

考虑最坏中断损失下的 P -中位设施选址问题的模型与算法研究

杨 珺, 刘舒佶, 王 玲

(华中科技大学管理学院, 湖北武汉 430074)

摘 要: 蓄意突袭以及恐怖袭击会造成设施服务的突然中断成为网络系统的主要危害之一, 因此网络设施选址决策应该同时考虑正常和紧急状态下系统的运作成本。本文研究考虑最坏中断损失下的网络设施选址问题, 建立了该问题的双层规划模型, 上层规划涉及设施选址决策, 下层规划研究确定设施位置后, 设施中断产生最大损失的问题。本文运用基于拉格朗日松弛的混合遗传算法来求解该双层规划问题。将 European150 数据集作为研究对象, 对比研究了本文研究问题与传统的 P -中位选址问题的结果, 分析不同选址策略下网络系统的效率被中断影响的程度是不同的。最后通过改变一些关键参数, 比如常规运作权重、设施数量、中断设施数量, 对相关结果进行了分析。

关键词: 设施选址; 中断; 双层规划; 混合遗传算法

中图分类号: C931 文献标识码: A

1 引言

随着全球化进程的进一步加快, 世界联系越来越紧密, 环境恶化、发展不平衡等问题日益突出, 2001 年美国“9·11”恐怖袭击事件, 2002 年印尼的巴厘岛爆炸, 2003 年 8 月美加大停电, 2007 年北半球暴风雪灾到 2008 年 5 月 12 日四川大地震和今年的日本大地震等自然和人为的灾害直接导致了网络服务设施的故障。由于人为因素或灾害性事件等造成设施严重损坏, 致使社会生产生活正常秩序受到全面或局部影响的状况, 致使产品和服务供应大面积、长时间短缺或设施运行大范围中断。因此, 在进行设施选址时, 我们应该高度重视由于设施中断造成的巨大损失。那么, 效率和可靠性/安全性成为设施选址决策的两大主要因素。

近年来, 人们已经充分注意到了通过加强设施以抵御攻击的必要性。这种攻击可能是蓄意的, 比如恐怖主义袭击, 也可能是随机的, 比如自然灾害。随机的袭击建立在网络可靠性理论的基础上, 这个

理论是在设施面临随机故障时, 计算网络依然保持畅通的概率, 使该概率最大化。Snyder 和 Daskin (2005) 在传统网络设施选址模型的基础上, 研究并总结了各种随机故障下网络设施选址的可靠性模型^[1]。

有预谋攻击下的网络关键设施识别问题也被称为“中断”模型(Interdiction Model)。所谓的“中断”就是对网络中的关键基础设施进行攻击导致整个网络系统的性能损失最大化。因此, “中断”模型研究可以用于识别系统中的最薄弱部分, 也就是相对最关键的环节。从上世纪 60 年代到现在, 一直有学者和专家从事这个方面的研究。Wollmer (1964) 最早提出了通过减少网络容量和增加运输费用来最大化网络最小费用流的中断模型^[2]。Israeli 和 Wood (2002) 对带预算限制的网络中断导致最短路线最大化的问题做了概括性研究, 建立了双层规划的混合整数规划模型, 并给出了有效的基于割平面的 Benders 分解方法^[3]。李引珍和郭耀煌 (2004) 研究了交通运输网络中最短路径关键边的问题^[4]。刘明和徐寅峰等 (2006) 提出了突发事件不完全信息条件下交通网络的关键路径问题^[5]。Lim 和 Smith (2007) 研究了在一定预算下网络中多种物质流的弧中断问题, 分别给出了完全中断(discrete interdiction)和部分中断(partial interdiction)两种情况的模型和算法^[6]。以上的这些研究都是根据给定的

收稿日期: 2009-06-11; 修订日期: 2011-06-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70601011); 教育部人文社会科学研究青年基金项目(10YJC630331); 华中科技大学自主创新研究基金

作者简介: 杨珺(1976-), 女(汉族), 湖北武汉人, 华中科技大学管理学院副教授, 研究方向: 网络优化、管理决策。

OD 对的最大流、最小费用流或者最短路的影响来识别网络中关键弧和节点。

近来,人们将焦点放在网络中关键设施中断对网络系统的运行性能的影响上,分析它们的失效会对整个系统所提供的服务、供给带来严重的威胁。这类研究主要建立在传统的网络设施选址模型的基础上。Church 和 Scaparra (2004) 提出了两个中断模型,一个基于 P -中位问题,另一个基于最大覆盖选址问题,两者都是寻求中断后对系统的有效性或覆盖率影响最大的设施子集^[7]。Scaparra 和 Church(2008) 继续研究了关键设施的袭击的最坏情况下的设施防御问题,并根据防御方/破坏方的博弈关系建立了双层的整数规划的中位模型。上述所有设施中断问题都假设设施位置已定^[8]。

由于双层规划求解的复杂性,许多研究者提出了多种算法来求解此问题。Colson 和 Marcotte 等(2005)总结了出不少精确方法来解决双层规划问题中出现的各种情况,如:极值点趋近搜索法,分支定界法,互补旋转法,下降法,罚函数算法,信赖域算法等^[9]。针对离散决策变量的双层规划问题,Bard 和 Moore (1990, 1992) 为获得双层 0-1 规划、混合整数规划问题的 Stackelberg 解提出了基于分支定界或枚举法的算法^[10,11]。有些学者使用启发式算法来求解双层规划问题,Liu (1998) 为解决非线性且信息对称的 Stackelberg 模型设计了遗传算法^[12]。Gendreau 和 Marcotte (1996) 提出了与禁忌搜索相关的适应搜索方法求解线性双层规划问题^[13]。Li 和 Tian 等 (2006) 提出一种基于粒子群优化 (PSO) 的新算法框架,并将 PSO 的 2 个变量结合起来求解该问题,形成了上层与下层规划问题的互动与合作^[14]。

