空间桁架的单位向量法

朱伊德 薛 纭 1)

(上海应用技术学院机械与自动化工程学院，上海 200233)

摘要 将速度投影定理推广到弹性杆，通过定义杆的单位向量，建立了杆端点的位移与杆轴向变形的几何关系等，并将推广的速度投影定理用于建立空间超静定桁架的变形协调方程并计算各类桁架的节点位移，具有程式化和普遍性的特点，避免了绘制位移图和寻找几何关系的繁琐．算例表明该方法的优越性．

关键词 空间桁架，速度投影定理，变形协调方程，节点位移

引 言

桁架在现代建筑工程中的应用十分广泛．在桁架的设计计算中常要计算节点的位移和建立变形协调方程．常用的方法是几何法和能量法．前者是在画出节点位移图的基础上寻找杆变形和位移的几何关系，特点是直观，但即使对简单平面桁架也存在作图不易找关系较困难的问题；而后者包括卡氏定理、莫尔积分和单位力法等在工程设计中广泛采用．

为克服几何法的困难，文献 [1] 用结点的位移表达杆的应变，文献 [2] 建立杆的端点位移与杆变形的关系来简化求解过程．但文献 [1,2] 解决的都是平面问题，有其局限性．

本文的目的是改进几何法，将刚体运动学中的速度投影定理推广到弹性杆，通过定义沿杆的单位向量，建立杆变形和位移的几何关系并结合应力与应变的物理关系，用于建立空间超静定桁架的变形协调方程并计算各类桁架的节点位移．本文综合了文献 [1,2] 的长处，具有概念清楚、直观、程式化的特点，且有普遍性．

1 基本方法

在刚体运动学中，速度投影定理刻画了刚体的基本特征：刚体上任意两点 A, B 的速度在这两点连线上的投影相等．对于桁架结构中连接两节点 A, B(以 $A, B, C, D, \cdots$ 表示结构中的节点) 的弹性杆 l_i ($i=1,\cdots,n$, 为结构中的杆件编号), 定义沿杆从节点 A 指向节点 B 的单位向量为 $\boldsymbol{l}_i^0$, 则两端点的位移向量和杆的变形 $\Delta \boldsymbol{l}_i$ 存在如下关系

$$\Delta \boldsymbol{r}_B \cdot \boldsymbol{l}_i^0 - \Delta \boldsymbol{r}_A \cdot \boldsymbol{l}_i^0 = \Delta l_i \tag{1}$$

当 $\Delta l_i > 0 (< 0)$ 时杆为伸长 (缩短)，这是刚体速度投影定理对受拉／压变形的弹性杆的推广．在小变形的条件下，平衡条件只对变形前的位形满足，因此，变形前的单位向量 $\boldsymbol{l}_i^0$ 很容易写出．对于简单平面桁架，杆数 n 和节点数 m 存在关系： $n = 2m - 3$．考虑到支座杆与节点重合，且固定铰和滑移铰都是刚性的，因此节点的位移分量与杆数相等，其系数矩阵是满秩的，可以从式 (1) 解出位移分量，即用杆的变形表达节点的位移．对于内力超静定桁架，存在多余杆，由式 (1)，此多余杆的变形可以用其余杆的变形表达，即得变形协调方程．由于借助单位向量，使建立此方程的过程简单且程式化，并可推广应用于空间杆系结构．若空间杆系结构中有 m 个节点，则杆数 $n = 3m$(杆件与基础的连接点不能算在节点内)，是静定的．若杆数 $n > 3m$, 则杆系结构为 $(n - 3m)$ 次超静定桁架．因为 n 根杆可列出 n 个变形位移方程，由式 (1)，多余杆的变形可以用其余杆的变形表达，即得变形协调方程．再与平衡方程和物理方程联立，容易求得各杆内力与各节点的位移．

2 算 例

例 1 图 1 为空间杆系结构由单一结点 A 通过 4 个杆与基础相连．假设所有杆都是相同的，杆长 $L = 0.5\,\mathrm{m}$, 杆重不计．杆 1 和杆 3 位于水平面 ABD 内，杆 2 和杆 4 位于垂直平面 ACE 内，截得角度为 $\angle BAD$. 在 A 点的力 F 作用于垂直平面内，与平面 BCD 平行，且与垂直杆 AE 的夹角为 45°．求各杆的内力和结点 A 的位移．

