

# 升温与加载顺序对 N Ti 纤维圆柱体应力分布的影响

贺微波, 金明, 赵永利

(北京交通大学 土木建筑工程学院力学系, 北京 100044)

**摘要:** 利用具有预应变 N Ti 纤维的圆柱体剪滞模型, 在一定的简化条件下, 求得纤维轴向应力及界面剪应力解析表达式。针对马氏体逆相变过程, 在先加外载后升高温度与先升高温度后加外载两种条件下, 对纤维和界面的应力分布以及马氏体逆相变开始温度的确定进行分析。计算结果表明, 由于纤维轴向应力对相变温度存在影响, 升温与加载的顺序不同其应力分布也不同。先加外载后升温时, N Ti 纤维逆相变开始温度较高, 逆相变过程较短, 因此纤维轴向应力及界面剪应力较小。

**关键词:** N Ti 纤维; 应力分布; 升温与加载顺序; 逆相变

**中图分类号:** TB330.1; TB381

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1005-5053(2009)02-0081-04

对纤维复合材料进行强度分析, 需要确定复合材料界面应力传递方式及分布。纤维圆柱体剪滞模型常被应用于研究纤维复合材料界面应力传递机理, 对于普通纤维圆柱体剪滞模型, 其应力传递方式及分布的研究已取得了许多成果<sup>[1-3]</sup>。N Ti 形状记忆纤维智能复合材料在航空航天、土木工程等领域具有广阔的应用前景, 但是对这种复合材料界面应力传递的研究却有限。利用含有 N Ti 纤维的圆柱体剪滞模型, Wang Xiaoling<sup>[4]</sup>采用完全奥氏体相的 N Ti 纤维, 在给定的温度, 针对马氏体相变过程, 进行了应力传递及分布的研究, 该研究需要确定马氏体相变时的应力, 并不需要确定马氏体相变时的温度; Chik in Poon 等<sup>[5,6]</sup>采用具有预应变的 N Ti 纤维, 针对马氏体逆相变过程, 在先升高温度产生马氏体逆相变之后再给纤维施加载荷的条件下, 从理论和实验对纤维拔出应力进行分析。然而值得注意的是, N Ti 纤维未承受载荷时, 其马氏体逆相变温度是已知的参数; 若承受载荷, 其马氏体逆相变温度未知, 需要依据应力情况来确定。在先给圆柱体中的 N Ti 纤维施加载荷后再升高温度的条件下, 由于纤维已承受载荷且各处的应力不相同, 对应的马氏体逆相变温度也就不同, 应判断出马氏体逆相变温度, 才能进行可靠的分析。

本文将具有预应变的 N Ti 纤维埋入圆柱形基体

中, 构成 N Ti 纤维圆柱体剪滞模型, 在一定的简化条件下, 导出应力分布表达式。针对马氏体逆相变过程, 在先施加外载后升高温度与先升高温度后施加外载两种条件下, 依据纤维轴向应力确定其马氏体逆相变温度, 并分析讨论纤维及界面的应力分布。

## 1 理论分析

### 1.1 N Ti 纤维圆柱体模型

将有初始预应变  $\varepsilon_{e0}$  的 N Ti 纤维埋入圆柱形基体中, 如图 1 所示, 圆柱体两端及外侧面为自由面,  $b$  及  $2L$  为圆柱体的半径及长度,  $r$  为圆柱体中任意点距轴线的距离,  $a$  为纤维的半径,  $\sigma_0$  为纤维两端承受的外部载荷。