为减少正常运作成本以及最坏中断情况下的损失,本文研究考虑最坏中断损失下的网络设施选址问题,我们称之为 R 中断型的 P 中位选址问题 (PMLRI),其目标是确定使正常运作成本和最坏情况下的运作成本权重和最小化的最优选址策略。本文的问题建立在 P -中位选址问题框架的基础上。

本文由以下几节内容组成:下一个节在 P -中位选址问题和 R -中断中位问题基本模型的基础上提出该问题 (PMLRI) 的双层规划模型。第三节为下层的 R -中断问题提出了拉格朗日松弛算法。第四节设计了基于拉格朗日松弛算法和遗传算法的混合启发式算法。最后分析比较了计算实验的结果和结论。

2 模型建立

2.1 P -中位选址问题的基本模型

P -中位选址问题是一个传统的设施选址问题^[15]。该模型的目标是在候选网络节点中建设 P 个服务设施,使得设施和需求节点间的总运输费用(运作成本)最小。为了使模型描述更加清楚,将模型使用到的符号含义表示如下:

输入值:

h_i : 表示节点 i 处的需求;

d_{ij} : 表示需求节点 i 和 j 处候选设施之间的距离;

P : 表示建设设施的数量;

决策变量:

选址变量 x_j : 如果在 j 处建立设施, $x_j = 1$; 否则 $x_j = 0$ 。

分配变量 y_{ij} : 如果节点 i 处的需求由节点 j 处的设施供应, $y_{ij} = 1$; 否则 $y_{ij} = 0$ 。

P -中位选址问题的模型如下:

$$(PML) \quad \text{Min } Z = \sum_{i \in N} \sum_{j \in J} h_i d_{ij} y_{ij} \quad (1)$$

$$s. t. \quad \sum_{j \in J} y_{ij} = 1, \quad \forall i \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J} x_j = P \quad (3)$$

$$y_{ij} - x_j \leq 0, \quad \forall i, \forall j \quad (4)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \quad (5)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (6)$$

2.2 R -中断中位问题

Church 和 Scaparra (2004) 定义 R -中断中位问题: 在 P 个已有的设施中如何选择 R 个设施,使在这 R 个设施被中断后网络系统的运行成本最大。因此,这个模型可以看作是 R 的设施中断的最坏情况^[7]。RIM 问题可以用如下的符号表示成整数规划模型:

F 表示现存的设施 j 的集合

$$S_j = \begin{cases} 1, & \text{如果 } j \text{ 处设施中断;} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$Z_{ij} = 1$ 表示发生中断后节点 i 处需求由设施 j 提供服务,否则 $Z_{ij} = 0$ 。

$T_{ij} = \{k \in F \mid k \neq j \text{ 并且 } d_{ik} > d_{ij}\}$, 表示现存的设施节点中(不包括 j)到 i 的距离比 d_{ij} 远的节点集合。

Church 和 Scaparra (2004) 建立了 R -中断中位

问题(RIM):

$$\text{Max } Z_R = \sum_i \sum_j h_i d_{ij} z_{ij} \quad (7)$$

$$\text{s. t. } \sum_j z_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (8)$$

$$\sum_{j \in F} s_j = R \quad (9)$$

$$\sum_{k \in T_{ij}} z_{ik} \leq s_j \quad \forall i, j \quad (10)$$

$$s_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \quad (11)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (12)$$

$$\text{max } W_2 = \sum_i \sum_j h_i d_{ij} z_{ij} \quad (19)$$

$$\text{s. t. } \sum_j z_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (20)$$

$$\sum_j s_j = R \quad (21)$$

$$s_j \leq x_j \quad \forall j \quad (22)$$

$$z_{ij} \leq x_j - s_j \quad \forall i, j \quad (23)$$

$$\sum_{k \in T_{ij}} z_{ik} \leq s_j \quad \forall i, j \quad (24)$$

$$s_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \quad (25)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (26)$$

模型的目标函数(7)是寻找 R 个设施中断后使网络系统的运行成本最大。约束(8)保证在中断后每个需求节点都被分配到一个设施接受服务。约束(9)控制中断设施的数量为 R 个。约束(10)确保每个需求节点 i 被分配到当前最近的现存设施节点。实质上,在设施 j 不中断时,约束(10)防止了需求 i 被分配到比到 j 更远的设施。最后,约束(11)、(12)是对变量的整数约束。

2.3 PMLRI 的双层规划模型

在以上两个模型的基础上,本文提出了考虑最坏中断损失下的 P -中位设施选址问题(PMLRI)。该问题可以描述为领导者-跟随者的 Stackelberg 博弈形式^[16]。在 PMLRI 问题的模型中,领导者进行设施选址决策来最小化正常情况下的运行成本和最坏中断情况下的运行成本权重和;中断者(跟随者)则中断 R 个网络设施使系统中断后的运行成本最大。显然,决策者有两个目标:一个是正常情况下的运作成本,另一个是中断后的运作成本。前者是传统的 P -中位问题的目标,后者则是 R -中断中位问题的目标。从领导者的角度看,该问题的目标是找到能应对中断危机情况的最优设施选址策略。令 $\alpha \in [0, 1]$ 为正常运行成本的权重,PMLRI 可描述为以下的双层规划模型:

$$\begin{aligned} \text{(PMLRL)} \quad \min Z_{PR} &= \alpha W_1 + (1 - \alpha) W_2 \\ &= \alpha \sum_i \sum_j h_i d_{ij} y_{ij} + (1 - \alpha) W_2 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{s. t. } \sum_j y_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (14)$$

$$\sum_j x_j = P \quad (15)$$

$$y_{ij} - x_j \leq 0 \quad \forall i, j \quad (16)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \quad (17)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (18)$$

