

文章编号: 0253-2697(2008)05-0769-04

有杆抽油系统通用数学模型研究

刘磊明¹ 张发强² 闫成玉³ 殷进垠² 黄学斌²

(1. 北京科技大学信息工程学院 北京 100083; 2. 中国石化石油勘探开发研究院 北京 100083;
3. 大庆油田有限责任公司采油一厂 黑龙江大庆 163001)

摘要: 针对定向井有杆抽油系统,在井眼为平面曲线的情况下,给出了描述抽油杆柱横向和纵向振动以及管柱有纵向振动并耦合液柱振动的数学模型,讨论了有杆抽油系统几种主要数学模型间的关系。对于模型描述的杆柱、管柱、液柱振动的偏微分方程组给出了特征变换,转化成对角方程组,使问题的数值计算方法得到了简化,从而给出了有效解法。新的数学模型适用于有杆抽油系统的预测、设计以及抽油系统故障诊断的模式识别。

关键词: 定向井; 有杆抽油系统; 抽油杆杆柱; 管柱; 振动; 数学模型

中图分类号: T E833 文献标识码: A

Study on a general mathematical model for suck and pumping system

LIU Leiming¹ ZHANG Faqiang² YAN Chengyu³ YIN Jinyin² HUANG Xuebin²

(1. School of Information Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;
2. Sinopec Petroleum Exploration and Production Research Institute, Beijing 100083, China;
3. First Oil Production Plant, PetroChina Daqing Oilfield Limited Company, Daqing 163001, China)

Abstract: A mathematical model was proposed for describing the longitudinal and transverse vibrations of sucker-rod string, longitudinal vibration of tubing string coupled with fluid columns vibration in the directional and horizontal well bore with plane curve. The relationships on several given mathematical models were discussed. Based on different assumptions, the characteristic transformation for a set of partial differential equations of the mathematical model was given, and a set of diagonal partial differential equations were obtained. The relatively complex model could be transformed into a reduced model that is easy to be solved. The generated model is suitable to prediction, design and fault diagnosis of suck and pumping system.

Key words: directional well; suck and pumping system; sucker-rod string; tubing string; vibrations; mathematical model

有杆抽油系统是油田应用广泛的举升系统,因此对该系统的预测、设计、诊断的数学模型已有较多的研究成果^[1-5]。笔者提出了平面弯曲条件下杆柱二维振动、管柱纵向振动并耦合液柱振动的基本方程。方程中考虑了杆柱、管柱、液柱的耦合振动和井眼平面弯曲情况,并综合了有杆抽油系统部分数学模型^[1-5]的基本特征。

1 空间曲杆的几何关系及受力分析

对于空间弯曲的抽油杆柱,建立了井口处空间直角坐标系 END , 取向径 $r(s)$ 处的曲杆微元如图 1 所示, 在向径 $r(s)$ 处的曲杆微元截面形心处建立自然坐标系 $t_1 t_2 t_3$, 其中: t_1 为微元切线单位向量, t_2 为法线单位向量, t_3 为副法线单位向量。微分几何的 Frenet 公式为

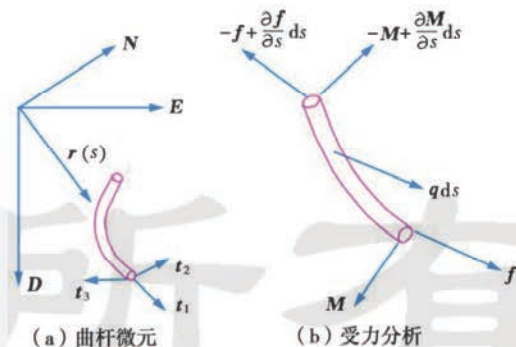


图 1 曲杆微元几何关系及受力分析

Fig. 1 Space geometry model and force analysis of curved rod elements

$$\begin{cases} t_1 = dr/ds \\ dt_1/ds = kt_2 \end{cases}$$

基金项目: 中国石油化工集团公司重点科技项目(P06075)“勘探开发关键技术预研”资助。

作者简介: 刘磊明,女,1977年1月生,2006年获北京科技大学博士学位,现为北京科技大学信息工程学院讲师,主要从事系统辨识、模式识别、网络控制、生产过程智能控制等方面的研究。E-mail: leiming.liu@163.com

$$\begin{cases} dt_2/ds = -k t_1 + \tau_3 \\ dt_3/ds = -\tau_2 \end{cases} \quad (1)$$