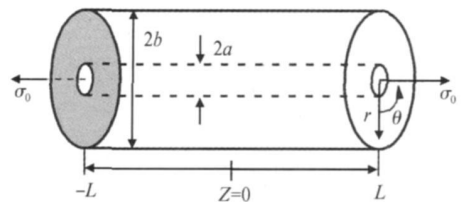


图 1 N Ti 纤维圆柱体模型

Fig 1 N Ti fiber matrix cylinder model

### 1.2 N Ti 形状记忆纤维的本构关系

在马氏体逆相变过程中, N Ti 纤维一维本构关系采用 Tanaka 模型<sup>[7]</sup>:

$$\sigma_f - \sigma_{f0} = D(\varepsilon_f - \varepsilon_{f0}) + \Omega(\xi_s - \xi_{s0}) + \theta(T - T_0) \quad (1)$$

$$(\sigma_f / C_A + A_s < T < (\sigma_f / C_A + A_f))$$

式中,  $\sigma_f$ ,  $\sigma_{f0}$ ,  $\varepsilon_f$ ,  $\varepsilon_{f0}$ ,  $\xi_s$ ,  $\xi_{s0}$  及  $T$ ,  $T_0$  分别为纤维的应力, 应变, 马氏体含量及温度, 下标 '0' 表示初始值;  $D$ ,  $\theta$ ,  $\varepsilon_s$ ,  $\Omega = -\varepsilon_s D$  分别为纤维的弹性模量, 热弹性

收稿日期: 2008-06-26 修订日期: 2008-09-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(90205007)

作者简介: 贺微波(1962—), 男, 博士研究生, 从事形状记忆合金纤维复合材料性能的研究, (E-mail) hwbhly@126.com.

系数, 回复应变极限和相变系数;  $C_A$  为应力对相变温度的影响系数;  $A_s, A_f$  为自由态 N T i 纤维马氏体逆相变开始与结束温度。

当产生马氏体逆相变时, 采用 Lin<sup>[8]</sup> 提出的马氏体相变动力学关系:

$$\xi = \frac{\xi_0}{A_f - A_s} (A_f - T + \frac{\sigma_f}{C_A}) \quad (2)$$

给纤维施加载荷后再升高温度, N T i 纤维将经历马氏体逆相变前与马氏体逆相变过程两个阶段。

相变前应力与应变关系如下:

$$\sigma_f = D (\varepsilon_f - \varepsilon_{res}) + \theta(T - T_\infty) \quad (3)$$

式中  $\varepsilon_{res}$  为纤维预应变,  $T_\infty$  为环境温度。

相变过程: (1) 式初始条件为  $\sigma_0 = \sigma_{f_0}, \varepsilon_0 = \varepsilon_{f_0}, T_0 = T_c, \xi_0 = \xi_c$ , 其中  $\sigma_{f_0}, \varepsilon_{f_0}, T_c$  是与相变临界状态对应的纤维应力、应变及相变开始温度, 这些参数也应满足 (3) 式, 从而可推得相变过程中纤维应力与应变关系的表达式:

$$\sigma_f = D (\varepsilon_f - \varepsilon_{res}) + \Omega(\xi - \xi_0) + \theta(T - T_\infty) \quad (4)$$

### 1.3 基体的轴向正应力与剪应力表达式

对于纤维圆柱体剪滞模型, 要求得出精确解是十分困难的。Cartney<sup>[9]</sup> 利用平衡方程及假设 (基体的轴向应力梯度只是  $z$  的函数) 推得如下关系:

$$\tau_m(r, z) = \frac{a\tau_a}{b^2 - a^2} (\frac{b^2}{r} - r) \quad (5)$$

式中  $\tau_m(r, z), \tau_a = \tau_m(a, z)$  分别是基体的轴向剪应力, 界面剪应力。

基体采用热弹性材料, 其轴向正应力、剪应力与变形的近似关系如下:

$$\sigma_m(r, z) = E \frac{\partial w_m(r, z)}{\partial z} - E\alpha(T - T_\infty) \quad (6)$$

$$\tau_m(r, z) = \frac{E}{2(1 + \mu)} \frac{\partial w_m(r, z)}{\partial r} \quad (7)$$