上层模型的目标函数(13)是中断前后运作成本的加权和,式中 W_2 为下层问题的目标函数(19),即 R 个设施最坏中断情况下的运行成本。里层规划约束(19)至约束(25)即为之前定义的 R -中断中位问题(RIM),其中约束(22)保证了中断的节点属于上层规划求解出的设施点,约束(23)确保不会把需求分配给中断的设施点,约束(22)和(23)联系着上下两层规划。PML 可以看作是 PMLRI 的特例,若 $\alpha = 1$, 则 PMLRI 模型会完全摒弃下层规划的最坏中断情况,变成一个 PML 问题。

一般来说,即便双层规划问题的形式简单到上下层都只包含连续型变量,其求解也很困难。Hansen 和 Jaumard (1992) 已经证明了这种情况是一个强 NP-hard 问题^[17]。PMLRL 的双层规划问题中的决策变量都有整数限制,难度就更大。求解大规模的实例在较合理的时间内难以求得最优解。因此,本文设计了基于拉格朗日松弛算法的混合遗传算法来求解 PMLRL 问题。

3 RIM 问题的拉格朗日松弛算法

下层的 RIM 模型是一种整数线性规划模型,本节首先设计了求解该问题的拉格朗日松弛算法。

3.1 上下界的计算

针对 RIM 模型,我们将模型中的约束(10)松弛, λ 是松弛系数,那么可以得到以下的模型(RIM2):

$$\begin{aligned} \text{Max } Z_R &= \sum_i \sum_j h_i d_{ij} z_{ij} + \sum_i \sum_j \lambda_{ij} (s_j \\ &\quad - \sum_{k \in T_{ij}} z_{ik}) \\ &= \sum_i \sum_j \left(h_i d_{ij} z_{ij} - \lambda_{ij} \sum_{k \in T_{ij}} z_{ik} \right) + \sum_i \sum_j \lambda_{ij} s_j \end{aligned} \quad (27)$$

$$s. t. \sum_j z_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (8)$$

$$\sum_{j \in F} s_j = R \quad (9)$$

$$\sum_i z_{ij} \leq 1 - s_j \quad \forall j \quad (28)$$

$$s_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \quad (11)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (12)$$

注意我们这里松弛了确保需求点分配给最近的设施点约束(10), 同时将原本的需求点只能分配给未中断的设施的约束(28)添加进来。对于确定的拉格朗日系数 λ_j , RIM2 模型可以分解成 2 个子问题:

(Sub1)

$$\text{Max} \sum_i \sum_j \left(h_i d_{ij} z_{ij} - \lambda_j \sum_{k \in T_{ij}} z_{ik} \right) \quad (29)$$

$$s. t. \sum_j z_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (8)$$

$$\sum_i z_{ij} \leq 1 - s_j \quad \forall j \quad (28)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (12)$$

(Sub2)

$$\text{Max} \sum_j \left(\sum_i \lambda_j \right) s_j \quad (30)$$

$$s. t. \sum_{j \in F} s_j = R \quad (9)$$

$$s_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \quad (11)$$

为了求解 s_j , 对于每个已建的设施点 j 计算 $\sum_i \lambda_j$, 根据 $\sum_i \lambda_j$ 的值的大小降序排列已建的设施点 $j \in F$ 。对于排在前面 R 个设施点 $j \in F, s_j = 1$, 其他的设施点 $s_j = 0$ 。首先我们令 $S = \{j \in F \mid s_j = 0\}$, 那么 S 就表示中断后的现存设施点集合。结合已得到的 S , 为了求解 z_{ij} , 我们将 sub1 问题分解成对于每个需求点 i 的子问题。对于每个需求点 i , 我们可以找到 $j_i^* = \arg \max_{j \in S} \{h_i d_{ij} - \sum_{k \in M_j} \lambda_k\}$, $M_j = T_{ij} = \{k \in F \mid k \neq j \text{ 并且 } d_{ik} \leq d_{ij}\}$ 。那么, 如果 $k = j_i^*$, 那么 $z_{ik} = 1$, 否则 $z_{ik} = 0$ 。对于固定的松弛系数 λ_j , 就得到了子问题(Sub1)的最优解 z_{ij} 。然后将求得的 s_j, z_{ij} 和固定的 λ_j 代入 RIM2 的目标函数(27)就得到了原问题 RIM 的上界 Z_U 。

根据目前得到的 s_j 的值, 我们可以得到原问题的一个可行解。对于每个需求点 i , 我们可以找到距离需求点 i 最近的现存设施 $\hat{j}_i = \arg \min_{j \in S} \{d_{ij}\}$ 。那么, 如果 $k = \hat{j}_i$, 那么 $\hat{z}_{ik} = 1$, 否则 $\hat{z}_{ik} = 0$ 。将得到的 \hat{z}_{ij} 代入 RIM 模型的目标函数(7), 就得到了

RIM 问题的下界 Z_L 。

3 2 次梯度算法调整 λ_j

可以通过不断调整 λ 的值, 使 Z_U 和 Z_L 互相靠近来逼近最优解。本文利用次梯度算法来逼近。若用上标 k 表示迭代次数, 则第 k 次迭代的最优值上下限分别表示为 Z_U^k 和 Z_L^k , 相对应的拉格朗日乘子为 λ_j^k , 拉格朗日松弛问题的解为 s_j^k 和 z_{ij}^k 。用 t^k 表示第 k 次迭代的步长, Z_i^* 为到第 k 次迭代为止最小的下限值, α^k 是第 k 次迭代步长参数, 可以通过下式计算每次迭代的步长值:

$$t^k = \frac{\alpha^k (Z_U^k - Z_L^*)}{\sum_i \sum_j (s_j - \sum_{k \in T_{ij}} z_{ik}^*)^2} \quad (31)$$