其中, k 和 τ 分别为曲杆微元在向径 $r(s)$ 处的曲率和挠率。

如图 1 所示, 曲杆微元所受的内力 f 、力矩 M 、单位长杆上所受的力 q 以及微元质心位移 u 这 4 个向量在自然坐标系中的分量分别为

$$\begin{cases} f = [f_1, f_2, f_3]^T \\ M = [M_1, M_2, M_3]^T \\ q = [q_1, q_2, q_3]^T \\ u = [u_1, u_2, u_3]^T \end{cases} \quad (2)$$

忽略扭矩影响, 可直接得到质心在 s 处的微元运动的力平衡方程和力矩平衡方程分别为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial s} + q = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M}{\partial s} = f \times t_1 \end{cases} \quad (3)$$

式中: m 为单位长杆的质量, kg 。

设抽油杆抗拉刚度为 E_A , 抗弯刚度为 E_I , 可得微元内力与形变间的本构关系式为^[6-7]

$$\begin{cases} f_1 = E_A \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} - k u_2 \right) \\ M_2 = E_I \left(-\frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} - \tau \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) \\ M_3 = E_I \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} - \tau \frac{\partial u_3}{\partial s} + k \right) \end{cases} \quad (4)$$

2 定向水平井抽油杆柱运动的偏微分方程

基本假设如下: ①井眼轴线近似为平面曲线; ②抽油杆只有平面内的纵向、横向振动, 即 $u_3 = 0$, 对油管只涉及纵向振动; ③抽油杆柱截面为圆形; ④井眼曲率 k 比较小, 且关于弧长 s 为分段常数。抽油杆柱的剪力和剪切变形都是较小的量。管柱的剪力和剪切变形都是可忽略的量, 较小量的积可以忽略。

按假设①根据方程(4)有 $M_2 = 0$ 。由方程(3)的第 2 式可得 $\frac{\partial M_1}{\partial s} = 0$ 。

利用向量微分法则, 由式(3)和式(4)得到描述杆柱振动的方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial f_{r1}}{\partial s} + q_{r1} = m_r \frac{\partial v_{r1}}{\partial t}, \left(\frac{\partial u_{r1}}{\partial t} = v_{r1} \right) \\ \frac{\partial f_{r1}}{\partial t} = E_{Ar} \left(\frac{\partial v_{r1}}{\partial s} - \kappa_r v_{r2} \right), \left(\frac{\partial u_{r2}}{\partial t} = v_{r2} \right) \\ \kappa_r f_{r1} - E_{Ir} \frac{\partial^4 u_{r2}}{\partial s^4} + q_{r2} = m \frac{\partial^2 u_{r2}}{\partial t^2} \end{cases} \quad (5)$$

式中: 下标 r 表示关于抽油杆的相应量; κ_r 为杆的平

面曲率, m^{-1} ; m_r 为单位长度抽油杆的质量, kg ; E_{Ar} 为抽油杆抗拉刚度, N ; E_{Ir} 为抽油杆抗弯刚度, $\text{N} \cdot \text{m}^2$ 。

由于曲线抽油杆在两个扶正器之间能产生横向位移, 用方程组(5)的第 3 式表示抽油杆的横向位移与横向外力及轴向内力间的关系, 忽略油管的横向位移。用下标 t 表示油管的相应量, 则油管振动的偏微分方程组可变为

$$\begin{cases} \frac{\partial f_t}{\partial s} + q_{t1} = m_t \frac{\partial v_t}{\partial t}, \left(\frac{\partial u_t}{\partial t} = v_t \right) \\ \frac{\partial f_t}{\partial t} = E_{At} \frac{\partial v_t}{\partial s} \end{cases} \quad (6)$$

对于油管内的液体流动, 假设液体无气泡, 虽然井眼轴线是曲线, 但液柱运动仍为一维流动。 ρ_f 、 v_f 和 p_f 分别表示液柱在 s 点、 t 时刻的流体密度、速度和压力。根据油管内的液体流动情况, 微可压缩流体一维流动的连续性方程、Euler 运动方程、状态方程构成的方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \rho_f \frac{\partial v_f}{\partial s} + v_f \frac{\partial \rho_f}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial v_f}{\partial t} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial s} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p_f}{\partial s} = \frac{q_f}{\rho_f (A_t - A_r)} \\ p_f = p_f(\rho_f) \end{cases} \quad (7)$$

