文章编号: 1003- 207(2011)04- 0026- 05

基于多因子仿射利率期限结构模型的国债定价

周荣喜, 王晓光

(北京化工大学经济管理学院, 北京 100029)

摘 要: 本文构建了具有平方根扩散特征的三因子仿射利率期限结构模型, 给出了基于卡尔曼滤波法的模型参数估计过程, 利用蒙特卡罗模拟对我国国债进行定价预测, 并与 Longstaff-Schwartz 模型、Vasicek 模型、Cox-Ingersoll-Ross 模型的定价效果进行实证比较。结果表明多因子模型要优于单因子模型, 双因子模型要略优于三因子模型, 从而为我国国债合理定价提供技术支持。

关键词: 多因子仿射利率模型; 卡尔曼滤波; 蒙特卡罗模拟; 国债定价
中图分类号: F830 文献标识码: A

1 引言

利率期限结构是指在相同的风险水平下, 利率与到期期限之间的数量关系, 或者说是理论上的零息票债券收益率曲线。它是资产定价、金融产品设计、套期保值、套利以及投资等的基础, 对利率期限结构的研究一直都是金融学中一个重要而又十分基本的课题[1,2]。其中连续时间下的利率期限结构模型最重要的一类是仿射模型, 第一个仿射模型是由 Duffie 和 Kan(1996) 提出[3], 该模型包括著名的 Vasicek 模型[4]、Cox 和 Ingersoll 等(CIR) 模型[5]、Longstaff 和 Schwartz(LS) 模型[6] 等。Dai 和 Singleton(2000) 则对仿射期限结构模型进行规范分析, 研究了仿射期限结构模型的结构差异和相对拟合优度[7]。Duffee(2002) 针对标准仿射模型假设风险金是利率的波动性的常数关系可能导致模型较差的可预测性, 从而提出广义仿射模型[8]。Sergei(2004) 研究了短期利率无界时, 仿射模型的一致性问题。由于仿射模型在描述利率行为、利率型产品定价与风险管理、宏观经济预测等方面具有可操作、易于实现等优势而获得诸多研究者的青睐[9]。Stefano(2006) 用仿射资产定价模型来对股票和债券共同估值[10]。Patrick 等(2007) 拓展仿射期限结构模型中的风险的市场价格的标准设定[11]。Jacobs 和 Li(2008) 利用两因子仿射模型研究了公司债券的信用价差问题[12]。Bikbov 和 Chernov(2009) 研究了有无随机波动约束条件下用欧元期货和期权数据估计三因子仿射模型, 结果显示无约束模型能更好地捕捉期货和期权价格[13]。

国内关于仿射模型的研究主要有: 范龙振(2005) 研究发现三因子广义高斯仿射模型可以描述上交所利率期限结构的相对变化[14]。陈盛业等(2006) 用三因子仿射模型对国内银行间国债实证表明: 模型基本上能在时间序列和横截面两个维度上与实际数据相符合, 但对不同期限利率的预测存在不同的相对误差[15]。吴启权等(2007) 以股票、银行账户和债券作为可以交易的资产, 采用仿射利率期限结构模型对最优资产配置问题进行了研究, 得出最优的资产配置方案[16]。张蕊等(2009) 引入四因子仿射利率期限结构模型对上交所国债的流动性溢价问题进行了研究[17]。从目前国内外的研究来看, 用多因子仿射模型研究国债定价文献不多见。本文在 LS 模型的基础上构建了三因子仿射利率模型, 通过卡尔曼滤波估计模型参数, 然后采用蒙特卡罗模拟对我国国债进行定价预测, 并与 LS 模型、Vasicek 模型、CIR 模型进行比较与分析。

2 三因子仿射利率期限结构模型的构建

2.1 经典的仿射利率期限结构模型

经典的仿射利率期限结构模型主要有 Vasicek 模型、CIR 模型和 LS 模型, 下面分别介绍。

收稿日期: 2010- 04- 12; 修订日期: 2011- 05- 25
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70701003); 国家大学生创新性实验计划立项项目(09100127, 1101001021); 中央高校基本科研业务费专项资金(ZZ0915); 北京化工大学学科建设项目(2010096)
作者简介: 周荣喜(1972-), 男(汉族), 江西崇仁人, 北京化工大学经济管理学院教授, 博士, 研究方向: 金融工程.

