然后计算了分析误差的每个模态分别与 S1 和 S2 的相似指数(如表 2), 发现 S2 每个模态与分析误差对应模态负相关更高. 也就是说, S2 中的集合扰动能够更好地抓住分析误差的非线性发展模态.

4 结论和讨论

本文采用“完美模式”假定下的准地转模式, 所

表2 分析误差各个模态分别与 S1 和 S2 对应模态的相似指数

扰动	第一模态	第二模态	第三模态
S1	-0.573	0.316	0.166
S2	-0.833	-0.722	-0.735

有的预报误差都来自于初始场的不确定性。结果表明,当分析误差为快速增长类型时,在预报前期,S1和S2的集合平均预报没有显著的差别。在预报后期S2的平均预报效果最好。随着分析误差的减小,S2在预报前期的预报效果逐渐接近于S1。我们也探讨了分析误差为缓慢增长类型的情况。结果表明,蒙特卡洛方法提高了预报技巧。S1和S2都使预报效果变差。这表明,当分析误差为快速增长类型时,与奇异向量方法相比,CNOP方法能够更好地表征初始分析误差的发展,因而集合预报的效果较好。而分析误差为缓慢增长类型时,奇异向量方法和CNOP方法都不能较好地表征初始分析误差的发展,导致集合预报的效果较差。

此外,我们采用相似指数和经验正交函数,分析探讨了分析误差为快速增长的情况,发现无论在能量范数还是在 L_2 范数情况下,S2与分析误差的相似指数在中期预报范围比S1与分析误差的相似指数负值高。经验正交函数分析也表明分析误差的前3个模态与相应的S2的各个模态更接近。这些分析从另一角度解释了为什么在预报后期(5~14 d)集合S2比S1的预报效果好。

本文是完美模式框架下CNOP方法在集合预报中的初步探讨,S2中仅采用了一个条件非线性最优扰动,并采用集合平均预报评价预报技巧。我们的分析表明,何种初始集合扰动方法效果较好依赖于分析误差的类型,这从集合预报是概率预报的近似实现形式的角度看,是不难理解的。为了探讨条件非线性最优扰动在集合预报中的应用,下一步,我们需要采用更复杂的模式,做更多的数值试验(如:不同的地形,或者是其他外强迫形式的引入),并采用多种评价方法来考察上面的数值结果。将尝试把不同约束半径或者不同优化时间条件的条件非线性最优扰动应用到集合预报中,特别要研究局部条件非线性最优扰动的作用,探讨这样形成的集合是否能够更好地提高预报质量。

致谢 王佳峰提供有关计算奇异向量的资料,王鑫提供经验正交函数的相关程序,特此一并致谢。

参 考 文 献

- Cai M, Kalnay E, Toth Z. Bred vectors of the Zebiak-Cane model and their potential application to ENSO predictions. *J Clim*, 2003, 16(1): 40—56[DOI]
- Buizza R, Houdekamer P L, Toth Z, et al. A comparison of the ECMWF, MSC, and NCEP global ensemble prediction systems. *Mon Weather Rev*, 2005, 133(5): 1076—1097[DOI]
- Houdekamer P L, Derome J. Methods for ensemble prediction. *Mon Weather Rev*, 1995, 123(7): 2181—2196[DOI]
- Hamill T M, Snyder C, Morss R E. A comparison of probabilistic forecasts from bred, singular-vector, and perturbed observation ensembles. *Mon Weather Rev*, 2000, 128: 1835—1851[DOI]
- Toth Z, Kalnay E. Ensemble forecasting at NMC: the generation of perturbations. *Bull Amer Meteorol Soc*, 1993, 74(12): 2317—2330[DOI]
- Ehrendorfer M, Tribbia J J. Optimal prediction of forecast error covariances through singular vectors. *J Atmos Sci*, 1997, 54(2): 286—313[DOI]
- Gilmour I, Smith L A. Enlightenment in shadows. In: Kadtke J B, Bulsara A, eds. *Applied Nonlinear Dynamics and Stochastic Systems Near the Millennium*. New York: Springer-Verlag, 1997. 335—340
- Mu M, Duan W S, Wang B. Conditional nonlinear optimal perturbation and its application. *Nonlinear Process Geophys*, 2003, 10: 493—501
- Talagrand O, Courtier P. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. *J R Meteorol Soc*, 1987, 113: 1311—1328[DOI]
- Anderson J L. The impact of dynamical constraints on the selection of initial conditions for ensemble predictions: Low-order perfect model results. *Mon Weather Rev*, 1997, 125(11): 2969—2983[DOI]
- Mu M, Zhang Z Y. Conditional nonlinear optimal perturbations of a barotropic model. *J Atmos Sci*, 2006, 63: 1587—1604[DOI]
- Farrell B F, Moore A M. An adjoint method for obtaining the most rapidly growing perturbation to oceanic flows. *J Phys Oceanogr*, 1992, 22: 338—349[DOI]
- Birgin E G, Martinez J M, Raydan M. Nonmonotone spectral projected gradient methods for convex sets. *SIAM J Optim*, 2000, 10(4): 1196—1211[DOI]
- Powell M J D. VMCWD: A Fortran Subroutine for Constrained Optimization. In: *ACM SIGMAP Bulletin*. New York: ACM Press, 1983. 4—16
- Houdekamer P L, Derome J. Prediction experiments with two-member ensembles. *Mon Weather Rev*, 1994, 122: 22179—2191[DOI]
- Morss R E, Emanuel K, Snyder C. Idealized adaptive observation strategies for improving numerical weather prediction. *J Atmos Sci*, 2001, 58: 210—234[DOI]
- Xu H, Mu M, Luo D H. Application of nonlinear optimization method to sensitivity analysis of numerical model. *Prog Nat Sci*, 2004, 14(6): 546—549[DOI]
- Jiang Z N, Luo D H. Study of the optimal precursors for blocking events. *Adv Atmos Sci*, 2005, 2(3): 408—414
- Buizza R. Sensitivity of optimal unstable structures. *J R Meteorol Soc*, 1994, 120: 429—451[DOI]
- Kim H M, Morgan M C, Morss R E. Evolution of analysis error and adjoint-based sensitivities: Implications for adaptive observations. *J Atmos Sci*, 2004, 61(7): 795—812[DOI]