给定初始非负的拉格朗日乘子 λ_j^1 后, 第 k 次迭代中的拉格朗日乘子可通过下式求得 $\lambda_j^{k+1} = \max \left\{ 0, \lambda_j^k - t^k \left(s_j - \sum_{k \in T_{ij}} z_{ik}^k \right) \right\} \quad \forall i \in I \quad (32)$

通过公式(31)(32)来更新拉格朗日乘子 λ_j , 直到达到终止条件。

3 3 算法步骤

算法步骤总结如下:

第一步: 初始化各参数。 $k = 1, UB \leftarrow +\infty, LB \leftarrow 0, \lambda_j^1 = R/10 \quad \forall i \in I, \alpha^1 = 2;$

第二步: 根据 3.1 节的方法, 求解拉格朗日松弛问题 RIM2。计算得到 RIM 问题的上限值 Z_U^k 和下限值 Z_L^k 。

第三步: 分别更新 RIM 问题最优值的上下限 UB 和 LB 。令 $UB = \min(UB, Z_U^k), LB = \max(LB, Z_L^k);$

第四步: 更新步长参数 α^k , 若 UB 连续 $[P/10] * R$ 次迭代都没有改善, 则令 $\alpha^k = \alpha^k / 2;$

第五步: 更新拉格朗日乘子。根据 3.2 节中的式(31)和式(32)更新拉格朗日乘子。

第六步: 判断是否达到程序终止条件。如果 $UB - LB \leq 0.3$, 终止程序; 如果 $t \leq 0.000001$ 或者 $k = P * 100$, 但 $UB - LB > 0.3$, 就终止拉格朗日松弛算法循环, 根据上下界的取值运用分支定界法得到最优解。否则继续第七步。

第七步: 更新迭代次数。 $k = k + 1$, 转到第二步。

3 4 算法测试

为了测试以上算法的性能, 本文用 P -中位选址问题的一个 Benchmark 数据集 Europe150 来进行测试。Europe150 涵盖了 150 个欧洲大城市, 各个节点的需求与城市的人口相对应。本论文在分布

150 个节点的网络上求解 8 种规模的 RIM 问题, P 的取值为 20、30、40 和 50, R 取值为 5、10、20。其中现存的设施集合是 P -中位选址问题的最优解, 已经由 SITATION 软件 (Daskin, 2004) 计算得到^[18]。计算实验显示拉格朗日算法求解 RIM 具有较好的效果, 见表 1。大多数情况上下限的偏差百分比都在 1% 以下左右, 8 个生成的问题中只有 1 个问题的上下限偏差超过了 3%, 所用计算机时间也多在 10 秒以内。图 1 显示了算法收敛效果很好。由于拉格

朗日算法可以估计最优值的上下限, 在实际问题中如果对计算结果不满意还可以对一些参数进行调整, 如迭代次数, 步长参数等, 大多数情况下可以保证取得最优解。由于 RIM 问题是 PMLRI 问题的下层问题, 将下层问题的最优解反馈给上层是至关重要的, 因此在拉格朗日松弛算法求出问题的上下界之后, 可以根据问题的上下界继续用分支定界法得到 RIM 问题的最优解反馈给上层选址问题。

表 1 拉格朗日算法求解 RIM 问题的计算结果

需求点数	问题参数		计算结果对比				
	已建设施 点数(P)	中断设施 点数(R)	上限值 (UB)	下限值 (LB)	上下限差 (%)	迭代次数 (k)	所用时间 (s)
150	20	5	24 413890	24 282092	0.54	132	0
150	20	10	46 690918	46 405601	0.61	139	0
150	30	10	29 785015	29 716135	0.23	244	1
150	30	20	65 889634	65 632048	0.39	371	1
150	40	10	14 486150	14 315583	1.19	277	1
150	40	20	39 801464	38 101088	4.46	1853	8
150	50	20	28 112559	27 847970	0.95	515	4
150	50	30	51 738083	51 157457	1.13	2080	16

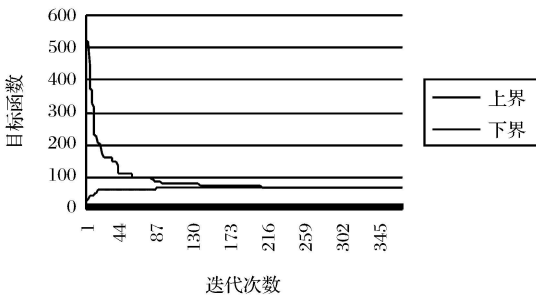


图 1 拉格朗日松弛算法求解 RIM 问题的收敛情况
($n=150, P=30, R=20$)

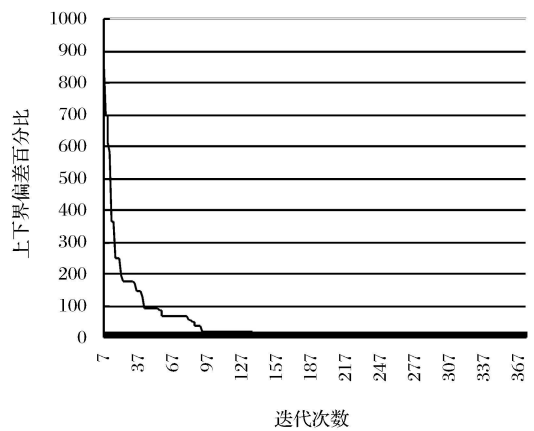


图 2 拉格朗日松弛算法求解 RIM 问题时上下界偏差百分比变化情况($n=150, P=30, R=20$)