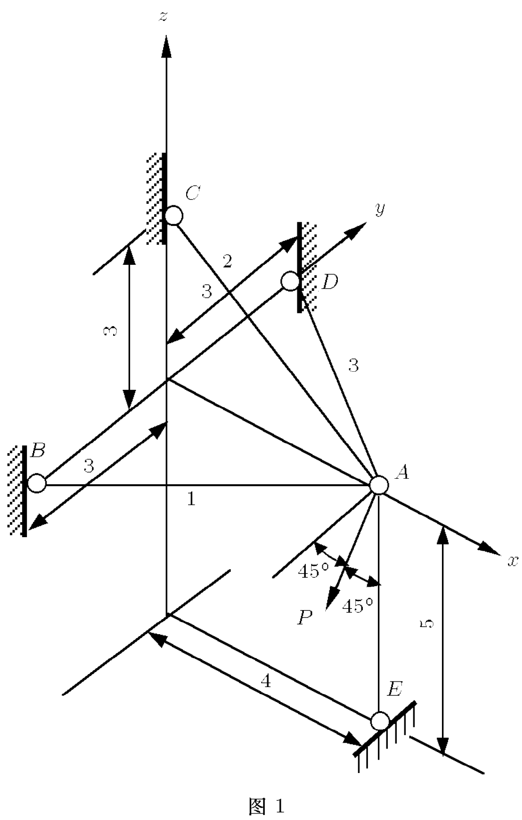

图 1

2007–02–06 收到第 1 稿， 2007–10–24 收到修改稿．

1) E-mail: xueylyf@citiz.net

解：设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为沿坐标轴方向的单位向量，节点 A 的位移表为

$$\Delta\boldsymbol{r}_A=\Delta x_A\boldsymbol{i}+\Delta y_A\boldsymbol{j}+\Delta z_A\boldsymbol{k}$$

各杆的单位向量为

$$\boldsymbol{l}_1^0=\frac{4}{5}\boldsymbol{i}+\frac{3}{5}\boldsymbol{j}，\quad \boldsymbol{l}_2^0=\frac{4}{5}\boldsymbol{i}-\frac{3}{5}\boldsymbol{k}，$$

$$\boldsymbol{l}_3^0=\frac{4}{5}\boldsymbol{i}-\frac{3}{5}\boldsymbol{j}，\quad \boldsymbol{l}_4^0=\boldsymbol{k}$$

由式 (1)，依次对杆列出变形位移方程

$$\frac{4}{5}\Delta x_A+\frac{3}{5}\Delta y_A=\Delta l_1 \tag{2a}$$

$$\frac{4}{5}\Delta x_A-\frac{3}{5}\Delta z_A=\Delta l_2 \tag{2b}$$

$$\frac{4}{5}\Delta x_A-\frac{3}{5}\Delta y_A=\Delta l_3 \tag{2c}$$

$$\Delta z_A=\Delta l_4 \tag{2d}$$

联立以上方程解，得

$$\Delta x_A=\frac{5}{8}(\Delta l_1+\Delta l_3)$$

$$\Delta y_A=\frac{5}{6}(\Delta l_1-\Delta l_3)$$

$$\Delta z_A=\frac{5}{6}(\Delta l_1-2\Delta l_2+\Delta l_3)$$

代入式 (2d), 整理得

$$5\Delta l_1-10\Delta l_2+5\Delta l_3-6\Delta l_4=0 \tag{3}$$

此式即为静不定结构的变形协调方程，与平衡方程和物理方程联立，解得各杆内力

$$F_1=-0.703F，\quad F_2=0.228F$$

$$F_3=0.475F，\quad F_4=-0.570F$$

此结果与文献 [3] 完全一致．进而求得节点 A 的位移

$$\Delta x_A=-0.143\frac{Fl}{EA}$$

$$\Delta y_A=-0.982\frac{Fl}{EA}$$

$$\Delta z_A=-0.570\frac{Fl}{EA}$$

例 1 表明要建立空间超静定桁架的变形协调方程 (3) 是方便的且有章可循，克服了几何法的困难，进而求各杆的内力和结点位移一气呵成．

例 2　空间杆系由球铰连接，位于正方体的边和对角线上．在节点 D 沿对角线 LD 方向作用力 $\boldsymbol{F}_D$, 在节点 C 沿 CH 边铅直向下作用力 $\boldsymbol{F}_C$．如铰链 B,L 和 H 都是固定的，杆重不计，求节点 D 和 C 的位移．