式中  $\sigma_m(r, z), w_m(r, z), E, \mu, \alpha$  分别为基体的轴向应力、轴向位移、弹性模量、泊松比、热膨胀系数。

将 (5) 代入 (7) 并对  $r$  从  $a$  到  $b$  积分, 可推得界面及基体剪应力:

$$\tau_a = \frac{E s_2}{2a(1 + \mu) s_1} (w_b - w_a) \quad (8)$$

$$\tau_m(r, z) = \frac{E}{2(1 + \mu) s_1} (w_b - w_a) (\frac{b^2}{r} - r) \quad (9)$$

式中  $w_a = w_m(a, z), w_b = w_m(b, z)$  为  $r = a, b$  处基体的轴向位移;  $s_1 = b^2 \ln(b/a) - (b^2 - a^2)/2, s_2 = b^2 - a^2$  为常数。

将 (7) 代入 (9) 并对  $r$  从  $a$  到  $r$  积分得:

$$w_m(r, z) = w_a + \frac{w_b - w_a}{s_1} (b^2 \ln \frac{r}{a} - \frac{r^2 - a^2}{2}) \quad (10)$$

将 (10) 代入 (6) 得基体轴向应力:

$$\sigma_m(r, z) = \frac{E}{dz} \frac{dw_a}{dz} + \frac{E}{s_1} (\frac{dw_b}{dz} - \frac{dw_a}{dz}) (b^2 \ln \frac{r}{a} - \frac{r^2 - a^2}{2}) - E\alpha(T - T_\infty) \quad (11)$$

由 (2), (4) 及变形协调关系 ( $r = a$  处的基体轴向应变等于纤维的回复应变  $\varepsilon_f - \varepsilon_{res}$ ), 得:

$$\frac{dw_a}{dz} = \frac{1}{D} [ (1 - \frac{s_3}{C_A}) \sigma_f - s_3 (A_s - T) - \theta(T - T_\infty) ] \quad (12)$$

式中  $s_3 = \Omega \xi_0 / (A_f - A_s)$  为常数。由 (6) 可得:

$$\frac{dw_b}{dz} = \frac{1}{E} \sigma_b + \alpha(T - T_\infty) \quad (13)$$

式中  $\sigma_b = \sigma_m(b, z)$  为  $r = b$  处基体的轴向应力。

### 1.4 纤维轴向正应力及界面剪应力

截取一段圆柱体, 其平衡条件为:

$$\sigma_0 = \sigma_f + \frac{2}{a} \int_a^b \sigma_m(r, z) r dr \quad (14)$$

取一微段纤维, 其平衡条件为:

$$\frac{d\sigma_f}{dz} = - \frac{2}{a} \tau_a \quad (15)$$

由 (8), (11) ~ (15) 并消去  $\sigma_b$  可推得逆相变过程中 N T i 纤维轴向应力的微分方程如下:

$$\frac{d^2 \sigma_f}{dz^2} - \eta_1^2 \sigma_f = \lambda_1 \quad (16)$$

由 (16), (15) 可得逆相变过程中 N T i 纤维轴向应力  $\sigma_f^{(1)}$ , 界面剪应力  $\tau_a^{(1)}$  的通解如下:

$$\sigma_f^{(1)} = A_1 e^{\eta_1 z} + A_2 e^{-\eta_1 z} - \frac{\lambda_1}{\eta_1^2} \quad (17)$$

$$\tau_a^{(1)} = - \frac{a}{2} \eta_1 (A_1 e^{\eta_1 z} - A_2 e^{-\eta_1 z}) \quad (18)$$

对于 (17), (18) 式, 若令  $\Omega = 0$  则可得逆相变前 N T i 纤维轴向应力  $\sigma_f^{(2)}$ , 界面剪应力  $\tau_a^{(2)}$  的通解:

$$\sigma_f^{(2)} = B_1 e^{\eta_2 z} + B_2 e^{-\eta_2 z} - \frac{\lambda_2}{\eta_2^2} \quad (19)$$

$$\tau_a^{(2)} = - \frac{a}{2} \eta_2 (B_1 e^{\eta_2 z} - B_2 e^{-\eta_2 z}) \quad (20)$$