4 基于拉格朗日松弛算法的混合遗传算法

4.1 混合算法的框架

本节首先给出了基于拉格朗日松弛算法的混合遗传算法框架。与传统算法不同, 该算法是一个连续优化的方法, 它通过遗传算法和拉格朗日松弛算法互动合作来解决上层和下层问题。模型的上层使用遗传算法得到选址变量和分配变量, 并结合下层模型反馈的中断信息不断调整优化, 模型的下层是根据上层决策的选址策略用拉格朗日松弛算法求解 R -中断问题, 并将最坏中断情况下的运作成本反馈给上层。

本文提出的混合算法利用遗传算法和拉格朗日

松弛算法分别解决上层和下层规划问题。那么解的信息在两个算法之间交换, 一个算法的输出同时也是另一个算法的输入。这就形成了一个有层次的算法结构。在遗传算法和拉格朗日松弛算法的交互合作中实现了该混合算法。图 3 描述了该混合算法的基本步骤。

4.2 混合算法的步骤

遗传算法 (Genetic Algorithms, GA) 是模拟遗传选择和自然淘汰的生物进化过程的全局优化搜索算法。GA 由 John Holland 教授于 1975 年首次提

出。因其简单通用,鲁棒性强,适于并行处理,已广泛应用于计算机科学、优化调度、运输问题、组合优化等领域。Alp 和 Erkut (2003) 针对 P -中位选址问题提出了一个有效的遗传算法,该算法能有效地产生 P -中位选址问题的满意解^[18]。Alp 和 Erkut (2003) 对 80 个不同规模的例子进行了相关计算测试,节点规模从 100 到 1000 不等,结果显示对于其中 85% 的问题,这种有效的遗传算法计算出来的最好解与最优解误差在 0.1% 以内。因此,我们采用了这种有效的算法求解上层规划问题。关于此遗传算法的更多细节,可以查看相关文献[18]。但是必须指出本文中的 GA 的适应度函数并不是 P -中位选址问题的目标函数,而是 PMLRI 的上层规划目标函数:正常运作成本与中断后运作成本的权重和。也就是说对于每个染色体,只有求解了底层问题完成后得到了反馈的中断后运作成本 W_2 ,才能计算相应的适应度值。PMLRI 问题的两阶段混合算法步骤如下:

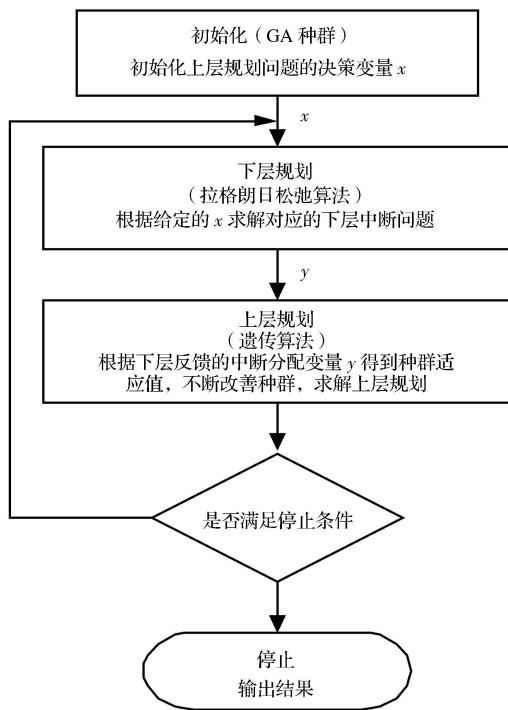


图 3 混合算法的框架步骤

初始化:

步骤 1 建立一个初始种群。

步骤 2 根据从下层返回的 W_2 的值计算每个个体的适应度。

主要算法

步骤 3 初始化迭代数为零。

步骤 4 循环计算上、下层问题直到终止条件被满足(达到最大迭代次数或者算法收敛)

上层问题(GA)

步骤 5 根据每个个体的适应度,采用转盘法从当前种群中随机选取一对解作为父代。

步骤 6 对选取的一对父代进行交叉,首先将这对解中相同基因直接转给子代,然后再用贪婪算法完成余下的子代基因选取。

步骤 7 通过变异完善子代,将生成的子代加入到新种群中。

步骤 8 重复前 3 个步骤直到所有的父代被选择、配对。

下层问题(Lagrange)

步骤 9 对于种群的每个个体都用第三节中设计的拉格朗日松弛算法对 R -中断问题进行求解。

步骤 10 将下层中得到的目标函数值 W_2 返回到上层计算每个个体的适应度。

种群替换

将得到的子代以及原始种群依照适应度函数值进行排序,选取与初始种群数目相等的个体作为新的种群,并进入到下一次迭代。

步骤 11 终止。

步骤 12 返回最优个体。

5 计算结果的比较与研究

5.1 P -中位问题和 R -中断问题比较

为了将 PMLRI 问题分别与 P -中位、 R -中断问题进行比较,我们将用 Europe150 作为我们的测试问题。 Z_P 代表传统 P -中位选址问题的最优目标值,其值是用 SITATION 软件得到的, Z_R 代表对应的 P -中位问题最优解的 R -中断问题的最优目标值,值用第 3 节中的拉格朗日松弛算法计算得到。 Z_{PR}^U , Z_{PR}^L 分别代表 PMLRI 问题的上下层目标值。 $Z_{PR}^P = \frac{Z_{PR}^U - (1 - \alpha)Z_{PR}^L}{\alpha}$ 代表常规时间里 PMLRI 问题的运作成本, Z_{PR}^L 代表发生中断时的运作成本。