Vasicek[10] 假设利率服从如下扩散过程:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dz \tag{1}$$

CIR[12] 假设利率服从如下扩散过程:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma r(t)^{0.5} dz \tag{2}$$

LS(1992) 建立了短期利率和短期利率波动率的两因子一般均衡的利率期限结构模型。该模型假设

$$r(t) = x_1(t) + x_2(t) \tag{3}$$

其中 $r(t)$ 代表短期利率, $x_1(t), x_2(t)$ 是决定短期利率取值的两个相互独立的状态变量, 在风险中性概率测度下, 状态变量的变化服从如下平方根扩散过程:

$$\begin{cases} dx_1(t) = \kappa_1[\theta_1 - x_1(t)]dt + \sigma_1 \sqrt{x_1(t)}dB_1(t) \\ dx_2(t) = \kappa_2[\theta_2 - x_2(t)]dt + \sigma_2 \sqrt{x_2(t)}dB_2(t) \end{cases} \tag{4}$$

其中 κ_1, κ_2 反映状态变量 x_1, x_2 的均值回复速度, $\sigma_1^2 x_1(t), \sigma_2^2 x_2(t)$ 分别表示 x_1, x_2 在 t 时刻的波动率, B_1, B_2 表示两个独立的标准布朗运动。

2.2 基于 LS 模型的三因子仿射利率模型

文献[14, 15]认为三因子模型能更好地刻画我国债券市场, 因此本文在 LS 模型基础上, 构建了三因子仿射模型。假设

$$r(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \tag{5}$$

其中 $r(t)$ 代表短期利率, $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ 是决定短期利率取值的三个两两独立的状态变量。在风险中性概率测度下, 假设状态变量的变化服从如下平方根扩散过程:

$$\begin{cases} dx_1(t) = \kappa_1[\theta_1 - x_1(t)]dt + \sigma_1 \sqrt{x_1(t)}dB_1(t) \\ dx_2(t) = \kappa_2[\theta_2 - x_2(t)]dt + \sigma_2 \sqrt{x_2(t)}dB_2(t) \\ dx_3(t) = \kappa_3[\theta_3 - x_3(t)]dt + \sigma_3 \sqrt{x_3(t)}dB_3(t) \end{cases} \tag{6}$$

其中 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ 反映状态变量 x_1, x_2, x_3 的均值回复速度, $\sigma_1^2 x_1(t), \sigma_2^2 x_2(t), \sigma_3^2 x_3(t)$ 分别表示 x_1, x_2, x_3 在 t 时刻的波动率, B_1, B_2, B_3 表示三个相互独立的标准布朗运动。

类似地, 采用欧拉离散法可将(6)式化为:

$$\begin{cases} x_1(t+1) - x_1(t) = \kappa_1[\theta_1 - x_1(t)] + \varepsilon_1 \\ x_2(t+1) - x_2(t) = \kappa_2[\theta_2 - x_2(t)] + \varepsilon_2 \\ x_3(t+1) - x_3(t) = \kappa_3[\theta_3 - x_3(t)] + \varepsilon_3 \end{cases} \tag{7}$$

其中 $\varepsilon_i = \sigma_i \sqrt{x_i(t)}\nu_i$, $\nu_i \sim$ iid $N(0,1)$, $i = 1, 2, 3$

3 基于卡尔曼滤波的三因子模型极大似然估计法

目前, 利率模型中的参数估计方法很多, 如广义矩估计, 极大似然估计法等, 戴国强和李良松(2010)[19] 对国内外利率模型的估计方法进行了总结。因为状态空间模型的参数估计比一般的时间序列模型要困难得多, 如模型(6)中状态变量是不可观测的, 从而需要对状态空间模型的不同子类采用不同的估计策略, 而卡尔曼滤波法在这方面优势明显[20, 21]。由(3)式可以得到短期利率与状态变量关系的向量表示为

$$R_t = HX_t + w_t \tag{8}$$

记 $R_t = [r(t)]$, $X_t = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$,

$H = [1 \quad 1 \quad 1]$。

从理论上讲, 利率完全由状态变量决定, 但这里只有三个状态变量, 所以引入误差项 w_t, $w_t \sim N(0, M)$, M 可能随着时间变化而变化, 但这里假设它为常数。

由(7)式得状态变量转移方程向量表为

$$X_{t+1} = AX_t + B + \omega_t$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} 1-\kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\kappa_3 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \kappa_1\theta_1 \\ \kappa_2\theta_2 \\ \kappa_3\theta_3 \end{bmatrix}, \quad \omega_t \sim N(0, Q),$$

