文章编号:1003 - 207(2010)02 - 0014 - 05

具有结构变化的资产定价模型的贝叶斯自回归条件异方差检验

李　勇[1] ,倪中新[2] ,周影辉[1]

(1. 中山大学管理学院, 广东 广州　510275 ; 2. 上海大学国际工商与管理学院,上海　200444)

摘　要:在现代资产定价理论中,一个基本的假定是证券资产风险溢价满足方差齐性。然而,这样的假设未必是正确的,因此,需要对资产定价模型进行异方差的检验。本文在贝叶斯框架下考察了具有结构变化的资产定价模型,提出了检验该模型的回归条件异方差的贝叶斯检验方法。最后利用两个具体实例论证了所提方法的有效性。

关键词:自回归条件异方差;贝叶斯因子;资产定价模型;路径抽样;结构变化

中图分类号:F224. 0　　　**文献标识码**:A

1　引言

在现代金融经济学理论中,经典的资产定价理论通常假设风险溢价是平稳的,满足方差齐性。换句话讲,即假设 CAPM 的随机误差是满足正态分布,并且是同方差,无序列相关的。但是,由于金融市场受到多种因素的影响,这样的假设在实际中往往是不成立的。因此,在实际应中,需要对 CAPM 的随机误差进行相应的齐性假设检验。例如,经验研究表明,金融资产收益率的方差经常随着时间变化而变化,从而出现波动性聚类的规律;Engle(1982)[1]用 ARCH 模型即自回归条件异方差模型刻画了这种规律,并给出了检验条件异方差的 LM 检验统计量。

进一步,研究者发现,由于受到重大事件的影响,CAPM 往往会遭受结构突变。这种结构突变会反映到投资组合收益率的系统风险上。比如说,在中国证券市场上,印花税较大幅度下调或者上调,投资组合的收益率对市场组合收益率变化的敏感程度将会非常强烈,因此前后的系统风险会发生较大的变化。近些年来,CAPM 是否发生结构突变已经引起了许多理论和实证金融研究者的广泛兴趣,可参看 Mills(1999)[2] ,苏、丁和方(2008)[3] 。

计量经济学家们已经发展了多种方法用于探测 CAPM 的结构突变点,比如经典的 Chow 检验方法及其延伸。但是,这些探测结构变化的理论和方法也是建立在误差阶段齐性假设的基础上的,可参看 Chow(1960)[4] ,Broemeling 和 Tsurumi (1987)[5] 。因此,对于发生结构突变的 CAPM,即具有结构变化的 CAMP 来说,实际研究中,证券资产风险溢价的方差齐性假设也未必总是合适的,因此我们仍然需要对该模型的随机误差进行相应的阶段齐性假设检验。对于该问题,李、林和吕(2007)[6]首先用 LM 检验统计量系统研究了其自相关和阶段异方差检验问题;李、倪(2008)[7]进一步得到了检验问题的调整 LM 统计量,其功效要比普通 LM 统计量要好。

然而,上述频率检验统计量存在如下缺点:(1)在样本量比较大时,统计量的 p 值通常非常小,导致零假设被过度拒绝。(2)频率检验统计量的 p 值度量了反对零假设的程度。但它并不是支持零假设的证据。举个例子来说,如果检验统计量没有拒绝零假设,并不表示数据支持零假设。(3)实际研究中,研究者可以对研究模型有一些先验认知,频率检验统计量忽略了这些重要信息。但是,在贝叶斯框架下,贝叶斯检验统计量可以回避以上理论困难,因而,近些年来,贝叶斯检验方法在金融研究中引起了研究者广泛的兴趣和注意,如 Avramov 和 Chao (2006)[8] ,Busse 和 Irvinead(2006)[9] ,Cremers(2006)[10]等。本文则在这些研究的基础上,利用贝叶斯方法研究了具有结构变化资产定价模型的自回归条件异方差(ARCH)的贝

收稿日期:2009 - 03 - 17;**修订日期**:2010 - 02 - 22

基金项目:教育部人文社会科学青年基金资助项目(14000 - 3191015);上海市教育委员会科研创新资助项目(10YZ24)

作者简介:李勇(1979 -),男(汉族),江苏南京人,中山大学管理学院副教授,香港中文大学博士,研究方向:贝叶斯金融计量经济学.