以上 (16) ~ (20) 式中,  $A_1, A_2, B_1, B_2$  为待定常数,  $\eta_1, \eta_2$  是与材料及几何尺寸相关的常数,  $\lambda_1, \lambda_2$  与温度  $T$  和外载荷  $\sigma_0$  相关。

## 2 算例及分析

在先施加外载后再升高温度与先升高温度后再

施加外载两种条件下,对于普通弹性纤维圆柱体剪滞模型,其应力分布是相同的,但对于具有预应变 NiTi 纤维圆柱体剪滞模型,由于存在相变,则应分两种情况讨论。其一:先施加外载  $\sigma_0 = 55\text{MPa}$  后将温度由  $T_\infty = 20^\circ\text{C}$  升至  $T = 40^\circ\text{C}$ ,分析见 2.1 节;其二:先将温度由  $T_\infty = 20^\circ\text{C}$  升至  $T = 40^\circ\text{C}$ ,后施加外载  $\sigma_0 = 55\text{MPa}$ ,分析见 2.2 节。

NiTi 纤维参数:  $\epsilon_{\text{res}} = 0.027$ ,  $\xi_0 = 0.4$ ,  $\epsilon_i = 0.067$ ,  $A_s = 34.5^\circ\text{C}$ ,  $A_f = 49^\circ\text{C}$ ,  $C_A = 13.8\text{MPa}/^\circ\text{C}$ ,  $D = 46.7\text{GPa}$ ,  $\theta = 0.55\text{MPa}/^\circ\text{C}$ 。环氧树脂基体参数:  $E = 2.3\text{GPa}$ ,  $\mu = 0.35$ ,  $\alpha = 4 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$ ,  $L = 5\text{mm}$ ,  $a = L/10$ ,  $b = 5a$ 。

2.1 先加外载作用后再升高温度时的应力分布

在先施加外载  $\sigma_0$  后再升高温度的条件下,应先确定无相变时纤维轴向应力的分布特征;然后依据该特征,确定纤维各处以及整段纤维开始产生相变的温度及应力分布。

2.1.1 无相变时纤维轴向应力

施加外载  $\sigma_0 = 55\text{MPa}$  后,温度由  $T_\infty = 20^\circ\text{C}$  升至  $T = A_s = 34.5^\circ\text{C}$  时, NiTi 纤维无相变但已接近相变,由 (19), (20) 式及边界条件:  $z = 0, \tau_a^{(2)} = 0, z = L, \sigma_f^{(2)} = \sigma_0$ , 可得纤维轴向应力分布见图 2。

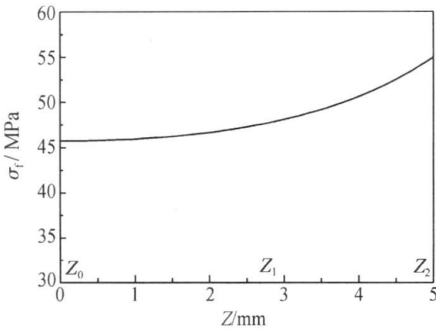


图 2 NiTi 纤维轴向应力分布

Fig. 2 The NiTi fiber axial stress distribution

2.1.2 有相变时纤维轴向应力、界面剪应力及逆相变开始温度的确定

NiTi 纤维逆相变开始温度随其应力增大而升高,纤维各处的轴向应力不同,则各处开始产生相变的温度也不同。由图 2 可知, NiTi 纤维接近相变时,  $z_0 = 0$  处纤维的轴向应力最小,会先产生相变,  $z_2 = L$  处纤维的轴向应力最大,将后产生相变。

设纤维中任意一点  $z_1$  (见图 2) 处于相变临界状态,其相变温度为  $T_c$  (待定)。此时  $z_0z_1$  段为有相变区,其应力由 (17), (18) 式确定;  $z_1z_2$  段为无相变区,其应力由 (19), (20) 式确定。