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 x_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 x_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 x_3(t) \end{bmatrix}。$$

下面针对三因子仿射期限结构模型给出基于卡尔曼滤波的极大似然估计思路:

X_t 的初始预测值 $\hat{X}_1^-$ 及初始均方误差(MSE) P_1^- 分别为:

$$\hat{X}_1^- = E(X_1),$$

$$P_1^- = \{[X_1 - E(X_1)][X_1 - E(X_1)]^T\}$$

X_t 的预测值和估计值方程分别为:

$$\hat{X}_{t+1}^- = A\hat{X}_t + B + \omega_t,$$

$$\hat{X}_t = \hat{X}_t^- + K_t(R_t - H\hat{X}_t^-)$$

其中,增益矩阵 $K_t = P_t^- H^T (HP_t^- H^T + M)^{-1}$。

预测值的均方误差和估计值的均方误差分别为:

$P_{t+1}^- = AP_t A^T + Q,\ P_t = (I - K_t H) P_t^-$

根据文献[21]可知, R_t 在 $\hat{X}_t^-$ 条件下,服从如下正态分布:

$(R_t \mid \hat{X}_t^- \sim N((H\hat{X}_t^-),(HP_t^- H^T + M))),\ t = 1, 2, \cdots T$

其对应的密度函数为:

$$f_{R_t \mid X_t^-}(R_t \mid \hat{X}_t^-) = (2\pi)^{-1/2} \mid HP_t^- H^T + M \mid^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(R_t - H\hat{X}_t^-)^T (HP_t^- H^T + M)^{-1} (R_t - H\hat{X}_t^-) \right\}$$

进一步得相应的似然函数为:

$$\sum_{t=1}^{T} \log f_{R_t \mid X_t^-}(R_t \mid \hat{X}_t^-)$$

根据准极大似然估计方法(QMLE)最优参数应满足:

$$\max \sum_{t=1}^{T} \log f_{R_t \mid X_t^-}(R_t \mid \hat{X}_t^-)$$

从而可得到(8)式中的参数估计值。

4 国债定价的蒙特卡罗模拟法

利率期限结构模型的一个重要用途就是用来对利率型产品定价,定价的前提是要知道风险市场价格,而风险市场价格的设定存在很大的主观性,如 Vasicek 模型假定风险市场价格恒定,而且风险价格的不同设定得到的定价误差较大。为了减少风险市场价格对定价的影响,本文采用蒙特卡罗模拟的方法[22],具体步骤如下:

第 1 步,根据利率模型生成 n 条 T 步随机利率路径 $r_1, r_2, \cdots, r_T$;

第 2 步,根据公式 $D_j(t) = \exp(-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t} r_t),\ j = 1, 2, \cdots, n$;

第 3 步,计算所有路径下的贴现因子的期望 $D(t) = E[D_j(t)]$;

第 4 步,根据债券的现金流,计算债券价格 $P_{theory} = \sum_{t=1}^{T} C(t)D(t)$。

5 模型定价预测结果与分析

本文采用的样本数据为上海证券交易所 2006-5-8 到 2009-11-13 回购国债 GC001 的回购利率数据,共计 803 个(所有数据均来自大智慧软件)。由于数据中存在许多的异常点,因此,界定回购利率大于等于 10%的数据为异常数据,并进行删除。最终,得到有效数据 790 个,用来分别估计四个模型中的参数。

5.1 模型的参数估计结果

基于样本数据,利用极大似然估计法,估计 Vasicek 模型(1)式中的参数值分别为:

$a = 0.7906590,\ b = 0.0187959,$

$\sigma^2 = 0.0001436$

类似地,可估计 CIR 模型(2)式中的参数值分别为:

$a = 0.7034882,\ b = 0.0187966,$

$\sigma^2 = 0.0081607$

利用卡尔曼滤波对(3)式进行参数估计,得

$\kappa_1 = 0.6727,\ \theta_1 = 0.1521,\ \sigma_1^2 = 0.00088804,\ \kappa_2 = 1.3080,\ \theta_2 = -0.1334,\ \sigma_2^2 = 0.00012100$

类似地,利用卡尔曼滤波对(6)式进行参数估计,得:

$\kappa_2 = 0.028209424268689,$

$\theta_2 = -0.006221727323430,$

$\sigma_2^2 = 0.000000018258213,$

$\kappa_3 = -0.005469225376741,$

$\theta_3 = 0.025152502606534,$

$\sigma_3^2 = 0.000000000767733$

5.2 模型定价预测结果与分析

对于四个利率模型中的短期利率的初始值取 2009-11-13 的回购国债 GC001 利率 1.86%,分别利用模型(1)、(2)、(3)和(6)式生成随机利率,然后依据蒙特卡罗模拟方法,模拟次数 $n = 5000$ 次,时间按 260 天计算,求得国债价格。本文选取了具有连续交易数据的五只息票国债,其中实际价格考虑了应计利息,根据四个模型来对其价格进行预测,预测日期:2009-11-16 到 2009-11-20,预测结果如表 1 所示。

假定国债市场是有效的,债券市场价格能够充分反映市场信息,那么从表 1 中的定价偏差来看,多因子模型要优于单因子模型。其中单因子仿射模型预测的国债价格普遍偏高,但 CIR 模型要稍好于 Vasicek 模型,这充分说明单因子模型不太适用于我国国债定价;对于 010110, 010112, 010203, 010407 这四只国债来讲,双因子 LS 模型效果要稍

微优于三因子模型。因此, 从五只国债的价格预测偏差总和来看, LS 模型对于我国国债定价及其预测效果较好。从而也印证了刻画我国债券价格至少应该考虑两因子模型。

表 1　四个模型预测的五只息票国债价格比较

债券代码	模型类型	2009- 11- 16 债券价格	2009- 11- 17 债券价格	2009- 11- 18 债券价格	2009- 11- 19 债券价格	2009- 11- 20 债券价格
010110	Vasicek	104.8841	104.8863	104.8882	104.8904	104.8925
	CIR	104.8830	104.8852	104.8873	104.8895	104.8916
	LS	102.2843	102.2918	102.2993	102.3068	102.3143
	三因子	103.5123	103.5173	103.5222	103.5271	103.5321
	实际值	102.7884	102.7764	102.7845	102.8026	102.7707
010112	Vasicek	105.0831	105.0852	105.0871	105.0891	105.0911
	CIR	105.0819	105.0839	105.0859	105.0880	105.0900
	LS	102.4754	102.4827	102.4898	102.4970	102.5040
	三因子	103.7074	103.7122	103.7168	103.7215	103.7263
	实际值	102.8004	102.7688	102.7871	102.8055	102.7838
010203	Vasicek	106.5988	106.6005	106.6020	106.6037	106.6053
	CIR	106.6007	106.6024	106.6041	106.6058	106.6074
	LS	103.9977	104.0036	104.0094	104.0153	104.0211
	三因子	105.2267	105.2306	105.2343	105.2382	105.2421
	实际值	102.6873	102.6943	102.7013	102.7282	102.6452
010301	Vasicek	101.6761	101.6920	101.7056	101.7208	101.7359
	CIR	101.6666	101.6818	101.6969	101.7121	101.7270
	LS	99.1449	99.1986	99.2513	99.3049	99.3576
	三因子	100.3509	100.3863	100.4206	100.4557	100.4914
	实际值	102.475	无	102.3995	102.3168	102.3641
010407	Vasicek	108.3791	108.3815	108.3836	108.3859	108.3882
	CIR	108.3786	108.3809	108.3832	108.3855	108.3878
	LS	105.7188	105.7270	105.7351	105.7433	105.7513
	三因子	106.9757	106.9812	106.9864	106.9918	106.9972
	实际值	105.6539	105.7968	105.8198	106.0027	106.0956

6　结论

随着我国债券市场的快速发展, 债券的种类、数量均获得巨大的增长, 尤其是国债。因此构建有效的国债定价模型具有实际意义。因为国债的价格主要决定因素是利率, 而利率刻画是非常困难, 尤其对于我国新兴金融市场。本文首次研究了多因子仿射利率期限结构模型用于我国国债定价及其预测问题。通过建立三因子仿射模型, 给出模型参数的卡尔曼滤波方法估计过程, 然后采用蒙特卡罗模拟对我国国债进行定价效果实证比较。结果表明: 多因子仿射模型在我国国债定价预测中具有更高的精度, 可以考虑将其应用于我国国债定价及其衍生品定价和风险管理。结果也进一步表明如果要构建合理的利率模型需要发掘更多的市场信息, 这也说明构建合理有效的定价模型是一项非常复杂的任务。此外, 模型的参数估计样本最好是来自国债市场价格。

参考文献:

[1] Ma, Y. H., Zhou, R. X., Li, Z. G.. Application and model of term structure of stochastic interest rate based on the inflation rate[J]. Journal of Systems Science and Information, 2007, 5(2): 191- 199.