式中: A_r 和 A_t 分别表示抽油杆截面积和油管的内截面积, m^2 ; q_f 表示单位长度液柱受的外力(包括抽油杆、接箍、油管对液柱的作用力), 其表达式为

$$q_f = -\rho_f (A_t - A_r) g + \eta v_{t1} + \eta v_t \quad (8)$$

式中: η 为液体黏滞阻尼系数。

液体状态方程表明压力 p_f 仅为密度 ρ_f 的函数, 且

由物理意义知 $\frac{dp_f}{d\rho_f} > 0$, 式(7)可简化为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + v_f \frac{\partial \rho_f}{\partial s} + \rho_f \frac{\partial v_f}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial v_f}{\partial t} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial s} + \frac{a^2(\rho_f)}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial s} = Q_f \end{cases} \quad (9)$$

其中,

$$a^2(\rho_f) = \frac{dp_f}{d\rho_f}$$

$$Q_f = q_f / [\rho_f (A_t - A_r)]$$

由偏微分方程组式(5)一式(6)、式(9)构成的模型即为有杆泵抽油系统的预测和设计模型以及对于抽油系统故障诊断的新数学模型。

新模型综合了有杆抽油系统的一些主要数学模型的特点^[1-2, 4]。如果假设液体不可压缩, 液体压力梯度为常数, 并假定油管锚定以及油管为刚性, 将得到定向井情况下的抽油杆二维振动的数学模型^[3]。由于考虑了抽油杆柱的横向、纵向振动以及杆柱、管柱、液柱的耦

合运动, 因而该模型能精确地模拟抽油系统的动态。

3 杆柱、管柱和液柱所受的外力

抽油杆柱在抽油机—泵塞系统作用下作往复周期运动, 杆柱、管柱和液柱之间在液体黏滞阻力、侧向挤压力、库仑摩擦力和重力作用下而成为一个运动系统。

杆柱所受纵向外力 q_{r1} 的表达式为

$$q_{r1} = -\eta v_{r1} - \lambda |q_N| \operatorname{sgn} v_{r1} + m_r g \cos \alpha \quad (10)$$

杆柱所受横向外力 q_{r2} 的表达式为

$$q_{r2} = -\eta v_{r2} + q_N \cos \varphi - m_r g \sin \alpha \quad (11)$$

式中: m_r 为单位抽油杆质量, kg; φ 为杆管间的侧向挤压力与主法线方向 t_2 间夹角, ($^\circ$); λ 为摩擦系数; q_N 为杆管间侧向挤压力^[6], MPa; α 为所论处的微元的切线与铅垂线的夹角, ($^\circ$)。此处黏滞阻力包括液体对抽油杆接箍和抽油杆两部分黏滞阻力。

管柱所受纵向和横向外力分别为

$$q_{t1} = -\eta v_t - \lambda |q_N| \operatorname{sgn} v_t + m_t g \cos \alpha \quad (12)$$

$$q_{t2} = q_N \cos \varphi - m_t g \sin \alpha \quad (13)$$

式中: m_t 为单位长度油管的质量, kg。

式(8)中的 ηv_{r1} 和 ηv_t 分别与式(10)和式(12)中的相应项符号相反, 表明液体对杆柱、管柱的黏滞阻力将反作用到液柱上。

4 边界条件与初始条件

4.1 边界条件

由于光杆运动受主推动力控制, 关于杆柱的地面边界条件为^[2,6]

$$\begin{cases} v_{r1}(0, t) = v(t) \\ f_{r1}(0, t) = F(t) \\ v_{r2}(0, t) = 0, v_{r2}(S_i, t) = 0 \\ f_{r2}(0, t) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

式中: $v(t)$ 和 $F(t)$ 分别为 t 时刻悬点的运动速度和悬点载荷。如果用于诊断, 则 $v(t)$ 和 $F(t)$ 可以由实测得到; 如果用于预测, $v(t)$ 可由电动机及曲轴连杆机构的参数得到^[2], 而 $F(t)$ 由预测得到。用 $S_0 = 0$ 表示井口位置, 用符号 $s = S_i$ (其中, $i = 1, 2, \dots, M$) 表示安放扶正器的位置。

经直接分析, 可得油管的地面边界条件为

$$\begin{cases} v_t(0, t) = 0 \\ f_t(0, t) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

液柱的地面边界条件为

$$p_f(0, t) = p_0(t) \quad (16)$$

其中, $p_0(t)$ 为井口油压, 多数情况下可取其为常数。

4.2 初始条件

当光杆处于最低点时, 令 $t = 0$, 此时游动阀之上、下压强 p 与 p_1 相等。对每一点 s ($0 \leq s \leq L$, L 为管柱总长度), 杆柱、管柱和液柱运动速度的初始条件为

$$\begin{cases} v_1(s, 0) = 0 \\ v_2(s, 0) = 0 \\ v(s, 0) = 0 \\ v(s, 0) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

