

# 自适应多重分辨率的组合 ENO 差分格式构造

朱军政

(浙江省水利河口研究院, 杭州 310020)

**摘要** 以减少单步差分格式的计算量为目的, 提出一类杂交高分辨率格式, 它由高阶高分辨率和较低阶高分辨率的两种格式组合而成, 通过引入一个具有自适应性质的开关函数使得新格式具有这样的性质: 在解的强烈变化区域采用高阶格式, 在解的光滑区域采用较低阶格式. 从某种意义上说, 本文提出的组合高分辨率格式具有自适应多重分辨率的思路. 数值试验表明, 这种组合高分辨率格式能有效地减少单步差分格式的计算量.

**关键词** 组合 ENO 格式, 自适应多重分辨率格式, 有限差分法

双曲守恒型方程数值模拟面临的挑战是在不连续(激波和接触间断)区域和光滑区域都获得高精度高分辨率解. 众所周知, 现有的数值求解双曲守恒方程的经典差分格式大致可分为中心型和迎风型两大类, 其中迎风型差分格式能消除激波附近可能出现的非物理本质振荡, 能够保证间断解没有锯齿形状的分辨率, 但它带进了数值耗散使得间断被抹平, 需要多个网格点才能分辨出来, 一般来说在光滑区域迎风差分格式得到的是低精度解, 而中心型差分格式在光滑区域有良好的分辨率, 但在陡峭梯度附近出现非物理本质的振荡, 有时还会导致非线性的不稳定性. 为了克服上述困难, 近十几年来发展了各种各样的激波捕捉格式, 这些差分格式通常称为“高分辨率格式”, 其主要特性有: 在光滑区域至少二阶精度, 在间断区域不发生非物理本质振荡, 并有较高的分辨率, 与经典二阶或高阶格式相比不需要附加特别的人工黏性项. 这些高分辨率格式的基本思路是尽可能用高阶格式, 同时在局部陡峭梯度区域自适应地加入足够的耗散以消除可能的数值振荡. 这些格式主要包括 TVD, UNO, ENO, TVB, NND 等差分格式, 从数值实例来看, 以上这些格式对于计算包含激波等陡峭梯度的流场是极有吸引力的, 然而由于其格式构造方法不同于经典差分格式, 这些格式的表达式十分复杂, 单步的计算量增加了很多, 这对于大规模的数值模拟带来了不利的一面. 为此 Harten<sup>[1]</sup> 提出了自适应多重分辨率的概念及其格式的构造, 其目的是在网格空间上具有相同截断误差的前提下, 以牺牲数值解的分辨率为代价, 减少单步差分格式的计算量. 本文同样以减少单步差分格式的计算量为目的, 提出一类高分辨率格式的组合形式, 它由高阶高分辨率和较低阶高分辨率的两种格式组合而成, 通过引入一个具有自适应性质的开关函数使得新格式具有如下性质: 在解的强烈变化区域采用高阶格式, 在解的光滑区域采用较低阶格式. 从某种意义上说, 本文提出的组合高分辨率格式

具有自适应多重分辨率的思路. 数值试验表明, 这种组合高分辨率格式能有效地减少单步差分格式的计算量.

## 1 差分格式的构造

考虑双曲型守恒方程初值问题弱解的数值逼近

$$u_t + f(u)_x \equiv u_t + a(u)u_x = 0 \quad (1a)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < t < +\infty \quad (1b)$$

这里,  $f(u)$  称为通量函数,  $a(u) = df/du$  为特征速度.

式(1)的一般形式的显式差分格式可写成

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(h_{j+1/2}^n - h_{j-1/2}^n) \quad (2)$$

其中,  $\lambda = \Delta t/\Delta x$  是网格尺度比, 构造不同的数值通量函数  $h$  可得到不同的差分格式.

J.Y. Yang 的 ENO 格式写成式(2)的形式时其数值通量  $h_j^n$  的定义如下

$$h_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}[f_j^n + f_{j+1}^n + \mathbf{R}_{j+1/2} \Phi_{j+1/2}] \quad (3)$$

矢量  $\Phi_{j+1/2}$  的不同构造可得到不同精度的差分格式.