我们求解了 5 种不同的问题,其中 P 值从 10 到 30, R 值从 5 到 10, $\alpha = 0.5$ 。并且运用基于拉格朗日松弛算法的混合遗传算法找到了最好解。表 2、3 和 4 对比了 P -中位问题, R -中断问题以及 PMLRI 问题的结果。在表 2 中我们比较 PMLRI 问题的上层目标值 Z_{PR}^U 与 $\alpha Z_P + (1 - \alpha)Z_R$, 从表 2 中可以看出,运用 PMLRI 策略后,期望成本较 P -中位选址问题的最优选址策略减少了 11~33%。在表 3

中, 常规时间里 PMLRI 的运作成本 Z_{PR}^P 比 P -中位选址问题的 Z_P 高一些, 在测试问题中 Z_{PR}^P 是 Z_P 的 1.01~1.16 倍。但从表 4 中看出, 中断后 PMLRI 的运作成本远少于 P -中位选址问题的 Z_R , Z_{PR}^L 较 Z_R 减少到了 59~84%。因此, 可以得出考虑最坏中断情况的网络设施选址问题比传统的 P -中位选址问题具有更好的鲁棒性。

为了进一步描述考虑中断对设施选址的影响, 图 4, 5, 6, 7 呈现了 $P=10, R=5$ 时 P -中位选址问题, R -中断问题, 以及 PMLRI 问题的解情况。图中, 正方形的点即是设立设施的点位, 菱形点表示中断的设施点, 星号点则是中断后分配的需求点。图 4 描述了 P -中位选址问题的最优解 ($P=10$), 而图 6 则是在图 7 建立设施点的基础上, 得到的 $R=5$ 的

中断问题的最优解。图 5 展示的是常规时间下 PMLRI 问题 ($P=10$) 的 10 个设施点和需求点的分配情况, 图 7 则表示在图 5 的选址决策下, 5 个设施最坏中断后需求分配的情况。每个图中的连线表示需求点分配给相应的设施点。图中每个需求节点与现存的设施点中离其最近的一个相连。根据图 7 显示的 P -中位问题的设施选址策略, 图 6 显示了每个由中断设施点服务的节点都重新分配给了离其最近的未中断的设施点。同样, 图 7 也描绘出了 PMLRI 方式的设施选址中断结果和需求重新分配。根据表 4, 我们得到一个结论, 考虑中断的设施选址问题比传统的 P -中位问题设施选址策略具有更好的鲁棒性。

表 2 $\alpha Z_P + (1-\alpha) Z_R$ 与 Z_{PR}^U 的值对比以及比率

P	R	$\alpha Z_P + (1-\alpha) Z_R$	Z_{PR}^U	$\frac{Z_{PR}^U}{\alpha Z_P + (1-\alpha) Z_R}$ ratio
10	5	35, 983, 311, 478	28, 190, 082, 752	0.78342102
20	10	27, 217, 991, 082	19, 204, 581, 275	0.70558408
30	10	17, 241, 755, 908	11, 595, 297, 029	0.67251254
20	5	16, 156, 236, 755	13, 217, 954, 031	0.81813322
30	5	8, 928, 344, 513	7, 957, 419, 585	0.89125364

表 3 Z_P 与 Z_{PR}^P 的值对比以及比率

P	R	Z_P	Z_{PR}^P	$\frac{Z_{PR}^P}{Z_P}$ ratio
10	5	14, 785, 421, 396	15, 118, 191, 857	1.02250666
20	10	8, 030, 381, 377	9, 323, 518, 581	1.16103061
30	10	4, 767, 376, 494	5, 392, 013, 734	1.13102327
20	5	8, 030, 381, 377	8, 485, 025, 239	1.05661548
30	5	4, 767, 376, 494	4, 819, 539, 864	1.01094173

表 4 Z_R 与 Z_{PR}^L 的值对比以及比率

P	R	Z_R	Z_{PR}^L	$\frac{Z_{PR}^L}{Z_R}$ ratio
10	5	57, 181, 201, 559	41, 261, 973, 647	0.72160033
20	10	46, 405, 600, 786	29, 085, 643, 969	0.62677012
30	10	29, 716, 135, 321	17, 798, 580, 324	0.5989534
20	5	24, 282, 092, 133	17, 950, 882, 823	0.73926426
30	5	13, 089, 312, 531	11, 095, 299, 305	0.84766097

从图 4-7 我们可以看出, PMLRI 与 P -中位问题主要不同在于是在节点 21 还是节点 5 建立设施, 而节点 35 与节点 16 几乎在同一位置, 在常规时间里 P -中位问题选取的节点 21 比 PMLRI 问题中选取的节点 5 更加有效, 但是只服务于一个节点的节点 21 远离了其它的需求节点。从图 6 可见, 当中断发生后节点 21 不能作为后备设施点, 为其他的需求点提供服务。因此当发生了最坏中断情况时, P -中

位问题的运作成本将从 14, 785, 421, 396 增长到 57, 181, 201, 559, PMLRI 问题的运作成本从 15, 118, 191, 857 增长到 41, 261, 973, 647。

5.2 灵敏度分析

基于 Europe150 数据集, 我们主要考察 α, R 和 P 对 PMLRI 问题的影响。图 8 表示的是随着 α 变化的各种成本的变化 (W_1 代表的是常规时间的运作成本, W_2 代表的是中断后的运作成本, W 代表的