解：设各杆的单位向量

$$\boldsymbol{l}_1^0=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})，\quad \boldsymbol{l}_2^0=\boldsymbol{j}，\quad \boldsymbol{l}_3^0=\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{l}_4^0=\frac{\sqrt{3}}{3}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})，\ \boldsymbol{l}_5^0=\boldsymbol{k}，\ \boldsymbol{l}_6^0=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})$$

节点 C 和 D 的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}_C=\Delta x_C\boldsymbol{i}+\Delta y_C\boldsymbol{j}+\Delta z_C\boldsymbol{k}$$

$$\Delta\boldsymbol{r}_D=\Delta x_D\boldsymbol{i}+\Delta y_D\boldsymbol{j}+\Delta z_D\boldsymbol{k}$$

由式 (1)，依次对杆列出

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(-\Delta x_D+\Delta y_D)=\Delta l_1 \tag{3a}$$

$$\Delta y_C=\Delta l_2 \tag{3b}$$

$$\Delta x_C-\Delta x_D=\Delta l_3 \tag{3c}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(\Delta x_C+\Delta y_C+\Delta z_C)=\Delta l_4 \tag{3d}$$

$$\Delta z_C=\Delta l_5 \tag{3e}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(-\Delta x_D+\Delta z_D)=\Delta l_6 \tag{3f}$$

联立以上方程，解得

$$\Delta x_C=-\Delta L_2+\sqrt{3}\Delta L_4-\Delta L_5$$

$$\Delta y_C=\Delta L_2，\quad \Delta z_C=\Delta L_5$$

$$\Delta x_D=-\Delta L_2-\Delta L_3+\sqrt{3}\Delta L_4-\Delta L_5$$

$$\Delta y_D=\sqrt{2}\Delta l_1-\Delta L_2-\Delta L_3+\sqrt{3}\Delta L_4-\Delta L_5$$

$$\Delta z_D=-\Delta L_2-\Delta L_3+\sqrt{3}\Delta L_4-\Delta L_5+\sqrt{2}\Delta l_6$$

各杆内力为

$$F_1=F_6=F_D，\quad F_2=F_3=-\sqrt{2}F_D$$

$$F_4=\sqrt{6}F_D，\quad F_5=-F_C-\sqrt{2}F_D$$

求得节点的位移为 (设 $F_C=F_D=F$)

$$\Delta x_C=(1+2\sqrt{2}+3\sqrt{6})\frac{FL}{EA}$$

$$\Delta y_C=-\sqrt{2}\frac{FL}{EA}，\quad \Delta z_C=-(1+\sqrt{2})\frac{FL}{EA}$$