叶斯检验问题,并且推导了贝叶斯检验统计量的具体形式。

2　模型描述

在现代金融经济学中,CAPM 是一个重要的理论基石。它表明了在一个竞争均衡的资本市场中,期望收益与系统风险呈现一个线性关系,系统风险无法分散,而非系统风险可以通过资产组合而被抵消,所以人们只能获得系统风险补偿。通常 CAPM 可表示为一个线性回归模型:

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon, \tag{1}$$

其中 $y = R_p - R_f$, $x = R_m - R_f$。R_p, R_m, R_f 分别表示某个投资组合,整个金融市场组合以及无风险资产的收益率,y 和 x 则分别为投资组合和整个金融市场投资组合的风险溢价;β可解释为投资组织收益率对金融市场投资组合收益变化的敏感程度,度量了资产的系统风险;这里通常假定金融收益服从高斯分布,即假设 $\in\varepsilon \sim N[0,\sigma^2]$。另外,对于参数 α而言,根据有效市场理论,α应该等于 0,因而在 CAPM 中 α应该删除。然而,α度量了实际风险溢价和理论风险溢价的平均差异。因此,如果 α显著不为 0,则说明该金融资产的价格有可能被错误定价。在实证检验中,CAPM 通常包括截距项α,并且通过检验$\alpha = 0$是否显著来判断金融资产是否被错误定价。关于 CAPM 理论的更多解释,可参考 Berndt(1996)[11],Mills(1999)[2]。

进一步,假设 CAPM 在时刻 $i = n_1$ 发生结构突变,则具有单个结构突变点的 CAMP 可表示为:

$$y_i = \alpha + x_i\beta_1 + \varepsilon_i,\ i = 1, 2, \cdots, n_1;$$
$$y_i = \alpha + x_i\beta_2 + \varepsilon_i,\ i = n_1 + 1, n_1 + 2, \cdots, n。\tag{2}$$

根据李和倪(2008)[7],对上述模型相应的协变量补零,则模型可转换为:

$$y_{1i} = \alpha + x_{1i}\beta_1 + 0\beta_2 + \varepsilon_{1i} = f_{1i}^T\beta + \varepsilon_{1i}$$
$$y_{2j} = \alpha + 0\beta_1 + x_{2j}\beta_2 + \varepsilon_{2j} = f_{2j}^T\beta + \varepsilon_{2j}$$
$$i = 1, 2, \cdots, n_1;\ j = 1, 2, \cdots, n_2。\tag{3}$$

这里 $f_{1i} = (1, x_{1i}, 0)^T$, $f_{2j} = (1, 0, x_{2j})^T$, $\beta = (\alpha, \beta_1, \beta_2)^T$。在金属资产收益率数据中,经常出现波动性聚类现象,这种现象可用 ARCH 模型来刻画(Engle(1982)[1]),其基本形式可以表达为:

$$\varepsilon_i = \sigma_i\epsilon_i,\ \sigma_i^2 = \phi_0 + \phi_1\varepsilon_{i-1}^2 + \cdots + \phi_p\varepsilon_{i-p}^2$$
$$\phi_0 > 0,\ \phi_1, \cdots, \phi_p \geq 0 \tag{4}$$

这里 p 是自回归阶数,ϵ_i, $i = 1,2,\cdots,n$ 是服从 $N[0,1]$的白噪声并且相互独立。实际研究中,检验条件异方差可归纳为假设检验问题 H_0:$\phi_i = 0$, $i = 1,2,\cdots,p$; H_1:ϕ_i 中至少有一个不为 0。

本文则在贝叶斯框架下,研究该问题。

令观察变量 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$, $\theta = (\beta, \phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_p)^T$,在贝叶斯分析中,指定概率分布 $p(\theta)$为 θ的先验分布,则联合分布可表示为:

$$p(\theta, y) = p(y|\theta)p(\theta) \tag{5}$$

因此参数 θ相应的后验分布可表示为:

$$p(y|\theta) = \frac{p(\theta, y)}{p(y)} \propto p(\theta, y) = p(y|\theta)p(\theta) \tag{6}$$