是期望成本)。显然,因为常规时间的运作成本 W_1 远小于中断后的运作成本 W_2 , 所以期望成本 W 随着 α 的增加而减少。从图 1 我们还可以看出, 当 α 处于区间 $[0.2, 0.8]$ 时, W_1 和 W_2 变化不明显, 中断运作成本 W_2 在 α 从 0.8 变化到 1 时增长很快, 而常规时间运作成本 W_1 在 α 处于 $[0, 0.2]$ 区间时波动很大。也就是说, 如果决策者只重视常规时间的运作成本可能会导致设施中断时巨大的损失, 同样如果只考虑中断后的运作成本也可能导致常规运作成本很高, 所以要根据决策者对两方面的权重进行均衡, 设立合理的权重值 α 。

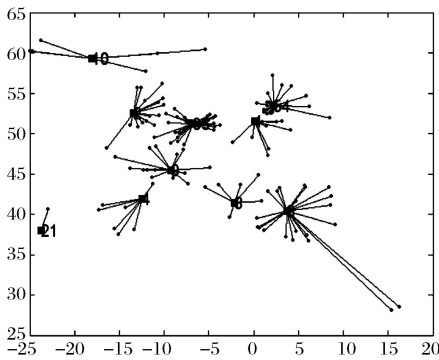


图 4 P -中位选址问题的最优解($P=10$)

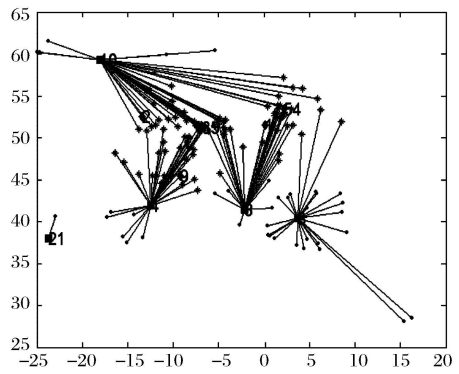


图 6 在 P -中位选址问题基础上得到 R -中断问题的最优解($P=10, R=5$)

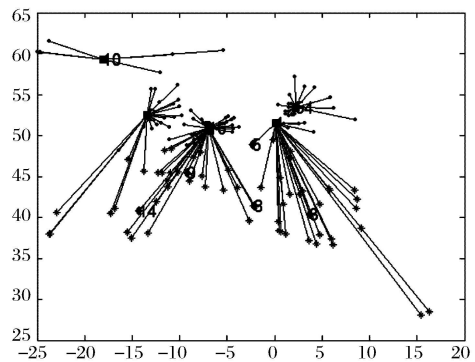


图 7 PMLRI 得到最优解时下层中断问题的最优解($P=10, R=5$)

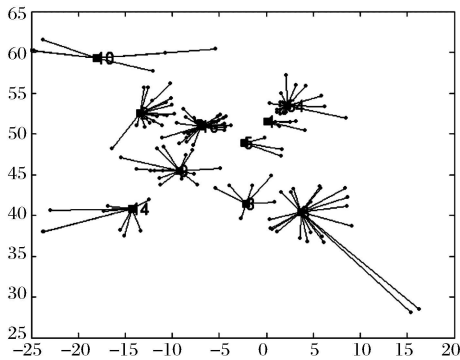


图 5 常规时间下 PMLRI 的最优解($P=10$)

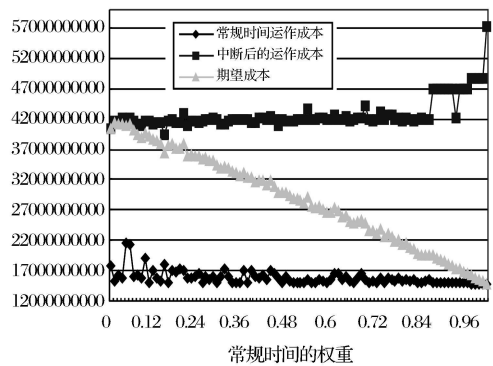


图 8 成本随 α 变化的变化曲线

现在我们分析当 $P=10, \alpha=0.5$ 时, 改变中断设施数量 R 对成本造成的影响。图 9 描绘了运作成本 W_1, W_2 和期望成本随 R 的增大而变化。显然, 设施破坏越多, 所造成的损失也就越多。最后, 当 $R=5, \alpha=0.5$ 时, 我们考虑 P 从 10 变化到 35 的成本变化情况。从图 10 中我们可以看出, 显然 W_1, W_2 和期望成本都随着 P 的增加而减少。随着 P 的变化, W_2 比 W_1 要灵敏, 也就是说建立的设施越多, 网络对中断的抵抗能力越强。

6 结语

为保障网络设施运行的高效性和可靠性, 本文考虑了常规情景与最坏设施中断情景下的运作成本, 提出了考虑最坏中断情景下设施选址问题。并且依据传统 P -中位选址模型(PML)与中断模型(RIM)建立了它的双层规划 PMLRI 模型。文中提出了求解 RIM 的拉格朗日松弛算法, 计算结果显示该算法的有效性和收敛性。随后针对模型的复杂

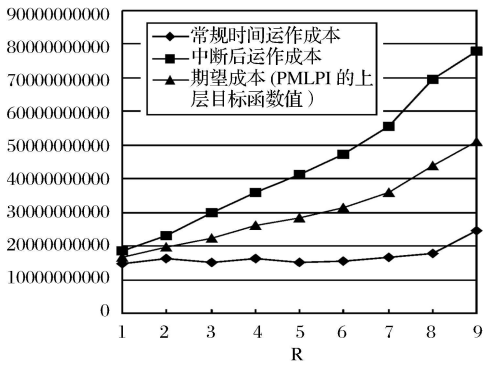


图9 不同的 R 所对应的 PMLRI 解 (P= 10, α= 0.5)