$$\Delta x_D=(1+3\sqrt{2}+3\sqrt{6})\frac{FL}{EA}$$

$$\Delta y_D=\Delta z_D=3(1+\sqrt{2}+\sqrt{6})\frac{FL}{EA}$$

若再增加连接 GC 的杆，则成为超静定结构，也容易建立变形协调方程．

图 2 杆件设置较多，用本文方法能充分体现其程式化的特点和方法的优越性．

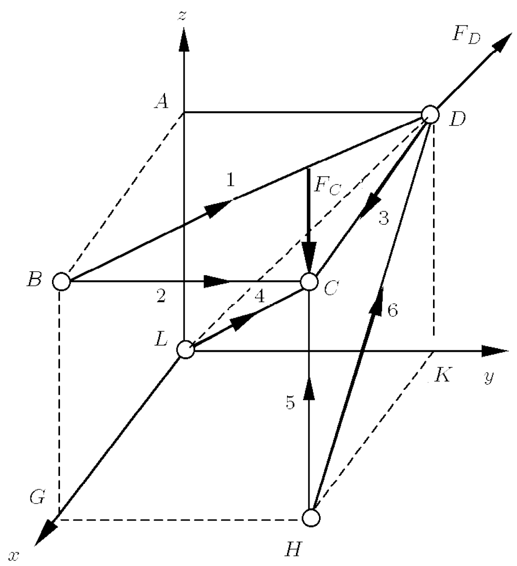

图 2

3 结 论

本文提出的空间静定和超静定桁架的求解方法，其过程规范，概念清楚且适用范围广 (对各类平面桁架的求解更显简易). 两个算例表明：本文借助沿杆的单位向量，通过推广的速度投影定理来建立空间桁架的变形位移方程，既有几何法的直观又有能量法的通用性，并且过程的程式化便于上机计算，可用于材料力学和结构力学的教学中.

参 考 文 献

1 张效松. 简单平面桁架结点位移确定的一种方法. 力学与实践, 1998, 20 (1): 54~55

2 冯贤桂，结点位移计算的一种简单方法，力学与实践， 2002, 24(1): 49~50

3 Timoshenko SP, Young DH. 叶红岭等译. 结构理论. 北京：机械工业出版社， 2005

求解运动学问题的运动链法

宋少云 1)

(武汉工业学院机械工程系，湖北 430023)

摘要 详细阐述了求解理论力学的运动学问题的运动链法. 首先进行机构分析，然后画出运动链图，根据运动链图确定求解方案，然后实施该方案. 列举了两个典型例题说明使用该方法求解运动学问题的过程.

关键词 运动学，运动链

在理论力学的三大模块中，运动学占据着十分重要的位置. 除了运动学自身的重要地位以外，在动力学问题中，运动学的作用也是举足轻重. 对于动力学的问题，不管是采用动力学的普遍原理，还是用达朗伯原理或是虚位移原理，在这些基本方程列出来以后，一般需要补充运动学的方程. 在多年的教学实践中，笔者发现，动力学问题之难解，并不在于动力学本身，而在于运动学基础不牢. 因此，如何教好运动学有着重要的意义.

以往的教科书和参考书籍中,对于运动学的综合题,大多从具体的问题出发给出其求解方法. 这种方法有其合理性，但是笔者发现，仅仅对于与这些例题类似的问题，学生还可以模仿，但是题目稍微变化以后，学生又感到无从下手了. 有些时候，学生也解出来了，但是他们甚至不明白自己是怎么解出来的. 因此，笔者认为需要探索出一种求解运动学问题的一般方法，使得运动学的求解有规律可循，而结束这种模糊混乱的求解状态.

受到计算多体系统动力学的拓扑构型的启发，笔者探索出一种求解运动学问题的运动链法，使用该方法在连续几届学生中进行教学，得到了比较好的教学效果. 本文将具体阐述这种方法，以与各位同仁探讨.

1 运动链法的基本思想和求解方案

运动学研究的主要对象是机构,而机构是固定一个构件而形成的闭式运动链,运动链是由两个或两个以上的构件通过运动副连接而成的系统. 运动学的基本目的是：对于一个机构，当已知原动件的运动后，求解从动件及其上某点的运动.

众所周知，要形成一个清晰的求解思路，最好的方式是用图形. 机构的运动简图是从构件的几何性质和约束性质所作的抽象,要形成一种一般的求解思路,需要进一步的抽象. 在计算多体系统动力学中，使用拓扑构型 [1] 来描述多体系统中各物体的联系方式. 它用一个圆圈来表示物体，用一条连接相邻物体的有向线段来表示一个运动学约束，它进一步舍弃了构件的几何外形和运动学约束的具体形式，所得到的图形更抽象. 但是在运动学中，一个构件内部的点与整体的关系及约束的形式决定着求解思路. 因此，我们进一步具体化拓扑构型的内容，从而形成了一种求解运动学问题的运动链分析图，其基本构件要素如下：

平移可以归结为一点的运动，因此它总是由一个已知点的运动推断另外一个点的运动 (图 1). 转动一般是由一个点的运动推知物体的角速度和角加速度，然后再由整体的运动

本文于 2007–01–26 收到.

1) E-mail: songshaoyun@whpu.edu.cn