这些年来,随着 MCMC 抽样技术的进步,我们可以方便地从后验分布中抽取多个随机样本。在抛弃一定数量的预烧(burn - in)样本之后,剩下的随机样本可看作是来自于后验分布的有效样本。在这些有效样本的基础上,我们可以进行有效垢贝叶斯推断。譬如,参数 θ的贝叶斯估计和方差估计公式可分别表示为

$$\hat{\theta} = \frac{1}{J - S}\sum_{j=S+1}^{J}\theta^{(j)},$$

$$\hat{Var}(\theta) = \frac{1}{J - S}\sum_{j=S+1}^{J}(\theta^{(j)} - \hat{\theta})(\theta^{(j)} - \hat{\theta})^T.$$

这里$\{\theta^{(j)}, j = 1,2,\cdots,J\}$为模拟产生的样本,其中前 S 个样本是预烧样本。

3　贝叶斯检验方法

记 M_1 为零假设成立条件下(无条件异方差)对应的模型,M_2 为备择假设成立条件下(有条件异方差)相应的模型。在贝叶斯框架下,条件异方差假设检验问题权衡比较模型 M_1 和 M_2 哪个能被数据更好地支持。在贝叶斯理论中,贝叶斯因子是一个非常重要的统计量,可用来服务此目的。需要注意的是,经典显著性假设检验统计量的一个缺点是检验统计量值的大小并不能为假设提供有力支持。比如说,检验统计拒绝零假设,其值的大小并不能为 ARCH 效果存在提供有力证据,但是贝叶斯因子检验统计量没有此缺点,其值越小,则说明数据越支持零假设,这也是为什么我们发展贝叶斯检验方法的一个重要原因。对于贝叶斯因子的更多理论解释,可以参看 Kass 和 Rafety(1995)[12],Geweke(2007)[13]。对于条件异方差假设检验问题 H_0:$\phi_i = 0$, $i = 1,2,\cdots,p$; H_1:ϕ_i 中至少有一个不为 0,贝叶斯因子可定义为:

$$B_{10} = \frac{p(y|M_2)}{p(y|M_1)} \tag{7}$$

这里 $p(y|M_k)$可由下列方程获得

$$p(y \mid M_k) = \int p(y, \phi_k \mid M_k) d\phi_k$$
$$= \int p(y \mid \phi_k, M_k) p(\phi_k \mid M_k) d\phi_k ,$$

其中 $\theta_k \in \Omega_k$, $k = 1,2$。通常称 $p(y| M_k)$ 为边际似然。不难看出,贝叶斯因子实际上就是模型边际似然的比值。一个更为直观的解释是:贝叶斯因子可视为观测数据 y 分别在两个不同模型假定 M_1 和 M_2 下出现的可能性度量的比值。

对于上述贝叶斯因子,由于其边际似然涉及复杂多变量积分,其计算并不是一个简单的侨务。本文采用效率非常高的路径抽样(Gelman 和 Meng (1998)[14])来计算贝叶斯因子。基本想法可以概括如下:根据前面的描述可知,边际似然 $p(y| M_k)$ 可以看作是完全似然 $p(y,\theta| M_k)$ 的正则化常数。令 $\theta_1 = (\alpha,\beta)^T$, $\theta_2 = (\alpha,\beta,\phi_1 = 0, \cdots,\phi_p)^T$,定义

$$q_1(\theta_2) = p(y,\theta_1| M_1) p(\theta_{-1}| \theta_1, M_2)$$
$$= p(y| \theta_1, M_1) p(\theta_1| M_1) p(\theta_{-1}| \theta_1, M_2)$$
$$q_2(\theta_2) = p(y,\theta_2| M_2)$$
$$= p(y| \theta_2, M_2) p(\theta_2| M2) 。$$

注意到,在实践中,对于共同参数 θ_1 研究者通常指定同样的先验分布,也就是 $p(\theta_1 \mid M_1) = p(\theta_1 \mid M_2)$,加之 $\int p(\theta_{-1} \mid \theta_1, M_2) d\theta_{-1} = 1$,容易导出

$$\int_{\Omega_2} q_1(\theta_2) d\theta_2 = p(y \mid M_1)$$
$$\int_{\Omega_2} q_2(\theta_2) d\theta_2 = p(y \mid M_2)$$