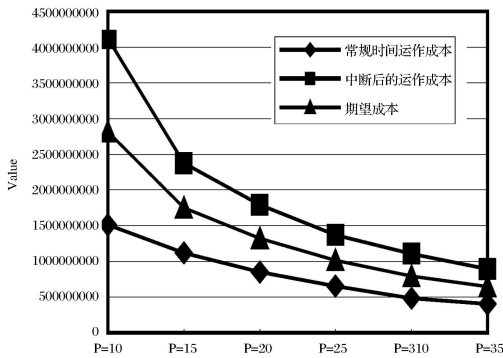


图10 不同的 P 所对应的 PMLRI 解 (R= 5, α= 0.5)

性,我们提出了基于拉格朗日松弛的混合遗传算法求解了双层规划模型 PMLRI。对 P-中位问题 (PML) 的一个典型算例进行比较研究,在相同的参数条件下对比 PMLRI、PML 和 RIM 的结果,我们发现 PMLRI 下的决策虽然常规运作成本较 PML 略微提高,但是在面临中断危机状况下该决策却比 PML 具有更好抗打击能力和生存能力。因此,在设施的选址决策中考虑中断的影响还是十分必要的。

在将来我们还将进行以下的扩展研究。第一,本文的模型和算法还可以推广到考虑多个不同 R 的最坏中断情景的设施选址决策中。第二,如何考虑后备设施选取来保障网络的生存性也是很值得研究问题。

参考文献:

[1] Snyder, L. V., Daskin, M. S., Reliability models for facility location: The expected failure cost case[J]. Transportation Science, 2005, 39:400- 416.

[2] Wollmer, R. . Removing arcs from a network[J]. Operations Research, 1964, 12: 934- 40.

[3] Israeli, E. , Wood R. K. . Shortest-path network interdiction [J]. Networks, 2002, 40: 97- 111.

[4] 李引珍, 郭耀煌, 交通运输网络最短路径关键边问题研

究[J]. 中国管理科学, 2004, 12(4) :69- 73.

[5] 刘明, 徐寅峰等. 不完全信息下交通网络的关键路径问题[J]. 系统工程, 2006, 24(12) : 16- 20.

[6] Lim, C. , Smith, J. C. . Algorithms for discrete and continuous multi-commodity flow network interdiction problems [J]. IIE Transactions, 2007, 39 (1) : 15- 26.

[7] Church, R. L. , Scaparra, M. P. , Middleton, R. S. . Identifying critical infrastructure: the median and covering facility interdiction problems [J]. Annals of the Association of American Geographers, 2004, 94(3): 491- 502.

[8] Scaparra, M. P. , Church, R. L. . A bilevel mixed integer program for critical infrastructure protection planning [J]. Computers & Operations Research, 2008, 35: 1905- 1923.

[9] Colson, B. , Marcotte, P. , Savard, G. . Bilevel programming: A survey[J]. 4OR, 2005 (3) : 87- 107.

[10] Bard, J. T. , Moore, J. T. . An algorithm for the discrete bilevel programming problem [J]. Naval Research Logistics, 1992, 39: 419- 435.

[11] Bard, J. T. , Moore, J. T. The mixed integer linear bilevel programming problem [J]. Operations Research, 1990, 38: 911- 921.

[12] Liu, B. D. . Stackelberg-nash equilibrium for multilevel programming with multiple followers using genetic algorithms [J]. Computers Math. Applic, 1998, 36(7): 79- 88.

[13] Gendreau, M. , Marcotte, P. , Savard, G. . A hybrid tabu-ascent algorithm for the linear bilevel programming problem [J]. Journal of Global Optimization, 1996, 9: 1- 14.

[14] Li, X. Y. , Tian, P. , Min, X. P. . A hierarchical particle swarm optimization for solving bilevel programming problems [J]. LNAI, 2006, 4029: 1169- 1178.

[15] Daskin, M. S. . Network and Discrete location: Models, Algorithms, and Applications [M]. New York: Wiley Interscience, 1995.

[16] Simaan, M. , Cruz, J. B. . On the stackelberg strategy in nonzero-sum games [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1973, 11(5): 533- 555.

[17] Hansen, B. , Jaumard, B. , Savard, G. . New branch and bound rules for linear bilevel programming [J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing , 1992, 13(5) : 1194- 1217.

[18] Alp, O. , Erkut, E. , Derzner, Z. . An efficient genetic algorithm for the p-median problem [J], Annals of Operations Research, 2003, 122: 21- 42.

A Bi-Level Programming Model and Heuristics for P -Median Location Problem with R -Interdiction Worst Loss

YANG Jun, LIU Shu-ji, WANG Ling

(School of Management, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: Vulnerability to sudden service disruption due to deliberate sabotage and terrorist attacks is one of the major threats for network system. Thus, facility location strategy in network should concern the operational cost in peacetime and emergency. This article focuses on how to locate P facilities so as to minimize expected cost including the regular operational cost as well as the emergent operational cost of a worst-case attack with the interdiction of R facilities. We have cast this problem as a bi-level binary programming model where the top level problem involves the decisions about where to locate facilities and the lower level problem entails the interdictor response on which facilities to attack. We solve the bi-level problem through hybrid genetic algorithm based on lagrange relax method. Results of this problem and traditional P -median location problem applied to European 150 data set are presented. Several solutions derived from these models are presented in greater detail and demonstrate the degree to which the loss of R facilities affects network system efficiencies with different location strategy decided by these models. Then we analyze the results to changes in key parameters including the weight of regular condition, the number of facilities and the number of facilities interdicted.

Key words: facility location; interdiction; bi-level programming; hybrid algorithm