边界条件:  $z = 0, \tau_a^{(1)} = 0, z = z_1, \sigma_f^{(1)} = \sigma_f^{(2)}$ ,

$$\tau_a^{(1)} = \tau_a^{(2)}; z = L, \sigma_f^{(2)} = \sigma_0。$$

相变关系:  $z_1$  处纤维的应力  $\sigma_f^{(1)}$ 、温度  $T_c$  及马氏体含量  $\xi = \xi_0$  应满足关系式 (2)。

若给定  $z_1$  之值,由边界条件与相变关系可求得  $A_1, A_2, B_1, B_2, T_c$  之值,从而可确定  $z_0z_1$  段与  $z_1z_2$  段的应力分布。

当  $z_1 = L/2$  时,  $z_1$  处的相变温度  $T_c = 38.21^\circ\text{C}$ , 应力分布见图 3 与图 4 中的曲线 ①; 当  $z_1 = z_2 = L$  时,  $z_2$  处的相变温度  $T_c = 38.49^\circ\text{C}$ , 此时纤维各处均产生相变,应力分布见图 3 与图 4 中的曲线 ②; 当温度上升至  $T = 40^\circ\text{C}$  时,纤维各处均已产生相变,应力分布见图 3 与图 4 中的曲线 ③。

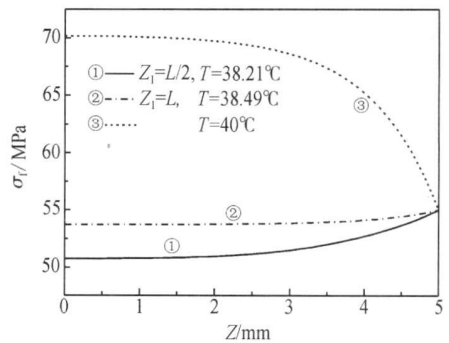


图 3 NiTi 纤维轴应力分布

Fig. 3 The NiTi fiber axial stress distribution

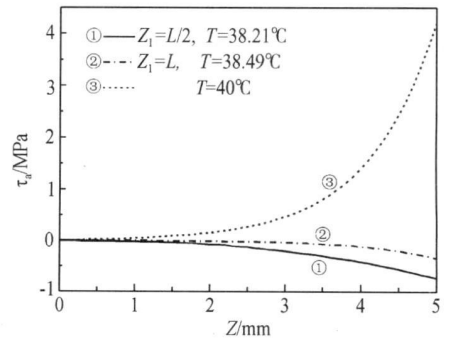


图 4 界面剪应力分布

Fig. 4 The interface shear stress distribution

2.2 先升高温度后再加外载时的应力分布

无外载作用  $\sigma_0 = 0$  温度由  $T_\infty = 20^\circ\text{C}$  升至  $T = 40^\circ\text{C}$ , 此时纤维各处均已产生相变,由 (17), (18) 式以及边界条件  $z = 0, \tau_a = 0, z = L, \sigma_f = \sigma_0 = 0$  可求出此阶段纤维轴向应力  $\sigma_f$  及界面剪应力  $\sigma_a$ 。

在  $T = 40^\circ\text{C}$  保持恒定时,施加外载  $\sigma_0 = 55\text{MPa}$ , 此时纤维各处均无逆相变产生,由 (19), (20) 式以及边界条件  $z = 0, \tau_a = 0, z = L, \sigma_f = \sigma_0$ , 可求出此阶段的纤维轴向应力  $\sigma_f$  及界面剪应力  $\sigma_a$ 。

上述两阶段的应力叠加就得到先升温后再加外载时的应力分布,见图 5 图 6 中的曲线 ②。图 5 图

6中的曲线①为先加载后升温时的应力分布,可见两图中曲线①的应力小于曲线②的应力。这是因为:对于先加载后升温时的应力曲线①,在升温时纤维已承受较大的轴向应力,纤维开始产生相变的温度较高,温度升至  $T = 40^{\circ}\text{C}$  时,所经历的相变过程较短,所以由相变引起的应力较小。