因此,贝叶斯因子 B_{12} 就是 $q_k(\theta_2)$, $k = 1,2$ 的正则化常数的比值,并且定义在同一支撑集 Ω_2 上,从而我们可以借助于路径抽样计算这个比值。

考虑含有一个连续链接参数 $t(t \in [0,1])$ 的一类概率密度函数 $q(\theta_2| t)$,使得 $q(\theta_2 1) = q_2(\theta_2)$, $q(\theta_1| 0) = q_1(\theta_1)$。注意到

$$p(\theta_2| y,t) = \frac{1}{h(t)} q(\theta_2| t) = \frac{1}{h(t)} p(y,\theta_2| t)$$
$$= \frac{1}{h(t)} p(y| \theta_2, t) p(\theta_2| M_2) ,$$

其中 $h(t) = p(y| t)$。由此可得 $h(1) = p(y| M_2)$, $h(0) = p(y| M_1)$。然后根据 Gelman 和 Meng (1998)[14],可推出

$$\log B_{21} = \log \frac{p(y \mid M_2)}{p(y \mid M_1)} = \log \frac{h(1)}{h(0)}$$
$$= \int_0^1 \log h(t) \mathrm{d}t\mathrm{d}t = \int_0^1 E\theta[U(y,\theta,t)] dt \qquad (8)$$

其中 $E\theta$ 表示关于后验分布 $p(\theta_2| y,t)$ 求期望,并且

$$U(y,\theta,t) = \frac{d}{dt}\log q(\theta_2 \mid t)$$
$$= \frac{d}{dt}\{\log[p(y \mid \theta_2, t) p(\theta_2 \mid M_2)]\}$$
$$= \frac{d}{dt}\{\log p(y \mid \theta_2, t)\}$$

由此可得,$U(y,\theta,t)$ 与参数 θ 的先验分布无关,仅仅与似然函数有关。因此链接参数 t 的作用可看作是找个中间模型 M_t^* 来连接模型 M_1, M_2。使得 $t = 0$ 时,$M_t^* = M_1$; $t = 1$ 时,$M_t^* = M_2$。对于条件异方差检验问题来说,一个简单的中间链接模型是:

$$M_t^* : \varepsilon_i = \sigma_i \epsilon_i , \sigma_i^2 = \phi_0 + t\phi_1 \varepsilon_{i-1}^2 + \cdots + t\phi_p \varepsilon_{i-p}^2$$

从以上推导不难发现,贝叶斯因子统计量并没有解析形式。根据 Gelman 和 Meng (1998)[14],我们可以用一个简单的数值程序来估计对数贝叶斯因子。即

$$\log \hat{B}_{21} = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{S} (t_{(s+1)} - t_{(s)}) (\overline{U}_{(s+1)} + \overline{U}_{(s)}) \qquad (9)$$

这里 $t_{(0)} = 0 < t_{(1)} < t_{(2)} < \cdots < t_{(S)} < t_{(S+1)} = 1$ 是区间 $[0,1]$ 的均匀等分点,并且

$$\overline{U}_{(s)} = J^{-1} \sum_{j=1}^{J} U(y,\theta^{j)}, t_{(s)}) \qquad (10)$$

其中 $\{\theta^{j)}, j = 1,2, \cdots, J\}$ 是来自于后验分布 $p(\theta| y, t_{(s)})$ 的一组有效随机模拟样本。

4 实证分析

为了论证本文发展的方法,我们使用两个实例分析来论证其有效性。

4.1 实例 1

首先我们选取 IBM 公司股票收益率数据,其来源于 Berndt (1996)[13],样本容量为 120。Mills (1999)[2] 详细分析了该数据集,Chow 检验的结果显示第 85 号点是突变点。根据 §2,在各个阶段对没有出现的 β 系数相对应的协变量补零,则该数据可以用如下具有结构变化 的资产定价模型来拟合:

$$y_{1i} = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 \times 0 + \varepsilon_{1i}, \quad i = 1, 2, \cdots, 84$$

$$y_{2i} = \alpha + \beta_1 \times 0 + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_{2i}, \quad i = 85, 86, \cdots, 120$$