[2] 周荣喜, 邱菀华. 基于多项式样条函数的利率期限结构模型实证比较[J]. 系统工程, 2004, 22(6): 37- 42.

[3] Duffie, D., Kan, R.. A Yield- Factor model of interest rates[J]. Mathematical Finance, 1996, 6: 376- 406.

[4] Vasicek, O. A.. An Equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2): 177- 188.

[5] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., Ross, S. A.. A theory of the term structure of interest rates[J]. Econometrica, 1985, 53(2): 385- 407.

[6] Longstaff, F. A., Schwartz, E. S.. Interest rate volatility and the term structure: A two- factor general equilibrium model[J]. Journal of Finance, 1992, 47(4): 1259- 1282.

[7] Dai, Q., Singleton, K. J.. Specification analysis of affine term structure models[J]. Journal of Finance,

2000, 55(5):1943- 1978.

[8] Duffee, G. R.. Term premia and interest rate forecasts in affine models[J]. The Journal of Finance, 2002, 57: 405- 443.

[9] Sergei, L.. Consistency conditions for affine term structure models[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2004, (109):225- 261.

[10] Stefano, D. A., Axel, H. K.. International stock-bond correlations in a simple affine asset pricing model [J]. Journal of Banking and Finance, 2006, 30:2747- 2765.

[11] Patrick, C., Damir, F., Kimmel, R. L.. Market price of risk specifications for affine models: Theory and evidence[J]. Journal of Financial Economics, 2007, 83: 123- 170.

[12] Jacobs, K., Li. X.F.. Modeling the dynamics of credit spreads with stochastic volatility[J]. Management Science, 2008, 54(6):1176- 1188.

[13] Bikbov, R., Chernov, M.. Unspanned stochastic volatility in affine models: Evidence from Eurodollar futures and options[J]. Management Science, 2009, 55 (8): 1292- 1305.

[14] 范龙振. 上交所利率期限结构的三因子广义高斯仿射模型[J]. 管理工程学报, 2005, 19(1) : 81- 85.

[15] 陈盛业, 陈宁, 王义克. 银行间国债利率期限结构的三因子仿射模型[J]. 运筹与管理, 2006, 15(6):87- 90.

[16] 吴启权, 王春峰, 李晗虹. 仿射期限结构下资产混合策略[J]. 系统工程, 2007, 25(4): 78- 82.

[17] 张蕊, 王春峰, 房振明, 梁崴. 上交所国债市场流动性溢价研究——基于 4 因子仿射利率期限结构模型[J]. 系统管理学报, 2009, 18(5): 481- 486.

[18] Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A., Sanders, A. B.. An empirical comparison of alternative models of the short- term interest rate[J]. Journal of Finance, 1992, 47(3):1209- 1227.

[19] 戴国强, 李良松. 利率期限结构模型估计结果影响因素经验研究[J]. 中国管理科学, 2010, 18(1):9- 17.

[20] 陈学华. 状态空间模型理论与算法及其金融计量中的应用[D]. 广州: 暨南大学博士学位论文, 2007.

[21] Hamilton, J.. Time series analysis [M]. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1994.

[22] 吴恒煜, 陈鹏. 单因素利率模型的实证比较——基于模拟定价的视角[J]. 山西财经大学学报, 2009, 31(3): 90- 97.

A Multi-Factor Affine Term Structure Model of Interest Rates for Pricing Treasury Bonds

ZHOU Rong- xi, WANG Xiao- guang

(School of Economics and Management, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: The three-factor affine term structure models with square-root diffusion process are developed in this paper, and the Kalman filter method to estimate the parameters of the model is given. So the prices of treasury bonds are analyzed by Monte Carlo stimulation. The pricing results of Chinese treasury bonds are compared with Longstaff-Schwartz model, Vasicek model and Cox-Ingersoll-Ross model. The results show that multi-factor models are superior to the single factor, and the two-factor affine model has the higher precision than three-factor model. It can provide the technology support for effectively pricing the treasury bonds in China.

Key words: multi-factor affine term structure models; Kalman filter; Monte Carlo simulation; pricing treasury bonds