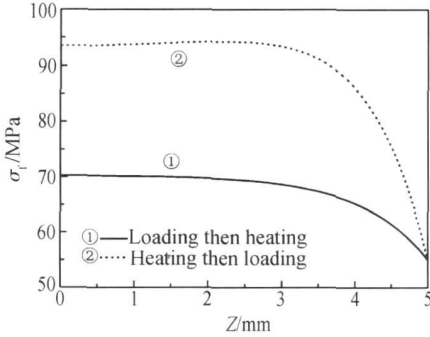


图 5 NiTi 纤维轴向应力分布

Fig. 5 The NiTi fiber axial stress distribution

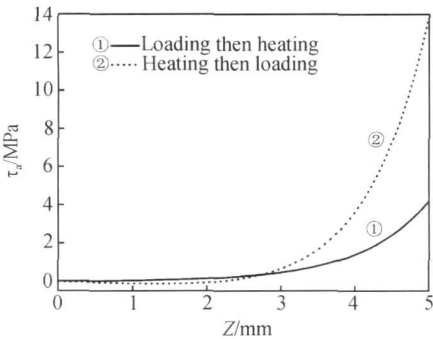


图 6 界面剪应力分布

Fig. 6 The interface shear stress distribution

### 3 结束语

以上分析表明,对于具有预应变 NiTi 纤维圆柱体剪滞模型,在同样的起始与终止状态,如果加载与

升温的顺序不同,纤维轴向应力及界面剪应力的分布存在明显的差异。加载之后再升温产生相变时, NiTi 纤维逆相变开始温度较高,温度升至最终温度时,纤维经历的逆相变过程较短,相变引起的应力较小。

### 参考文献:

- [1] GAO Yu-chen Fracture of fiber-reinforced materials [J]. Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 1988, 39: 550-572
- [2] NAIRN J.A. On the use of shear-lag methods for analysis of stress transfer in unidirectional composites [J]. Mechanics of Materials, 1997, 26: 63-80
- [3] FU Shao-yun, YUE Chee-yoon Analysis of the micromechanics of stress transfer in single- and multi-fiber pullout tests [J]. Composites Science Technology, 2000, 60: 569-579
- [4] WANG Xiao-ling, HU Geng-kai Stress transfer for a SMA fiber pulled out from an elastic matrix and related bridging effect [J]. Composites Part A, 2005, 36: 1142-1151
- [5] POON Chik-in Design of pull-out stresses for prestained SMA wire/polymer hybrid composites [J]. Composites Part B, 2005, 36: 25-31
- [6] POON Chik-in, ZHOU Lin-in Interfacial debond of shape memory alloy composites [J]. Smart Materials and Structures, 2005, 14: 29-37
- [7] TANAKA K. A thermomechanical sketch of shape memory effect one-dimensional tensile behavior [J]. ResMechanica, 1986, 118: 251-263
- [8] LIN M.W., ROGERS C.A. Analysis of stress distribution in a shape memory alloy composite beam [M]. AIAA-91-1164-CP, 1991: 169-177
- [9] CHUN-HWAY Hsueh Modifications of fibre pull-out analysis [J]. Journal of Materials Science Letters, 1992, 11: 1663-1666

## Effect of Different Ways of Heating and Loading on Stress Distribution of Cylinder Model with Prestrained NiTi Fiber

HE Wei-bo, JIN Ming, ZHAO Yong-li

(Institute of Engineering Mechanics, School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract** A typical cylinder model with a prestrained NiTi fiber was employed to analyse the stress transfer. During the reverse transformation and under the simplified conditions, the stress formulae of the NiTi fiber and the interface were obtained. Additionally, the effective austenite start temperature of the NiTi fiber was determined according to its axial stress. It is shown that there are different stress distributions for different ways of heating and loading due to the effect of NiTi fiber axial stress on the effective austenite start temperature. Upon loading then heating, the effective austenite start temperature of the NiTi fiber is higher, and the process of the reverse transformation is shorter, so the NiTi fiber axial stress and the interface shear stress become lower.

**Key words** NiTi fiber; stress distribution; way of heating and loading; reverse transformation