其中 y_{1i} 为 IBM 公司股票的月风险溢价,x_{li} 为整个市场组合相应的风险溢价,$i = 1, 2, \cdots, 120$。

为了进行条件异方差的贝叶斯检验,首先我们需要指定参数 θ 的先验分布。Mills (1999)[2] 对上述数据已经做了一些初步的分析,因此得到的分析

结果可以作为先验信息吸收到模型中。进一步,根据 Congdon(2007)[15],参数 θ 的先验分布可简单指定如下:

$\alpha \sim N(-0.005, 0.0046)$, $\beta_1 \sim N(0.46, 0.07)$,

$\beta_2 \sim N(0.46, 0.07)$, $\phi_0 \sim \Gamma(9.0, 4.0)$,

$\phi_1 \sim uniform(0, 1)$, …, $\phi_p \sim uniform(0, 1)$。

然后,我们利用偏差信息准则(DIC)来确定条件异方差的滞后阶数 p。经过计算可得,p 取值为 1,2,3 时相应的 DIC 值分别为:372.769,-370.748,-369.229。因此,可认为 $p = 1$ 是比较合适的阶。

下面我们检验条件异方差是否显著。零假设和备择假设下的两个模型的形式可分别表达为:

M_1 :$\varepsilon_i = \sigma_i \epsilon_i$, $\sigma_i^2 = \phi_0$,

M_2 :$\varepsilon_i = \sigma_i \epsilon_i$, $\sigma_i^2 = \phi_0 + \phi_1 \varepsilon_{i-1}$。

根据 §4 中的理论,对于 B_{21} 的估计,我们可以构造一个中间模型,也就是

M_t^* :$\varepsilon_i = \sigma_i \epsilon_i$, $\sigma_i^2 = \phi_0 + t \times \phi_1 \varepsilon_{i-1}$。

容易看出,$t = 0$ 时,$M_t^* = M_1$;$t = 1$ 时,$M_1^* = M_2$。进一步,为了考察贝叶斯因子对先验分布的敏感程度,我们把初始先验分布指定为先验分布 1,然后分别干扰 α, β_1, β_2 的先验分布中的参数,将这些值分别乘以 2 和除以 2,分别当做先验分布 2 和先验分布 3。根据我们发展的方法,可以计算出其相应的贝叶斯因子值,归纳在表 1 中。因此,从这些结果中,我们可以发现,贝叶斯因子支持模型 M_1,也就是说条件异方差不显著。

表 1　检验核计量不同先验分布下的估计值

先验分布 1	先验分布 2	先验分布 3
-2.3738	-2.3759	-1.2823

4.2　实例 2

进一步,我们选取万科地产 A 股公司股票收益率月度数据,其来源为雅虎金融,样本容量为 46,时间段为 2006 年 3 月至 2009 年 12 月。突变点为 2007 年 10 月,在该月上证指数涨至最高点,为牛市顶峰,然后逐渐下行,进入熊市阶段。相应的时间段无风险收益率为中国固定利率国债一年收益率,数据来源于 Wind 数库。

为了进行条件异方差的贝叶斯检验,我们指定与实例 1 相同的模型,参数 θ 的先验分布采用主观先验分布,指定如下:

$\alpha \sim N(0.0, 10)$, $\beta_1 \sim N(0.0, 10)$,

$\beta_2 \sim N(0.0, 10)$, $\phi_0 \sim \Gamma(9.0, 4.0)$,

$\phi_1 \sim uniform(0, 1)$, …, $\phi_p \sim uniform(0, 1)$。

同样我们利用偏差信息准则(DIC)来确定条件异方差的滞后阶数 p。经过计算可得,p 取值为 1,2,3 时相应的 DIC 值分别为 -14.899,-14.668,-12.153。因此,可认为 $p = 1$ 是比较合适的阶。然后根据我们发展的方法,采用实例 1 中同样类型的三种不同先验分布指定,计算出相应的贝叶斯因子值,归纳在表 2 中。因此,从这些结果中,我们可以发现,贝叶斯因子支持模型 M_1,也就是说条件异方差不显著。