对于三阶 ENO 格式, 矢量  $\Phi_{j+1/2}$  的分量可由下面式子构造

$$\phi_{j+1/2}^{l \text{ UNO3}} = \sigma(a_{j+1/2}^l) (\beta_j^l + \beta_{j+1}^l) + \begin{cases} \tilde{\sigma}(a_{j+1/2}^l) (\tilde{\beta}_j^l + \tilde{\beta}_{j+1}^l) - \\ \psi(a_{j+1/2}^l + \gamma_{j+1/2}^l + \tilde{\gamma}_{j+1/2}^l) \alpha_{j+1/2}^l, \\ |\alpha_{j-1/2}^l| \leq |\alpha_{j+1/2}^l| \\ \hat{\sigma}(a_{j+1/2}^l) (\hat{\beta}_j^l + \hat{\beta}_{j+1}^l) - \\ \psi(a_{j+1/2}^l + \gamma_{j+1/2}^l + \hat{\gamma}_{j+1/2}^l) \alpha_{j+1/2}^l, \\ \text{other} \end{cases} \quad (4)$$

对于二阶格式, 矢量  $\Phi_{j+1/2}$  的分量可由下面式子构造

$$\phi_{j+1/2}^{l \text{ UNO2}} = \sigma(a_{j+1/2}^l) (\beta_j^l + \beta_{j+1}^l) - \psi(a_{j+1/2}^l + \tilde{\gamma}_{j+1/2}^l) \alpha_{j+1/2}^l \quad (5)$$

式(4), 式(5)中各个变量的定义详见文献[2].

考察高分辨率格式的构造, 可以看到各类高分辨率格式的基本形式是由经典的低阶格式和高阶格式组合而成, 格式中尽可能地使用高阶格式. 根据这种差分格式的构造思路, 将不同的高分辨率格式再次进行组合得到

$$h_{j+1/2}^{\text{new}} = \varphi_{j+1/2} h_{j+1/2}^{\text{high}} + (1 - \varphi_{j+1/2}) h_{j+1/2}^{\text{low}} \quad (6)$$

式 (6) 中,  $h_{j+1/2}^{\text{high}}$  表示高阶高分辨率格式的数值通量,  $h_{j+1/2}^{\text{low}}$  表示较低阶格式的数值通量. 本文中,  $h_{j+1/2}^{\text{high}}$  即为  $h_{j+1/2}^{\text{ENO3}}$ ,  $h_{j+1/2}^{\text{low}}$  为  $h_{j+1/2}^{\text{ENO2}}$ . 开关函数  $\varphi_{j+1/2}$  的选取应使新格式尽可能采用高阶格式, 以保持对解的高分辨率能力, 考虑到解的光滑程度可以用曲线的曲率来表征, 而曲率与曲线的二阶导数有关, 笔者构造了如下的开关函数

$$\varphi_{j+1/2} = \frac{\text{sign}(|a| - \varepsilon) + 1}{2} \quad (7a)$$

其中

$$a = \frac{u_{j+1} + u_{j-1}}{2u_j} - 1 \quad (7b)$$

$\varepsilon$  是一个参数, 取较小的正数,  $\text{sign}(x)$  是符号函数, 当  $x \geq 0$  时取 +1, 当  $x < 0$  时取 -1. 从式 (7) 可以看到, 开关函数  $\varphi_{j+1/2}$  满足如下性质: 当  $\varepsilon \leq |a| < \infty$ , 解具有强梯度时,  $\varphi_{j+1/2} = 1$ , 式 (6) 即为  $h_{j+1/2}^{\text{new}} = h_{j+1/2}^{\text{high}}$ ; 当  $|a| < \varepsilon$ , 解较为光滑时,  $\varphi_{j+1/2} = 0$ , 式 (6) 即成为  $h_{j+1/2}^{\text{new}} = h_{j+1/2}^{\text{low}}$ .

## 2 数值试验

无黏气体一维 Euler 方程的守恒形式有

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ u(e + P) \end{pmatrix} \quad (9)$$

这里,  $\rho$  是气体密度,  $u$  是气体速度,  $P$  是气体压强,  $e$  是单位总内能.  $\mathbf{Q}$  为守恒状态矢量,  $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$  为通量矢量. 对于完全气体, 其状态方程

$$P = (\gamma - 1)(e - \rho u^2 / 2) \quad (10)$$

其中,  $\gamma$  是比热.