设 H 为垂深, 并沿井轴线的弧长 $s = s_j$ (其中 $j = 1, 2, \dots, N$) 处设置差分法剖分点。显然, 前述的点 S_i 也应为差分法的剖分点。置 $s_0 = 0$, $\Delta s_j = s_j - s_{j-1}$ 。设 α 为 s_j 处的切线倾角, 可得到杆柱、管柱、液柱的内力应满足的初始条件为

$$\begin{cases} f_{r1}(s, 0) = A_r \left[\left[\rho_r g H - \sum_{i=1}^N \rho_i g \cdot \Delta s_i \cos \alpha \right] - \sum_{i=1}^N \rho_{ti} g \cdot \Delta s_i \cos \alpha_i - p_0 \right] \\ f_t(s, 0) = \rho g (A_h - A_t) \left[H - \sum_{i=1}^N \Delta s_i \cos \alpha \right] + \left[\sum_{i=1}^N \rho_{ti} g \cdot \Delta s_i \cos \alpha + p_0 \right] A_t - A_h p_1 \\ p_f(s, 0) = \sum_{i=1}^N \rho_{ti} g \cdot \Delta s_i \cos \alpha + p_0 \\ \rho_i = \rho_t(s_i, 0), \sum_{i=1}^N \Delta s_i = L, f_{r2}(s, 0) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

式中: A_h 为油管的外截面积, m^2 。

此外, 地下边界条件^[6]和周期性条件即为由电动机控制的检验模型的条件。

5 偏微分方程组的求解

应用拟线性双曲型偏微分方程组的特征变换, 在两个较小量 κ_i 和 v_{r2} 的积可忽略的条件下, 可把方程组(5)的前两个方程、方程组(6)和方程组(9)这 6 个运动方程化成对角形, 即

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\sqrt{E_{Ar}}}{\sqrt{\rho_r}} \frac{\partial w_1}{\partial s} = \frac{q_{r1}}{\rho_r A_r} \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{\sqrt{E_{Ar}}}{\sqrt{\rho_r}} \frac{\partial w_2}{\partial s} = \frac{q_{r1}}{\rho_r A_r} \\ \frac{\partial w_3}{\partial t} - \frac{\sqrt{\rho_t}}{\sqrt{E_{At}}} \frac{\partial w_3}{\partial s} = \frac{q_t}{\rho(A_h - A_t)} \\ \frac{\partial w_4}{\partial t} + \frac{\sqrt{\rho_t}}{\sqrt{E_{At}}} \frac{\partial w_4}{\partial s} = \frac{q_t}{\rho(A_h - A_t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial w_5}{\partial t} + (V_{t+} - a) \frac{\partial w_5}{\partial s} = Q_f \\ \frac{\partial w_6}{\partial t} + (V_{t-} - a) \frac{\partial w_6}{\partial s} = -Q_f \end{cases} \quad (19)$$

其中,

$$\begin{aligned} w_1 &= V_{t+} + \frac{1}{A_r \sqrt{\rho_t E_{\lambda r}}} f_{r1} \\ w_2 &= V_{t-} - \frac{1}{A_r \sqrt{\rho_t E_{\lambda r}}} f_{r1} \\ w_3 &= V_{t+} + \frac{1}{\sqrt{\rho_t E_{\lambda t} (A_h - A_t)}} f_t \\ w_4 &= V_{t-} - \frac{1}{\sqrt{\rho_t E_{\lambda t} (A_h - A_t)}} f_t \\ w_5 &= V_{t+} \int_{p_0}^p \frac{a(z)}{z} dz \\ w_6 &= -V_{t+} \int_{p_0}^p \frac{a(z)}{z} dz \end{aligned}$$

式中: ρ_0 为 $p = p_0$ 处流体密度, kg/m^3 。

方程组(19)中的每一个方程只含一个未知函数,可见,这是一个约简的数学模型,可用逆风格式求解。而方程组(5)中的第3个方程可用方程组(19)的上一个时间层的数据求解。对于方程组(19)中依赖于待求量的系数计算也按此原则处理,这是求解拟线性微分方程的通常作法。