表 2　检验统计量不同先验分布下的估计值

先验分布 1	先验分布 2	先验分布 3
-1.234587	-1.226297	-1.228533

5　结语

在资产定价模型中,衡量系统风险的 β 系数经常不是稳定的,往往要发生结构变化。本文的主要学术贡献是在于:对于具有结构变化的资产定价模型,在贝叶斯框架下,我们使用贝叶斯因子检验统计量研究了其条件异方差检验问题;基于高效的路径抽样方法,我们推导了贝叶斯因子统计量的具体形式,用以条件异方差检验,并且给出了具体的估计方法;最后,借用两个实例分析论证了本文提出的方法。容易看出,本文发展的方法可以延伸到多个结构突变点的资产定价模型中,甚至更复杂的模型如 GARCH 模型,这些可作为将来的研究主题。但是,需要指出的是,本文发展的方法需要使用信息先验分布。如果在非信息形式下,使用非信息先验分布,则本文的贝叶斯因子检验统计量会依赖一个任意常数,不能够被正常定义(Kass 和 Rafety(1995)[12]),如何发展新的检验方法则可作为将来研究的一个重要主题。

参考文献:

[1] Engle, R. F.. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations [J]. Econometrica, 1982, 50: 987-1007.

[2] Mills, T. C.. The Econometric Modelling of Financial Time Series, 2nd editon [M]. Cambridge University Press, 1999.

[3] 苏治,丁志国,方明. 跨期 β 系数时变结构研究[J]. 数量经济技术经济研究,2008, (5): 136-146.

[4] Chow, G. C.. Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions [J]. Econometrica, 1960, 28(3): 591 - 605.

[5] Broemeling, L. D., Tsurumi, H.. Econometrics and Structural Change [M]. New York: M. Dekker, 1987.

[6]李勇,林金官,吕庆哲. 具有结构变化的 CAPM 的阶段异方差和自相关性检验[J]. 智慧科技与应用统计学报(台湾),2007, 5(2): 23 - 31.

[7] 李勇,倪中新. 具有结构变化的 CAPM 的阶段异方差和自相关性的调整 LM 检验[J]. 数量经济技术经济研究, 2008, (2): 132 - 142.

[8] Avramov, D., Chao, J. C.. An exact bayes test of asset pricing models with application to international market[J]. Journal of Business, 2006, 79(1): 293 - 323.

[9] Busse, J. A., Irvine, P. J.. Bayesian alphas and mutual fund persistence [J]. Journal of Finance, 2006, (5): 2251 - 2287.

[10] Cremers, K. J. M.. Multifactor efficiency and bayesian inference [J]. Journal of Business, 2006, 79(6): 2951 - 2998.

[11] Berndt, E. R.. The Practice of Econometrics: Classic and Contemporary [M]. Addison Wesley, 1996.

[12] Kass, R. E., Raftery, A. E.. Bayes factor[J]. Journal of the Americana Statistical Association, 1995, 90: 773 - 795.

[13] Geweke, J.. Bayesian model comparison and validation [J]. Americal Economic Review, 2007, 97(2): 60 - 64.

[14] Gelman, A., Meng, X. L.. Simulating normalizing constants: From importance sampling to bridge sampling to path sampling [J]. Statistical Science, 1998, 13: 163 - 185.

[15] Congdon, P.. Bayesian Statistical Modeling, Second Version [M]. Hoboken, New York: John Wiley, 2007.

Bayesian Testing of ARCH for CAPM with Structural Change

LI Yong [1], NI Zhong-Xin [2], ZHOU Ying-hui [1]

(1. Business school, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, China;

2. College of International Business and Management, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: In capitial asset pricing theory, it is a fundamental assumption that the extra returns of securities have constant variance. However, this assumption is not always realistic, thus it is necessary to check of this assumption. Under the Bayesian framework, the paper is devoted to constructing Bayesian test for the autoregression conditional heteroscadasicity (ARCH) of the CAPM with structural change. In the end, the effectiveness of the developed approach is illustrated with a real example.

Key words: ARCH; Bayes factor; CAPM; path sampling; structural change