为了验证数值差分格式的有效性, 这里以 Riemann 问题为例进行验算. 这个问题的模型为: 在一个均匀的直管道中, 有一个薄膜分开两段不同状态的气体, 左边气体状态参数为:  $p_1, \rho_1, v_1 = 0$ ; 右边气体状态参数为:  $p_2, \rho_2, v_2 = 0$ . 设  $p_1 > p_2$ , 则称左边为高压段, 右边为低压段. 设在  $t = 0$  时, 薄膜突然破裂, 则左边高压气体向右膨胀, 形成一个向左传播的中心稀疏波, 右边气体受到压缩, 产生一个向右的激波, 同时两种气体由一个接触间断分开. 这种初始状态间断的问题, 称为 Riemann 问题.

这里考虑初始条件如下的数值解

$$\mathbf{Q}(x, 0) = \mathbf{Q}_L, \quad x < 0$$

$$\mathbf{Q}(x, 0) = \mathbf{Q}_R, \quad x > 0$$

一维 Euler 方程 Riemann 问题的初始值为

$$\mathbf{Q}_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_R = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

计算时, 上述式 (6) 中  $h_{j+1/2}^{\text{high}}$  取三阶 ENO 格式,  $h_{j+1/2}^{\text{low}}$  取二阶 ENO 格式. 计算共采用 400 个单元, Courant 数取  $CFL = 0.95$ , 计算在 LEO486/66 微机上进行. 图 1 为组合 ENO 格式计算的激波管压力分布, 图 2 是组合 ENO 格式中开关函数值的分布. 计算结果显示, 当计算过程中  $\varphi_{j+1/2} = 0$  时, 式 (6) 即为二阶 ENO 格式, 其平均每个时间步耗费 0.0688 s; 当计算过程中  $\varphi_{j+1/2} = 1$  时, 式 (6) 即为三阶 ENO 格式, 其平均耗费的时间为 0.0982 s/ 单步; 而当计算过程中  $\varphi_{j+1/2}$  时而为 0 时而为 1 时, 此时式 (6) 即为组合 ENO 格式, 其每个时间步平均耗费的时间大约在 0.0842~0.0869 s 之间. 这里需要指出组合 ENO 格式耗费的时间视小量  $\varepsilon$  取值而定.  $\varepsilon$  取值越大, 开关函数值取 0 的可能性越多, 即组合 ENO 格式中取低阶格式的可能性越大, 则组合 ENO 格式耗费的时间越少;  $\varepsilon$  取值越小, 开关函数值取 1 的可能性越多, 即组合 ENO 格式中取高阶格式的可能性越大, 则组合 ENO 格式耗费的时间越多.

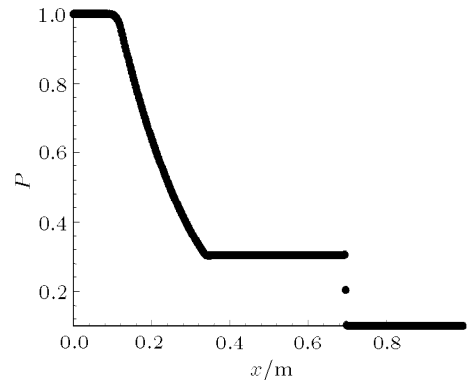


图 1 组合 ENO 格式计算的激波管压力分布

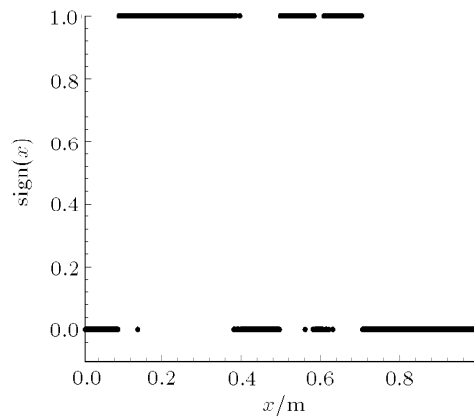


图 2 组合 ENO 格式开关函数的分布值

## 3 结论

本文以减少单步差分格式的计算量为目的, 提出一类高分辨率格式的组合形式, 它由高阶高分辨率和较低阶高分辨率的两种格式组合而成, 通过引入一个具有自适应性质的开关函数使得新格式具有这样的性质: 在解的强烈变化区域采用高阶格式, 在解的光滑区域采用较低阶格式. 从某种意义上

上说,本文提出的组合高分辨率格式具有自适应多重分辨率的思路.数值试验表明,这种组合高分辨率格式能有效地减少单步差分格式的计算量.事实上,本文更主要的是提供了一种思路,而不仅仅是一类差分格式.