6 模型特例

为了便于应用,讨论杆柱横向振动可以忽略的情况,即给出统一模型的一个特例。在井眼为平面曲线及横向振动很微小的假设下,建立抽油杆柱、管柱并耦合液柱运动的数学模型。

在前面假设的基础上,考虑油管对抽油杆的限制,假设抽油杆柱只有轴向往复运动,没有横向振动。则抽油杆只有纵向位移的偏微分方程组(5)变为

$$\begin{cases} \frac{\partial f_r}{\partial s} + q_{r1} = m_r \frac{\partial V_r}{\partial t}, \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} = V_r \right] \\ \frac{\partial f_r}{\partial t} = E_{\lambda r} \frac{\partial v_r}{\partial s} \end{cases} \quad (20)$$

式(20)、式(6)和式(9)一起构成有杆泵抽油系统新的数学模型。它是由偏微分方程组(5)、式(6)和式(9)构成模型的重要特例,是标准的拟线性双曲型偏微分方程组,其特征形式为有效的迎风求解格式。

7 结论

(1) 通过分析曲杆微元所受内力、力矩,单位长杆上所受外力以及微元质心位移等向量,得到微元的运动平衡方程和微元所受内力与形变间关系的本构方

程,推导出了抽油杆和油管振动的偏微分方程组和液柱的振动方程。

(2) 杆柱、管柱、液柱振动的偏微分方程组耦合成为杆抽油系统的新数学模型。当增加各种不同的新假设时,可视已有数学模型为特殊情况。新模型具有统一性,应用拟线性双曲型偏微分方程组的特征变换,可将其约简为一个易于求解的模型。

(3) 新模型中考虑了抽油杆的横向、纵向振动和杆柱、管柱、液柱的耦合运动,是一个较精确模拟抽油系统动态的模型,适用于定向井的预测、设计以及抽油系统故障诊断。

致谢 江苏油田工程技术研究院洪光明副主任、苏德胜高级工程师、朱一星高级工程师、段志兵高级工程师对本文撰写给予了热心指导和帮助,特致谢忱。

参考文献

- [1] Gibbs S G. Predicting the behavior of sucker-rod systems [J]. Journal of Petroleum Technology, 1963, 15(7): 769-778.
- [2] Doty D R, Schmidt Z. An improved model for sucker rod pumping [R]. SPE 10249, 1983.
- [3] Lukaszewicz S A. Dynamic behavior of the sucker rod string in the inclined well [R]. SPE 21665, 1991.
- [4] 余国安, 郭亦炯, 王国源. 有杆泵抽油井的三维振动 [J]. 石油学报, 1989, 10(2): 76-83.
Yu Guo'an, Wu Yijiong, Wang Guoyuan. Three dimensional vibration in a suck rod beam pumping system [J]. Acta Petrolei Sinica, 1989, 10(2): 76-83.
- [5] 杨海滨, 狄勤丰, 王文昌. 抽油杆柱与油管偏磨机理及偏磨点位置预测 [J]. 石油学报, 2005, 26(2): 100-103.
Yang Haibin, Di Qinfeng, Wang Wenchang. Prediction of serious abrasion position and mechanism of uneven abrasion between sucker rod string and tubing [J]. Acta Petrolei Sinica, 2005, 26(2): 100-103.
- [6] 徐骏, 莫业湘. 定向井抽油杆柱纵横振动模型及其诊断 [J]. 同济大学学报: 自然科学版, 1995, 23(1): 26-30.
Xu Jun, Mo Yexiang. Longitudinal and transverse vibration model of the sucker rod string in directional wells and its application in diagnosis [J]. Journal of Tongji University: Natural Science Edition, 1995, 23(1): 26-30.
- [7] 李子丰, 李敬元, 马兴瑞, 等. 油气井杆管柱动力学基本方程及应用 [J]. 石油学报, 1999, 20(3): 87-90.
Li Zifeng, Li Jingyuan, Ma Xingrui, et al. Fundamental equations and its applications for dynamical analysis of rod and pipe string in oil and gas wells [J]. Acta Petrolei Sinica, 1999, 20(3): 87-90.
- [8] 徐芃, 徐士进, 尹宏伟. 有杆抽油系统故障诊断的人工神经网络方法 [J]. 石油学报, 2006, 27(2): 107-110.
Xu Peng, Xu Shijin, Yin Hongwei. Application of BP neural network and self-organizing competitive neural network to fault diagnosis of suck rod pumping system [J]. Acta Petrolei Sinica, 2006, 27(2): 107-110.

(收稿日期 2007-12-03 改回日期 2008-04-10 编辑 仇学艳)