### 参 考 文 献

- 1 Harten A. Adaptive multiresolution schemes for shock computation. *J Comp Phys*, 1994, 115: 319~338
- 2 Yang JY, Hsu CA. High-resolution, nonoscillatory schemes for unsteady compressible flows. *AIAA J*, 1992, 6(30): 1570~1575
- 3 Roe PL. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J Comp Phys*, 1981, 2(43): 357~372
- 4 朱军政. 高分辨率差分格式在非定常流动数值模拟中的应用. [硕士论文]. 杭州: 浙江大学, 1996 (Zhu Junzheng. Application of High Resolution Schemes on Numerical Simulation of Unsteady Flows. [Master Thesis]. Hangzhou: Zhejiang University, 1996(in Chinese))

## CONSTRUCTION OF AN ADAPTIVE MULTIRESOLUTION HYBRID ENO SCHEME

ZHU Junzheng

(Zhejiang Insititute of Hydraulic and Estuary, Hangzhou 310020, China)

**Abstract** To reduce the computing time per step, a new hybrid high resolution difference scheme is constructed. The new scheme makes use of high resolution scheme or low resolution scheme through an adaptive switch function, depending on the gradient of the solution in a region. So the new scheme is adaptive and multiresolution. The results of numerical simulation show that the new scheme can effectively reduce the computing time per step.

**Key words** hybrid ENO scheme, adaptive multiresolution schemes, difference schemes

## 多体系统动力学设计灵敏度分析直接微分法<sup>1)</sup>

潘振宽 丁洁玉 高磊

(青岛大学信息工程学院, 青岛 266071)

**摘要** 针对受完整约束的多体系统动力学微分/代数方程数学模型动态最优化设计问题,建立了通用的目标函数和约束方程,并以此为基础,用直接微分方法系统地推导出了计算设计灵敏度的通用公式,最后通过平面机械臂模型对理论结果和相应算法进行了验证.

**关键词** 多体系统动力学, 微分/代数方程, 灵敏度分析, 直接微分方法

基于多体模型的机械系统动态最优化设计是传统多体系统动力学研究内容的拓展,这类问题与传统的最优化设计的主要区别在于其目标函数和约束方程包含状态变量,且除受传统的约束,系统还受多体系统状态方程约束,其状态变量依赖于设计变量.在利用收敛性较好的最优化设计间接法求解上述问题时,需要提供目标函数与约束函数对设计变量的导数,从而必须提供系统状态变量对设计变量的导数,即状态设计灵敏度.

多体系统设计灵敏度分析方法主要有有限差分法、直接微分法和伴随变量法<sup>[1]</sup>.差分法概念简单,但计算复杂度较高;直接微分法适应设计变量较少的问题;而伴随变量方法对设计变量较多的最优化设计问题效率较高.

对常微分方程表达的多体模型的设计灵敏度分析已有较

多研究<sup>[1~4]</sup>.对于基于微分/代数方程数学模型的多体最优化设计,由于问题的复杂性,其目标函数、约束方程的表达、问题的描述及相关算法设计还未完善<sup>[5~8]</sup>.本文旨在建立基于该类数学模型的通用灵敏度分析的直接微分法.

### 1 基于微分/代数方程的多体系统动力学最优化设计数学模型

设多体系统的状态变量为  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n]^T$ , 系统的设计变量为  $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_l]^T$ . 基于微分/代数方程的多体系统动力学最优化设计问题可表达为

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{b} \in R^l} \Psi(\mathbf{b}) \\ \text{s.t. } & h_v(\mathbf{b}) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, p \\ & g_u(\mathbf{b}) \leq 0, \quad u = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (1)$$

其中,目标函数  $\Psi(\mathbf{b})$  的通用形式为

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{b}) = & G^1(\dot{\mathbf{q}}^1, \mathbf{q}^1, \mathbf{b}, t^1) + G^2(\dot{\mathbf{q}}^2, \mathbf{q}^2, \mathbf{b}, t^2) + \\ & \int_{t^1}^{t^2} H(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{b}, t) dt \end{aligned} \quad (2)$$

其中,上标 1, 2 分别表示初始与终止状态,  $t$  表示时间,  $\boldsymbol{\lambda}$  为动力学方程中的 Lagrange 乘子.

2004-03-18 收到第 1 稿, 2004-07-07 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金项目(19902006)资助.